**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1975**

УДК 533.6.621.4

ТЯГА СОПЛА ПРИ ЦИРКУЛЯЦИОННОМ ИСТЕЧЕНИИ ВИХРЕВОГО ПОТОКА ГАЗА

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ, В. М. ЗАЙЦЕВ, С. С. НОВИКОВ

(Москва)

Наличие циркуляции у вытекающего газа приводит к изменению рабочих характеристик сопла. Вопрос о расходе и тяге сопла без диффузора (очко) для завихренных потоков изучен теоретически и экспериментально [1–6]. Применение сопел со сверхзвуковой частью вносит существенное усложнение в методику аналитического расчета тяговых характеристик и программу их экспериментального исследования. В [2, 7] сформулирована теория сопла для модели потенциального циркуляционного течения газа, в [5, 8] с использованием ЭВМ решалась полная система уравнений газовой динамики для движения вращающего потока по соплу, в [7, 9] исследовалась вариационная задача профилирования диффузора для циркуляционного потока. Расчет тяги, выполненный в упомянутых работах (за исключением [2], где изучалась частная модель безвихревого вращательного движения), сопряжен с трудоемкими вычислениями на ЭВМ.

В данной статье, в развитие работ [3, 6], сформулирована и экспериментально проверена квазиодномерная теория сверхзвукового сопла для вихревого потока газа.

Рассмотрим вихревой осесимметричный изэнтропический и изоэнергетический поток вращающегося газа в сопле. Система уравнений, описывающих такой поток, запишется в виде [3, 6]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)+\frac{m\Phi}{\xi}=0\\
\frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}-\frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0\qquad(\xi=\xi_1(\zeta)),\qquad \Phi=0\qquad(\xi=0)\\
\frac{1}{\xi m}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=\tilde v_z,\qquad \frac{\varepsilon}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=-\tilde v_r,\qquad \Phi=\tilde v_\varphi\xi\\
\frac{D(\rho/m,\Phi)}{D(\xi,\zeta)}=\frac{\partial(\rho/m)}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}-\frac{\partial(\rho/m)}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0\\
H_t=\frac{v^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=\mathrm{const},\qquad \frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_t}{\rho_t^{\gamma}},\qquad p=\rho RT\\
\xi=\frac{r}{R_*},\qquad \zeta=\frac{z}{L},\qquad \xi_\perp=\frac{R}{R_*},\qquad \Phi=\frac{\Gamma}{R_*v_{\max}}=\frac{\Gamma}{\Gamma_0}\alpha_*\\
v_{\max}=a_t\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}},\qquad \alpha_*=\frac{\Gamma_0}{R_*v_{\max}}=\frac{v_{\varphi*}}{v_{\max}}\\
\tilde v_i=\frac{v_i}{v_{\max}}(i=z,\varphi,r),\qquad m=\lambda R_*,\qquad \varepsilon=\frac{R_*}{L}
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь R_*, R и L — радиус критического сечения, текущий радиус стенки сопла и длина диффузора; величина λ определяется соотношением винтообразности $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$; $\Gamma=v_\varphi r$ — циркуляция (Γ_0 — ее значение на стенке); $F(\xi, \zeta)$ — уравнение профиля сверхзвуковой части сопла; ρ и p — плотность и давление; H_t — энтальпия потока.

Для диффузоров с малым углом раскрытия параметр ε мал, и в (1) можно пренебречь производными по ζ (квазицилиндрическое приближение). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)+\frac{m\Phi}{\xi}=0 \quad \Phi=\alpha_* \quad (\xi=\xi_1(\zeta)), \quad \Phi=0 \quad (\xi=0) \tag{2}$$

