

ОБ ОБРАЗОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН ПРИ ВНЕЗАПНОМ
«ВКЛЮЧЕНИИ» ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Н. П. ИСАКОВА

(Москва)

Рассмотрена задача о возникновении ударной волны в одномерном потоке газа в случае, когда на некотором участке течения, начиная с момента времени $t=0$, газ подвергается внешнему силовому и тепловому воздействию. До момента $t=0$ течение стационарно, а внешние силы и источники энергии отсутствуют. Исследуются ситуации, для которых образование ударных волн связано с пересечением характеристик одноименного семейства с граничной характеристикой, отделяющей область невозмущенного (стационарного) потока от области нестационарного течения, возникшей в результате «включения» внешних воздействий.

Данная задача представляет интерес, в частности, в связи с исследованием начальной стадии эволюции течения в различных магнитогидродинамических устройствах. Ее решение может быть использовано для объяснения и более глубокого понимания результатов численного интегрирования (некоторые примеры подобных расчетов приведены в [1]) и «стационарного» анализа, который в ряде случаев (см. [2]) может быть применен для описания течения при «больших» t .

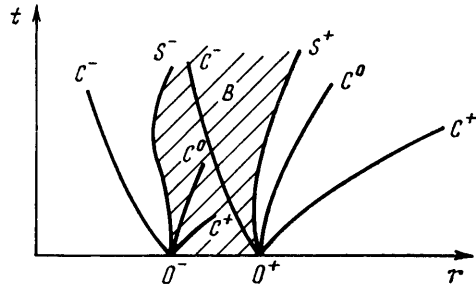
Выполненный анализ имеет много общего с рассмотрением вопроса о возникновении ударной волны при движении в газ поршня [3], хотя в последнем случае возмущающее воздействие является поверхностным, а не объемным. Решение проводится с использованием полухарактеристических переменных, которые при исследовании образования ударной волны в задаче о поршне в химически реагирующей смеси были применены в [4].

1. Будем рассматривать движение газа в канале, площадь поперечного сечения которого меняется достаточно плавно, так, чтобы изменением параметров в поперечном направлении можно было пренебречь и течение могло считаться одномерным. При $t < 0$, где t — время, в канале осуществлялось стационарное течение, при котором все параметры газа (скорость v , плотность ρ , давление p и т. д.) являются однозначными функциями координаты r , отсчитываемой вдоль оси канала.

Пусть в момент времени $t=0$ в некоторой части канала на газ начинают действовать внешняя сила f , параллельная оси r , и внешние источники (стоки) тепла интенсивности q , где f и q — произвольные заданные функции r , t и параметр потока. Границы области воздействия (снизу и сверху по потоку) в общем случае могут двигаться. «Включение» внешних воздействий приведет к возмущению исходного стационарного потока, в результате чего в нем могут возникнуть ударные волны, распространяющиеся вверх и вниз по течению. При достаточно малых t , пока ударные волны не образовались, область возмущенного (нестационарного) течения Ω в плоскости rt ограничена справа и слева C^+ - и C^- -характеристиками, а снизу осью r , как это показано на фиг. 1. Там же наряду с указанными характеристиками изображена C^0 -характеристика (траектория частиц) и заштрихованная область внешних воздействий B с границами S^+ и S^- . На фиг. 1 представлен случай, когда скорости движения S^+ и S^- таковы, что область B находится внутри области Ω . Кроме того, возможны ситуации, для которых некоторые участки границ B и Ω совпадают. Дальнейший анализ справедлив и в том случае, когда одной из границ

области Ω является кривая S^+ или S^- . При этом полученные далее формулы справедливы для противоположной границы Ω .

Поведение характеристик внутри области Ω определяется внешними воздействиями f и q . При определенном соотношении величин этих воздействий может иметь место пересечение характеристик одноименного семейства, которое определит место и время образования ударных волн. Одной из возможностей проследить за образованием ударных волн является определение первой точки пересечения на «граничных» характеристиках C^+ и C^- . Естественно, что ударные волны, образующиеся на этих характеристиках, не исчерпывают всех волн, которые могут образоваться в потоке. Тем не менее найденные таким путем связи между возмущающими факторами и начальными параметрами, с одной стороны, и местом и временем возникновения ударных волн на границах возмущенной области — с другой могут дать весьма ценную информацию при исследовании всего течения. Так, например, можно будет сказать, при каких f и q в потоке будут наверняка присутствовать ударные волны. Подобного рода исследование проводится ниже.



