

УДК 533.6.011.5

**ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ И ПОТОКА
ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ**

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, Л. И. ТУРЧАК, А. С. ХОЛОДОВ

(*Москва*)

Для исследования течения около тела, совершающего колебания с малой амплитудой, можно использовать метод аэродинамических производных [1–3]. Характеристики течения представляются в виде функций, которые определяются из решения линеаризованных уравнений газовой динамики и с достаточной степенью точности описывают картину течения.

Данная статья посвящена обсуждению результатов решения общей нестационарной задачи в нелинейной постановке. В качестве примеров рассмотрены сверхзвуковые течения около полусферы и цилиндрического торца, совершающих произвольные гармонические колебания вдоль оси симметрии или испытывающих воздействие соответствующих пульсаций потока (турбулентной атмосферы).

Показано влияние учета нелинейности на картину течений при различных числах Струхalia. Проведено сравнение с результатами линейной теории и с данными, полученными при решении соответствующих стационарных задач. Решение проведено с помощью сеточно-характеристического метода в виде [4].

1. Постановка задачи о неустановившемся обтекании тел. Нестационарный поток идеального газа набегает со сверхзвуковой скоростью на тело, поверхность и закон движения которого известны в каждый момент времени. Требуется найти параметры течения в ударном слое, ограниченном поверхностью тела и образовавшейся головной ударной волной, положение которой подлежит определению в процессе решения задачи.

Осесимметричное течение газа в ударном слое описывается системой уравнений нестационарной газовой динамики, состоящей из уравнений неразрывности, движения, энергии и состояния, которую в связанной с телом сферической системе координат (фиг. 1) можно записать в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} + A_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} = \mathbf{F}$$

$$(1.2) \quad \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0, \quad \rho = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{h}$$

$$A_1 = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} u & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} v & 0 & \alpha_1 \\ 0 & v & 0 \\ \alpha_2 & 0 & v \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \ln p, \quad U_2 = u, \quad U_3 = v, \quad \alpha_1 = \rho a^2 / p, \quad \alpha_2 = p / \rho, \quad a^2 = (\kappa - 1) h$$

$$F_1 = -\alpha_1 (\partial u / \partial \theta + 2v) / r \quad (\theta = 0), \quad F_2 = -\alpha_1 (u \operatorname{ctg} \theta + 2v) / r \quad (\theta > 0)$$

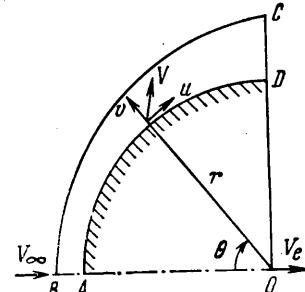
$$F_3 = -\frac{uv}{r} - \frac{\partial V_e}{\partial t} \sin \theta, \quad F_4 = \frac{u^2}{r} + \frac{\partial V_e}{\partial t} \cos \theta$$

Здесь u, v, V_e, a — компоненты относительной скорости газа, переносная скорость тела и скорость звука, отнесенные к некоторому характерному значению V_* ; ρ, p, h — плотность, давление и энталпия газа, отнесенные к параметрам $\rho_*, p_*, V_*^2, V_*^2$; время t отнесено к величине L_*/V_* , где L_* — характерный линейный размер.

Границные условия задаются на ударной волне и поверхности тела. При переходе через скачок уплотнения параметры течения подчиняются условиям сохранения касательной составляющей скорости, потока массы, импульса и энергии, из которых можно найти величины искомых функций за ударной волной

$$(1.3) \quad \begin{aligned} p_1 &= p_\infty + \rho_\infty (1-k) N^2, \\ h_1 &= h_\infty + (1-k^2) N^2 / 2 \\ u_1 &= u_\infty - u_e (1-k) N q_1 / Q_1, \\ v_1 &= v_\infty - v_e - (1-k) N / Q_1 \\ k &= \rho_\infty / \rho_1, \quad \rho_1 = \kappa p_1 / (\kappa - 1) h_1, \\ q_1 &= r_{1\theta}' / r_1, \quad Q_1 = \sqrt{1+q_1^2} \end{aligned}$$

$$N = (\mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_e) \mathbf{n}_1 - r_{1\theta}' / Q_1, \quad \mathbf{n}_1 = \{q_1 / Q_1, 1 / Q_1\}$$



Фиг. 1

Здесь и в дальнейшем индексом 1 отмечены величины, вычисленные на ударной волне, 0 — на поверхности тела; N — скорость ударной волны в направлении ее нормали n_1 .