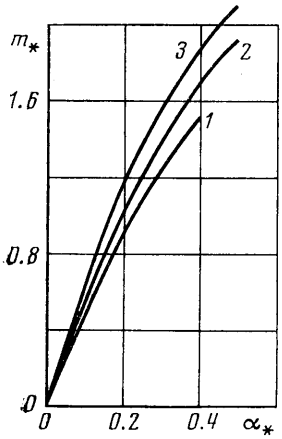
Если напряженность вихревого движения постоянна в каждом поперечном сечении потока $m=m(\zeta)$, то решение (2) будет зависеть от продольной координаты только параметрически и

$$\Phi=\frac{\alpha_*\xi}{\xi_1}\frac{J_1(m\xi)}{J_1(m\xi_1)}, \quad \frac{v_\varphi}{v_{\max}}=\frac{\alpha_*}{\xi_1}\frac{J_1(m\xi)}{J_1(m\xi_1)} \quad \frac{v_z}{v_{\max}}=\frac{\alpha_*}{\xi_1}\frac{J_0(m\xi)}{J_1(m\xi_1)} \tag{3}$$

Значения m и α_* в (3) не являются независимыми. В критическом сечении сопла ($\xi_1=1$) связь между ними находится из условия реализации максимального (для данной интенсивности вращения α_*) расхода газа [3]

$$(dG_r/dm)_{\alpha*}=0 \tag{4}$$

$$G_r=\int\rho v_z\,d\sigma=2\pi R_*^2\rho_t v_{\max}\alpha_*\times$$
$$\times\int_0^1\left(1-\alpha_*^2\frac{J_0^2(m_*\xi)+J_1^2(m_*\xi)}{J_1^2(m_*)}\right)^{\frac{1}{(\gamma-1)}}\times \tag{5}$$
$$\times\frac{J_0(m_*\xi)}{J_1(m_*)}\xi\,d\xi$$



Фиг. 1

Результат совместного решения (4) и (5) для разных значений $\gamma=c_p/c_v$ представлен на фиг. 1 (кривые 1—3 соответствуют $\gamma=1.60$, 1.40 и 1.25). При малых m_* и α_* имеет место соотношение

$$m_*=2\alpha_*\sqrt{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

Зависимость относительного коэффициента расхода $A_r/A_0=G_r/G_0$ сопла для винтового потока от интенсивности завихренности α_* изучена в [3].

Вектор тяги сопла составляется из реактивной и статистической составляющих

$$\mathbf{T}=\int_{\sigma_a}\rho v_n\mathbf{v}\,d\sigma+\int_{\sigma_a}p\mathbf{n}\,d\sigma$$

В предположении квазиодномерности течения (когда радиальная составляющая скорости на выходе из диффузора считается малой) отсюда следует

$$T=\int_{\sigma_a}(p+\rho v_z^2)\,d\sigma-p_n\sigma_a \tag{6}$$

При истечении из сопла без расширяющейся части в пренебрежении атмосферным давлением p_n формула (6) трансформируется в

$$T_*=\int_{\sigma_*}(p+\rho v_z^2)\,d\sigma \tag{7}$$

Для вычисления этого интеграла необходимо только знание распределения параметров в критическом сечении, которое дается формулами (3) и зависимостями фиг. 1. Отношение тяги винтового потока к тяге одномерного при неизменном давлении торможения p_t для сопла-очка равно

$$\left(\frac{T_r}{T_0}\right)_* = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \int_0^1 \left[1-\alpha_*^2 \frac{J_0^2(m_*\xi)+J_1^2(m_*\xi)}{J_1^2(m_*)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \times \left[1-\alpha_*^2 \frac{J_1^2(m_*\xi)-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}J_0^2(m_*\xi)}{J_1^2(m_*)}\right] \xi\, d\xi \tag{8}$$

Для малых α_* соотношения (5) и (8) принимают вид

$$\frac{G_r}{G_0} \simeq 1-\frac{\gamma+1}{4(\gamma-1)}\alpha_*^2, \qquad \left(\frac{T_r}{T_0}\right)_* \simeq 1-\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}\alpha_*^2$$

В [3] показано, что формулы (5) и (8) хорошо описывают экспериментальные данные по истечению вихревого закрученного потока из сопла без диффузора.