Фиг. 1

2. Уравнения, описывающие нестационарное одномерное течение вязкого нетеплопроводного газа, имеют вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} &= \rho v \frac{d \ln F(r)}{dr}, & \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= f \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial t} - v \frac{\partial p}{\partial r} &= q \end{aligned}$$

Здесь $F(r)$ — площадь поперечного сечения канала, а h — удельная энтальпия газа — известная функция p и ρ .

На C^+ - и C^- -характеристиках $dr/dt = v \pm a$, где $a = [\rho h_p / (1 - \rho h_p)]^{1/2}$ — скорость звука, $h_p = (\partial h / \partial p)_p$, $h_p = (\partial h / \partial p)_p$, верхний (нижний) знак отвечает C^+ (C^-)-характеристикам. Вдоль траекторий частиц (C^0 -характеристик) $dr/dt = v$. В соответствии с этим (2.1) можно записать в характеристической форме

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{d^\pm p}{dt} \pm a \rho \frac{d^\pm v}{dt} &= -a^2 \left(\rho v \frac{d \ln F}{dr} + q \right) \pm a f & \left(\frac{d^\pm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \pm a) \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ \frac{d^0 \rho}{dt} &= \frac{1}{a^2} \frac{d^0 p}{dt} + \frac{q}{\rho h_p} & \left(\frac{d^0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

Как и в [4], дальнейшие исследования удобно вести в полухарактеристических переменных $r \xi^i$, где ξ^1 и ξ^2 постоянны соответственно на C^+ - и C^- -характеристиках, т. е.

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial t} + (v \pm a) \frac{\partial \xi^i}{\partial r} = 0$$

Здесь и ниже $i=1$ отвечает верхний знак, а $i=2$ — нижний. Далее переменные $r\xi^1$ используются при рассмотрении течения вблизи правой границы области $\Omega - C^+$ -характеристики, а переменные $r\xi^2$ — вблизи ее левой границы — C^- -характеристики.

Если ψ — любая из функций p, ρ, v, \dots , то преобразование к новым переменным осуществляется по формулам

$$(2.3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \psi_r - \frac{\psi_{\xi}}{(v \pm a)t_{\xi}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi_{\xi}}{t_{\xi}}, \quad t_r = \frac{1}{(v \pm a)}$$

$$\psi_{\xi} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi^i} \right)_r, \quad \psi_r = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{\xi^i}, \quad t_{\xi} = \left(\frac{\partial t}{\partial \xi^i} \right)_r$$

Прделав необходимые преобразования, из (2.2) получим следующие уравнения:

$$(2.4) \quad (v \pm a)p_r \pm a\rho(v \pm a)v_r = -a^2 \left(\rho v \frac{d \ln F}{dr} + \frac{q}{\rho h_p} \right) \pm af$$

$$a^2 \rho v_{\xi} \mp a p_{\xi} + a \rho v (a \pm v) t_{\xi} v_r + a (a \pm v) t_{\xi} p_r = af (a \pm v) t_{\xi}$$

$$a^3 \rho_{\xi} + a^2 v (a \pm v) t_{\xi} \rho_r - a p_{\xi} - v (a \pm v) t_{\xi} p_r = \frac{q}{\rho h_p} a^2 (a \pm v) t_{\xi}$$

Поскольку при пересечении характеристик теряется однозначность проделанного нами преобразования независимых переменных, то точку пересечения можно найти из условия обращения в нуль якобиана преобразования переменных, т. е.

$$\frac{D(r, t)}{D(r, \xi^i)} \equiv t_{\xi} = 0$$

Заметим, что так как на характеристиках параметры газа непрерывны, то производные по r при переходе через любую характеристику соответствующего семейства не изменяются, а производные по ξ могут иметь разрыв.