Условия непротекания на теле и симметрии течения при $\theta=0$ записываются в виде

$$(1.4) \quad v_0 - \frac{u_0}{r} \frac{\partial r_0}{\partial \theta} = \frac{\partial r_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad u=0, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$$

Замыкающая область интегрирования линия CD (фиг. 1) целиком находится в сверхзвуковой области течения, и нормальная к линии CD составляющая скорости в каждой ее точке больше местной скорости звука. Здесь в качестве такой линии выбран луч $\theta=\pi/2$.

Начальные условия задаются при $t=0$ в каждой расчетной точке области интегрирования

$$(1.5) \quad p=p^\circ(r, \theta), \quad u=u^\circ(r, \theta), \quad v=v^\circ(r, t), \quad h=h^\circ(r, \theta)$$

При $t>0$ считаются известными параметры газа перед ударной волной, уравнение поверхности тела и закон его движения

$$(1.6) \quad \begin{aligned} p &= p_\infty(t), \quad V = V_\infty(t), \quad \rho = \rho_\infty(t), \quad h = h_\infty(t) \\ r_0 &= r_0(\theta, t), \quad V_e = V_e(t) \end{aligned}$$

В результате решения задачи (1.1) — (1.6) должны быть найдены параметры p, u, v, h в ударном слое как функции переменных r, θ, t , а также положение головной ударной волны.

2. О методике решения задачи. Система уравнений (1.1) является гиперболической, поэтому для ее решения может быть использован один из численных методов, использующих характеристики [5].

В данной работе использован сеточно-характеристический метод (СХ-метод) в виде, описанном в [4]. СХ-метод сохраняет основные преимущества метода характеристик и вместе с тем обладает удобством метода сеток — заранее фиксированными расчетными узлами. Основная идея метода состоит в том, что для каждой элементарной ячейки разностной сетки записываются разностные аппроксимации характеристических соотношений. Для вычисления параметров в промежуточных точках используется интерполяция по их значениям в соседних узлах сетки. Уравнение

энергии (1.2) записывается вдоль траектории частиц. Соответствующие разностные уравнения и рабочие формулы здесь не приводятся ввиду их громоздкости (см. [4, 6]). Вводится переменная $\xi = (r - r_0)/\epsilon$, где $\epsilon = r_1 - r_0$ — отход волны. Прямоугольная область $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ разбивается на равные прямоугольные ячейки. Шаг по времени выбирается в зависимости от размеров координатной сетки и градиентов искомых параметров. Решение ищется для момента времени $t = t_{n+1}$ по известным значениям параметров течения на предыдущем временном слое ($t = t_n$). Динамические параметры p , u , v находятся в узлах сетки из основной разностной системы уравнений. Их значения используются для нахождения энталпии из уравнения энергии.

Для нахождения положения ударной волны и параметров газа за ней используются условие совместности вдоль одной из характеристик и некоторые геометрические соотношения [7]. Нелинейная система уравнений (1.3) решается итерационным способом типа метода Ньютона.

В качестве начальных условий при решении общей нестационарной задачи обычно берется стационарное решение при не зависящих от времени определяющих параметрах задачи, найденное методом установления. Для периодических возмущений параметров задачи стационарное решение находится для средних их значений, относительно которых происходят колебания.