Расчет тяговых характеристик сопла со сверхзвуковой частью требует знания параметров потока в любом сечении по длине диффузора. В пределах квазиодномерного приближения распределения скоростей описываются формулами (3), где m параметрически зависит от $\xi_1=R(z)/R_*$. Параметрическую связь $m(\xi_1)$ можно найти, воспользовавшись условием сохранения потока массы в любом сечении. Если обозначить через $\Pi(m, \alpha_*, \xi_1)$ значение интеграла

$$\Pi(m, \alpha_*, \xi_1) = \frac{1}{\xi_1}\int_0^{\xi_1} \left[1-\frac{\alpha_*^2}{\xi_1^2}\frac{J_0^2(m\xi)+J_1^2(m\xi)}{J_1^2(m\xi_1)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{J_0(m\xi)}{J_1(m\xi_1)}\xi\, d\xi$$

то условие сохранения примет вид

$$\Pi(m, \alpha_*, \xi_1) = \Pi(m_*, \alpha_*, 1) \tag{9}$$

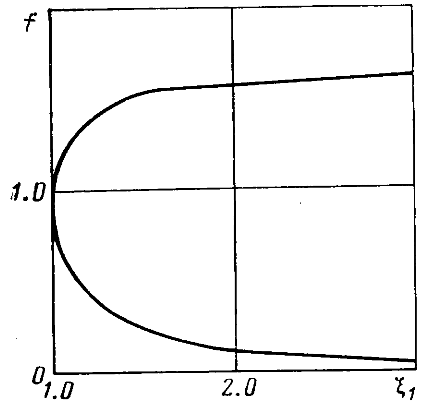
Численное решение (9) для частных примеров при $\gamma=1.25$ дает следующие соотношения $m(\xi_1)$ в диффузоре: для $\alpha_*=0.180$ при $\xi_1=1.0$, $m_*=1.07$; $\xi_1=1.5$, $m=0.258$; $\xi_1=2.0$, $m=0.129$; $\xi_1=2.5$, $m=0{,}078$; для $\alpha_*=0.275$ тем же значениям ξ_1 соответствуют $m=1.53$, 0.383, 0.193, 0.117; для $\alpha_*=0.35$ при $\xi_1=1.0$, 1.5 и 2.25, $m=1.75$, 0.468 и 0.183. Чтобы пояснить физический смысл зависимости $m(\xi_1)$, получим ее иным способом, воспользовавшись фундаментальным свойством винтового потока — постоянством отношения ρ/m вдоль каждой линии тока (это видно из равенства нулю якобиана в (1)). Так как в рассматриваемом приближении m не зависит от ξ, то запишем условие $\rho/m=\text{const}$ для осевой линии, где $v_\varphi=0$. Применяя (3) и выражение для плотности газа $\rho=\rho_+(1-\tilde{v}_\varphi^2-\tilde{v}_z^2)^{1/(\gamma-1)}$, получим

$$\xi_1^2 J_1^2(m\xi_1)\left\{1-\left(1-\frac{\alpha_*^2}{J_1^2(m_*)}\right)\left(\frac{m}{m_*}\right)^{\gamma-1}\right\} = \alpha_*^2$$

При малых α_* отсюда

$$f^2-\frac{2}{\gamma+1}f^{\gamma+1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi_1^{-4}, \qquad f=\frac{m}{m_*} \tag{10}$$

Вид функции $f(\xi_1)$ для $\gamma=1.25$ представлен на фиг. 2. Величина m/m_* неоднозначна при одних и тех же ξ_1. В области дозвуковых течений (в конфузоре) значение $f>1$, а после перехода через критическое сечение тем же ξ_1 соответствуют $f<1$. Так как $f=m/m_*=\rho/\rho_*(m/\rho=\mathrm{const}$ вдоль линии тока), то неоднозначность $f(\xi_1)$ означает, что при данном ξ_1 течению в конфузоре соответствуют бóльшие плотности газа, чем в диффузоре (поток разгоняется).