Уравнения, описывающие стационарный поток и связывающие параметры вне области Ω и ее граничных характеристиках C^+ и C^- , получаются из (2.4), если во втором и третьем уравнениях этой системы выполнить деление на t_{ξ} , а затем опустить члены, пропорциональные t_{ξ}^{-1} . Последнее следует из того, что в согласии с формулами перехода к полухарактеристическим переменным $\partial \psi / \partial t = \psi_{\xi} / t_{\xi}$. Таким образом, стационарное течение описывается уравнениями

$$(2.5) \quad (v \pm a)p_r \pm a\rho(v \pm a)v_r = -a^2 \rho v \varphi(r)$$

$$a^2 \rho_r - p_r = 0, \quad \rho v v_r + p_r = 0 \quad (\varphi(r) \equiv d \ln F(r) / dr)$$

Система (2.5) после несложных преобразований приводится к виду

$$(2.6) \quad p_r = - \frac{a^2 \rho v \varphi}{(v^2 - a^2)}, \quad \rho_r = - \frac{\rho v^2 \varphi}{(v^2 - a^2)}, \quad v_r = \frac{a^2 v \varphi}{(v^2 - a^2)},$$

$$a_r = - \frac{\rho v^2 \varphi}{(v^2 - a^2)} \theta \quad (\theta = a_p a^2 + a_p)$$

Система нестационарных уравнений (2.3) и (2.4), описывающая течение в области Ω (между граничными характеристиками) и уравнения (2.6), выполняющиеся вне указанной области, на ее границах, а также на оси r , т. е. при $t=0$, позволяет определить производные по ξ вдоль

обеих граничных характеристик (по ξ^1 на C^+ и по ξ^2 на C^-). При этом, пользуясь произволом в определении ξ^i , определим их так, чтобы $\xi^i=0$ на правой граничной характеристике C^+ , $\xi^2=0$ — на левой граничной характеристике C^- , а над ними ξ^1 и ξ^2 были положительны. Тогда, учитывая непрерывность производных по r на указанных характеристиках, отсутствие внешних воздействий вне области B и используя формулы (2.6), из второго и третьего уравнений (2.4) получим, что при $\xi^i=+0$

$$(2.7) \quad \rho_{\xi} = \frac{1}{a^2} p_{\xi}, \quad v_{\xi} = \pm \frac{1}{a\rho} p_{\xi}, \quad a_{\xi} = \frac{\theta}{a^2} p_{\xi}$$

В согласии со сказанным выше, для определения точки пересечения характеристик на границе области Ω необходимо знать t_{ξ} как функцию r при $\xi^i=+0$. Дифференциальное уравнение, определяющее t_{ξ} на правой (левой) граничной характеристике, получается путем дифференцирования (2.3) по ξ и последующего использования выражения для v_{ξ} и a_{ξ} из (2.7). В результате получим, что при $\xi^i=+0$.

$$(2.8) \quad t_{\xi,r} = \mp \frac{\alpha}{(v \pm a)^2} p_{\xi} \quad \left(\alpha = \frac{a + \rho\theta}{a^2\rho} \right)$$

где θ — термодинамическая функция, уже использованная в (2.6).

Заметим, что во всех соотношениях, имеющих место при $\xi^i=+0$, параметры газа — известные функции r , описывающие стационарное течение.

Как видно из (2.8), характер изменения t_{ξ} вдоль граничных характеристик определяется функцией p_{ξ} , т. е. распределением давления в непосредственной окрестности граничной характеристики. Для определения p_{ξ} продифференцируем второе уравнение из (2.4) по r , а первое уравнение по ξ . Далее, используя соотношения (2.6) и (2.7) и исключая $v_{\xi,r}$, получим, что p_{ξ} при $\xi^i=+0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$p_{\xi,r} = -\lambda(r) p_{\xi} \quad \left(\lambda(r) = \frac{\varphi[2av^2(v \pm a) + a^3(v \mp a) + \rho v^2\theta(3v \pm a)]}{2a(v^2 - a^2)(v \pm a)} \right)$$

Решая это уравнение, найдем

$$(2.9) \quad p_{\xi} = p_{\xi_0} \exp \left(- \int_{r_0}^r \lambda dz \right)$$

Здесь и далее нижний индекс нуль приписывается параметрам на начальной характеристике в точке ее пересечения с осью t , т. е. в точке O^+ или O^- .