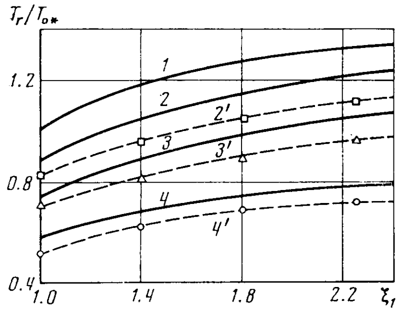


Фиг. 2

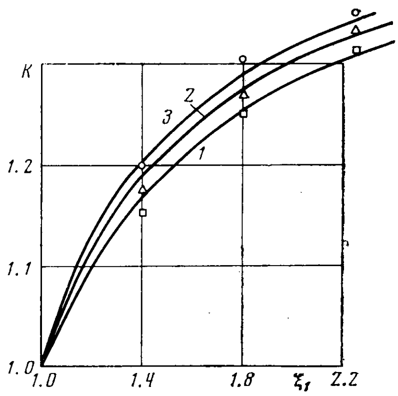
Сравнение (10) с расчетом зависимости $m(\xi_1)$ по закону сохранения массы показывает, что оба условия дают близкие результаты в сверхзвуковой части сопла, где $f<1$; в докритической области, где $f>1$, следует пользоваться более точным условием (9).

Совместное решение (9) и (6) для разных интенсивностей вращения α_* и степеней расширения ξ_1, сопла при $\gamma=1.25$ представлено на фиг. 3 (кривые *1—4* соответствуют $\alpha_*=0.18$, 0.275, 0.35). Видно, что тяга сверхзвукового сопла для винтового потока меньше тяги невращающегося газа с тем же p_t.

В одномерной теории эффективность работы диффузора принято оценивать величиной коэффициента реактивности сопла $K=T/T_*$ (T_* — тяга сопла-очка). Зависимость $K(\xi_1)$, рассчитанная по приведенным выше



Фиг. 3



Фиг. 4

формулам для $\gamma=1.25$ и $\alpha_*=0.18$, 0.275, 0.35 (кривые *1—3* соответственно), дана на фиг. 4.

Перераспределение давления в винтовом потоке вызывает увеличение статической составляющей тяги и повышает эффективность работы диффузора по сравнению с обычным течением. Этот вывод согласуется с данными работы [7], где изучалось потенциальное движение вращающегося газа.

Для проверки выводов теории были проведены эксперименты на соплах с конической сверхзвуковой частью при винтовом истечении закрученного потока газа с $\gamma=1.25$. Оказалось, что с увеличением интенсивности вращения α_* максимум тяги падает, а оптимальный угол 2β раскрытия диффузора увеличивается. Так, если для одномерного потока оптимум β лежит около $12°$, то при $\alpha_*=0.18$ $\beta\approx15°$, а при $\alpha_*=0.35$ $\beta\approx20°$ (для сопла с $\xi_1=2.25$).

Экспериментальные данные по величинам относительной тяги и коэффициента реактивности при истечении вращающегося газа из сопла с оптимальным (для данной интенсивности закрутки α_*) углом β конусности сверхзвуковой части представлены точками на фиг. 3 и 4. Расхождение квазиодномерной теории с экспериментом не превышает 10%.

Поступила 26 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черный Г. Г.* Закрученные течения сжимаемого газа в каналах. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
2. *Mager A.* Approximate Solution of Isentropic Swirling Flow Through a Nozzle. ARS J. 1961, No. 8.
3. *Гостинцев Ю. А.* Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
4. *Lewellen W. S., Burns W. J., Strickland H. J.* Transonic swirling flow. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7.
5. *Славянов Н. Н.* Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
6. *Гостинцев Ю. А., Успенский О. А.* О течении газа по соплу при ячеистой структуре вихревого потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
7. *Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д.* Увеличение тяги сопла вращением потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
8. *Рычков А. Д.* Расчет закрученного течения идеального газа в сопле Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
9. *Тилляева Н. И.* О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопел для неравномерных и закрученных течений. ЦИАМ, Техн. отчет, 1974, № 7284.