В соответствии с формулами перехода к полухарактеристическим переменным $p_{\xi_0} = (\partial p / \partial t)_{0,t_{\xi_0}}$, где t_{ξ_0} определяется выбором переменной ξ^i . Последний весьма произволен и несуществен для дальнейшего анализа. Важно лишь то, что $t_{\xi_0} = 0$. Подставляя p_{ξ} из (2.9) в (2.8), интегрируя это уравнение и учитывая сказанное выше, найдем, что при $\xi^i=+0$

$$\frac{t_{\xi}}{t_{\xi_0}} = 1 \mp \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_0 \Phi(r_0, r) \quad \left(\Phi(r_0, r) = \int_{r_0}^r \frac{\alpha}{(v \pm a)^2} \exp \left(- \int_{r_0}^{\eta} \lambda dz \right) d\eta \right)$$

Как ранее указывалось, что в точке $r=r_*$, $\xi^i=+0$, в которой одноименные характеристики пересекаются с граничной характеристикой, $t_{\xi}=0$ и, следовательно, в силу предыдущей формулы

$$(2.10) \quad 1 \mp \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_0 \Phi(r_0, r_*) = 0$$

Данное равенство определяет координату r_* точки возникновения ударной волны. Момент пересечения характеристик дается соотношением

$$t_* - t_0 = \int_{r_0}^{r_*} \frac{d\eta}{(v \pm a)}$$

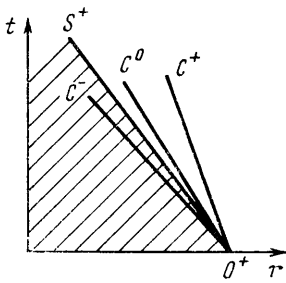
Здесь, как и ранее, все параметры берутся при $\xi^i = +0$, а верхний (нижний) знак отвечает правой (левой) граничной характеристике.

Можно показать, что

$$\alpha = \frac{1}{2\rho^2 a^3} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \right),$$

где $\omega = 1/\rho$ — удельный объем, а s — удельная энтропия. Поэтому для всех известных газов α , как и $(\partial^2 \omega / \partial p^2)_s$, положительно. Следовательно, если

$r_* > r_0$, то функция $\Phi(r_0, r_*)$, стоящая множителем при $(\partial p / \partial t)_0$ в (2.10), положительна, а при $r_* < r_0$ — отрицательна. Из сказанного ясно, что если, например, наклон правой границы области Ω в плоскости rt положителен, ($v + a > 0$), то возникновение скачка имеет место при $(\partial p / \partial t)_0 > 0$, т. е. когда характеристики первого семейства образуют волну сжатия. Если поток движется влево ($v < 0$) и, кроме того, $|v| > a$, $V < 0$ и $|V| > |v + a|$, то, как это видно из фиг. 2, отвечающей этому случаю, имеем $r_* < r_0$. Следовательно, здесь возникновение ударной волны возможно, если слева от граничной C^+ -характеристики $(\partial p / \partial t)_0 < 0$, что на первый взгляд кажется неожиданным. На самом деле, учитывая



Фиг. 2

отрицательный наклон C^+ -характеристик, нетрудно сообразить, что неравенство $(\partial p / \partial t)_0 < 0$ в данном случае означает, что C^+ -характеристикам, покинувшим область B в более поздний момент времени, соответствует более высокое давление, т. е. опять слева к граничной характеристике примыкает волна сжатия. Сказанное, разумеется, справедливо и для левой границы области Ω . Отметим, что данная ситуация аналогична той, которая имеет место в классической задаче о поршне.

Перейдем к выводу формул, связывающих $(\partial p / \partial t)_0$ с внешними воздействиями f и q в окрестности точки пересечения граничной характеристики с осью.

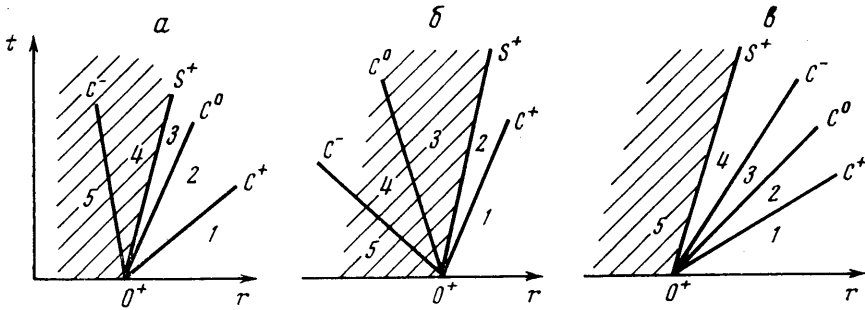
3. Способ получения указанных формул продемонстрируем на случае, представленном на фиг. 3, *a*, на которой изображена малая окрестность точки 0^+ . В силу малости указанной области все параметры потока в ней близки к постоянным, а отрезки характеристик и границы S^+ — близки к прямым. В случае, представленном на фиг. 3, *a*, скорость V правой границы области воздействия S^+ положительна и такова, что $v - a < V < v$.

В соответствии со свойствами системы (2.4) производные параметров по t и по r могут рваться при переходе через характеристики C^+ , C^0 и C^- и через границы области B , на которых рвутся f и q , входящие в эту систему. При этом производные вдоль всех перечисленных линий, как и сами параметры потока, сохраняют непрерывность (исключение составляет особый случай совпадения линии S^+ с одной из характеристик, который в дальнейшем не рассматривается). Приишем производным в областях 1—5 соответствующие нижние индексы (указанные производные в каждой такой области близки к постоянным). Тогда под $(\partial p / \partial t)_0$, которая

фигурировала выше, понимается $(\partial p/\partial t)_2$. На основании сказанного и того, что при $t < 0$ течение стационарно, а $f=q=0$, из уравнений (2.2) нетрудно получить выражение для производных по t в области 5

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_5 &= -a^2 K, & \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_5 &= \frac{1}{\rho} f \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_5 &= \frac{q}{\rho h_p} + aK & \left(K &= \frac{q}{\rho h_p} + \rho v \varphi(r)\right) \end{aligned}$$

При переходе через характеристику C^- из области 5 в область 4 производные могут иметь разрыв. Используя условие непрерывности полных



Фиг. 3

производных от p , ρ и v вдоль характеристики C^- , а также условия, выполняющиеся на характеристиках C^0 и C^+ из (2.2), получим следующие соотношения:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_4 + (v-a) \left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]_4 &= 0, & \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]_4 + (v-a) \left[\frac{\partial \rho}{\partial r}\right]_4 &= 0, \\ \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_4 + (v-a) \left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]_4 &= 0 \\ \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]_4 + v \left[\frac{\partial \rho}{\partial r}\right]_4 - \frac{1}{a^2} \left(\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_4 + v \left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]_4 \right) &= 0 \\ \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_4 + (v+a) \left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]_4 + a\rho \left(\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_4 + (v+a) \left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]_4 \right) &= 0 \\ \left[\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]_i &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_i - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{i+1}, & \left[\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_i &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_i - \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{i+1} \end{aligned}$$

Здесь ψ — любая из функций p , ρ и v .

Система из пяти уравнений (3.2) с учетом (3.1) позволяет выразить разрывы пяти производных через один из таких разрывов, например, через $[\partial p/\partial r]_4$. Рассуждая аналогично и рассматривая последовательно разрывы на каждой из характеристик и на линии S^+ , получим выражения для всех разрывов производных. В эти выражения будут входить внешние воздействия f и q и скачки трех производных: $[\partial p/\partial r]_4$, $[\partial \rho/\partial r]_2$ и $[\partial p/\partial r]_1$.

Производные по r от любого параметра в областях 5 и 1 равны своим стационарным значениям и поэтому совпадают. Следовательно, суммарное значение всех разрывов производных по r от каждой из величин p , ρ и v

равно нулю. Получающиеся отсюда условия однозначно определяют три перечисленные выше величины: $[\partial p/\partial r]_i$, $[\partial p/\partial r]_2$ и $[\partial p/\partial r]_1$. В частности, оказывается, что

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right]_1 &= -\frac{(v+a)(fa+\beta q)}{2(v-V+a)}, \\ \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right]_i &= -\frac{(v-a)(fa-\beta q)}{2(v-V-a)}, \quad \left(\beta = -\frac{a}{\rho h_p} \right) \end{aligned}$$

Выше рассмотрен случай, когда линия S^+ лежит между C^- и C^0 -характеристиками. Кроме этой возможны и другие ситуации, изображенные на фиг. 3, $a-v$, которые отвечают правой границе области Ω (аналогичные случаи возможны на левой ее границе). Так же, как и раньше, в зависимости от соотношения скоростей v и V линия S^+ может попадать между C^+ и C^0 или между C^- и C^0 . Отметим, что неисследованный в данной работе случай, когда линия S^+ располагается правее характеристик всех трех семейств, реализуется при выполнении неравенства $v+a < V$.

Как показывает анализ, формулы (3.3) справедливы во всех случаях, изображенных на фиг. 3, $a-v$. Соответствующие формулы для случаев, относящихся к левой границе области Ω , получаются из (3.3) изменением знаков перед правыми частями. При этом, как и выше, области течения нумеруются против часовой стрелки, в силу чего для указанных случаев $(\partial p/\partial t)_0 = (\partial p/\partial t)_i$. Наконец, так как вне области Ω течение стационарно, то в силу сказанного для правой границы Ω имеем $(\partial p/\partial t)_0 = -[\partial p/\partial t]_1$, а для ее левой границы $(\partial p/\partial t)_0 = [\partial p/\partial t]_i$. Таким образом, с учетом (3.3)

$$(3.4) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_0 = \pm \frac{(v \pm a)(fa \pm \beta q)}{2[(v-V) \pm a]}$$

где верхние (нижние) знаки отвечают правой (левой) границы области Ω .

4. В п. 2 были установлены условия пересечения правой граничной характеристики с характеристиками того же семейства. Эти условия имеют вид

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_0 > 0 \quad (v+a > 0), \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_0 < 0 \quad (v+a < 0)$$

Отсюда, учитывая выражение для $(\partial p/\partial t)_0$ из (3.3), можно получить, что если

$$(4.1) \quad fa + \beta q > 0$$

то к правой границе области Ω примыкают волны сжатия, приводящие к пересечению характеристик первого семейства, т. е. к образованию ударной волны. При $fa + \beta q = 0$ точка пересечения одноименных характеристик первого семейства с правой граничной характеристикой отвечает такому значению $r=r_*$, при котором $\Phi(r_0, r_*) = \infty$. Как следует из вида функции $\Phi(r_0, r_*)$, это может иметь место либо при $r_* = \infty$, либо при таком r_* , для которого $v = -a$. Последнее соответствует критическому сечению канала в случае потока, текущего справа налево ($v < 0$), и реализуется лишь при таком распределении стационарных параметров, которое обеспечивает расходимость соответствующего интеграла. Напротив, при выполнении неравенства

$$(4.2) \quad fa + \beta q < 0$$

к правой границе области Ω примыкает волна разрежения и ударная волна не образуется.

Аналогичным образом для левой границы области Ω можно показать, что ударная волна образуется, если $(-fa + \beta q) > 0$, и не образуется, если $(-fa + \beta q) < 0$. Отметим, что обычно β положительно (например, для совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей κ имеем $\beta = \kappa - 1$). Тогда из полученных выше неравенств следует, что подвод тепла и сила, направленная со стороны области B к соответствующей внешней границе (т. е. $f > 0$ — для правой граничной характеристики и $f < 0$ — для левой), способствуют возникновению ударной волны в точке указанной границы. В соответствии с этим при $q > 0$ и $f > 0$ на правой границе области Ω ударная волна возникает в любом случае, а на левой — при достаточно больших q , когда $q > fa/\beta$. Если $q > 0$, а f отрицательна, то ударная волна обязательно образуется на левой граничной характеристике. На правой граничной характеристике для возникновения ударной волны в таком случае необходимо, чтобы $q > |f|a/\beta$. Аналогичные условия нетрудно сформулировать при наличии отвода тепла ($q < 0$). В частности, интенсивный отвод тепла ($|q| > |f|a/\beta$) предотвращает образование ударных волн на обеих характеристиках, ограничивающих область возмущенного течения.

5. Как следует из сказанного выше, проверка неравенств (4.1) и (4.2) или их аналогов для левой границы Ω позволяет решить вопрос о наличии или отсутствии точки пересечения характеристик на соответствующей границе. Если такое пересечение имеет место, то координата точки пересечения r_* определяется равенством (2.10), в котором $(\partial p/\partial t)_0$ вычисляется в согласии с (3.4), а функция $\Phi(r_0, r_*)$ определяется распределением параметров стационарного потока и может быть всегда найдена. Рассмотрим некоторые частные случаи, для которых вычисление указанной функции, а следовательно, и r_* оказывается особенно простым.

Пусть сечение канала постоянно, тогда постоянны и не зависят от r все параметры стационарного потока, а $\lambda \sim \Phi = 0$. В этом случае

$$\Phi(r_0, r_*) = \frac{\alpha}{(v \pm a)^2} (r_* - r_0)$$

Поэтому координата и время возникновения скачка даются равенствами

$$r_* = r_0 \pm \frac{(v \pm a)^2}{\alpha(\partial p/\partial t)_0}, \quad t_* = t_0 \pm \frac{(v \pm a)}{\alpha(\partial p/\partial t)_0}$$

Указанный случай может реализоваться при включении МГД-генератора с каналом постоянного сечения. Если в момент t_0 на некотором участке канала с расстоянием между электродами d включается постоянное по r магнитное поле B , то для совершенного газа формула для координаты скачка сводится к

$$r_* = r_0 \pm \frac{(M \pm 1)^2}{(\kappa + 1)M^2N(1-K)[M(\kappa - 1)(1-K) \mp 1]}$$

Здесь r отнесено к d ; $M = v/a$ — число Маха, N — параметр МГД-взаимодействия, вычисленный по параметрам стационарного течения и размеру d , а K — параметр нагрузки (для МГД-генератора $0 < K < 1$). На начальной стадии развития течения при сверхзвуковых скоростях ($M > 1$) образование скачка справа от области взаимодействия происходит при $M(\kappa - 1)(1 - K) > 1$, для дозвуковых скоростей ($M < 1$) образование скачка на левой границе области взаимодействия имеет место в любом случае.

Пусть теперь для участка канала, заключенного между сечениями $r = r_0$ и $r = r_*$ скорость потока v много меньше скорости звука, т. е. $v \ll a$. Тогда с погрешностью порядка M^2 все термодинамические переменные постоянны, а $\lambda = \Phi(r)/2 + O(M)$. Пре-

небрегая далее величинами порядка $O(M)$, где $M \ll 1$, найдем, что в этом случае

$$(5.1) \quad \Phi(r_0, r_*) = \frac{\alpha}{a^2} \int_{r_0}^{r_*} \left(\frac{F_0}{F} \right)^{1/2} d\eta.$$

Для течения с осевой ($\nu=1$) и центральной ($\nu=2$) симметрий $F=F_0(r/r_0)^\nu$, и в согласии с (5.1) координата точки пересечения характеристик находится из равенств

$$(5.2) \quad 1 \mp 2 \frac{\alpha}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_0 [(r_0 r_*)^{1/2} - r_0] = 0, \quad 1 \mp \frac{\alpha}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_0 r_0 \ln \frac{r_*}{r_0} = 0$$

Отметим, что для покоящегося газа ($\nu=0$) соотношения (5.1) и (5.2) являются точными.

Пусть, наконец, на соответствующем отрезке канала реализуется гиперзвуковое течение совершенного газа. При этом $M \gg 1$, $\nu = \nu_{\max} + O(M^{-2})$, где ν_{\max} — максимальная скорость потока, а

$$\lambda = \sigma \frac{d \ln F}{dr} + O\left(\frac{1}{M}\right)$$

где $\sigma = (1+3\kappa)/4$. С учетом данного равенства, пренебрегая величинами порядка $1/M$, для течения с осевой и центральной симметрией, когда $F=F_0(r/r_0)^\nu$, найдем, что координата точки пересечения характеристик определяется уравнением

$$1 \mp \frac{\alpha}{\nu_{\max}} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_0 \frac{1}{(\nu\sigma+1)} [(r_0/r_*)^{\nu\sigma+1} - 1] = 0$$

Напомним, что во всех приведенных формулах верхний (нижний) знак отвечает правой (левой) граничной характеристике области возмущенного течения.

В заключение автор благодарит А. Н. Крайко за полезные советы.

Поступила 17 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Steinolfson R. S.* Shock formation by a moving force field. *AIAA Journal*, 1973, vol. 11, No. 8.
2. *Steinolfson R. S.* Steady-state interactions in plasma accelerators. *AIAA Paper*, 1972, No. 72-413.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. *Крайко А. Н.* О возникновении ударных волн при неравновесных течениях. *ПММ*, 1967, т. 31, вып. 5.