3. Результаты расчетов. Рассмотрены продольные гармонические колебания сферы и цилиндрического торца, а также соответствующие колебания потока относительно тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью $V_0 = \text{const}$. Характерными параметрами задачи служат радиус сферы или цилиндра, плотность газа в набегающем потоке и среднее значение скорости V_0 , относительно которого могут совершаться колебания. С учетом выбранных размерных величин безразмерные параметры газа можно представить в виде

$$(3.1) \quad \rho_\infty = 1, \quad \rho_\infty = 1/\kappa M_0^2, \quad h_\infty = 1/(\kappa - 1) M_0^2, \quad \kappa = 1.4$$

Рассмотрены задачи о колебаниях набегающего потока и тела

$$(3.2) \quad V_\infty = 1 - A \cos 2\pi t/T, \quad V_e = A \cos 2\pi t/T$$

Здесь A , T — амплитуда и период колебаний (безразмерные).

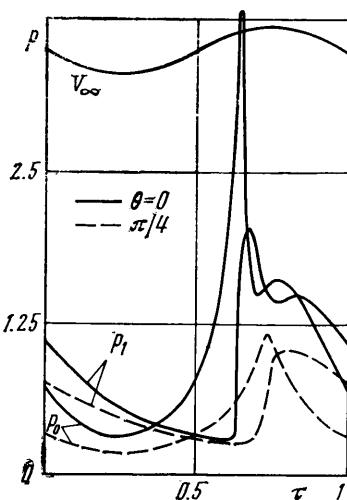
Основные расчеты проведены для средних значений числа Маха $M_0 = 10$ и 2, $A = 0.31$ и разных T .

В результате серии методических расчетов установлены рациональные величины шагов: обычно для сферы $\Delta\xi = 0.2$, $\Delta\theta = \pi/20$; для торца $\Delta\xi = 0.1$, $\Delta\theta = \pi/40$. Однако при существенно нестационарных процессах (в частности, при больших частотах колебаний), когда возникают пики давления и резкие изменения его поперек ударного слоя, могут потребоваться меньшие значения шагов разностной сетки. С целью уточнения предельных значений давления, а также для более детального изучения течения в ударном слое, при $T = 5/3$, рассматривались $\Delta\xi = 0.1$ и 0.05 для сферы ($M_0 = 10$). Наблюдается практическая сходимость для максимальных значений давлений (при количестве шагов поперек ударного слоя 5, 10, 20 максимальное давление было 3.0, 3.6, 3.8). Влияние параметров разностной сетки на величину давления вне областей резкого изменения, а также на остальные параметры незначительно.

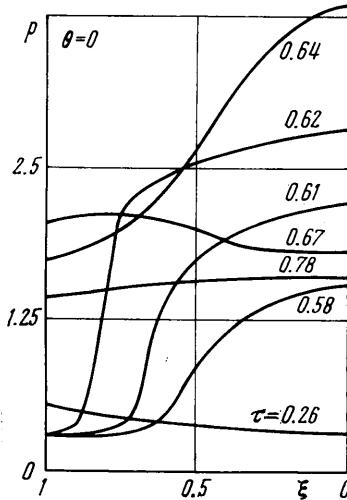
На фиг. 2 представлены некоторые результаты расчета обтекания колеблющейся сферы. В распределении давления на ударной волне p_1 и поверхности тела p_0 для одного периода имеют место области резких изменений. По отмеченной сверху относительной скорости потока и шара, которая равна $1 - V_e$, можно судить о режиме движения. Отнесенное к периоду колебаний сферы нормализованное время τ выбрано так, что при $\tau = 0$ тело неподвижно, поток движется с $M_\infty = 10$; затем происходит увеличение скорости V_e до максимального значения при $\tau = 0.25$, а скорость потока относительно тела здесь имеет минимум ($M_\infty = 6.9$). На этом участке дав-

ление на теле уменьшается и остается меньше его величины на ударной волне. Имеет место разрежение вблизи поверхности тела. При $0.25 \leq \tau \leq 0.5$ скорость тела падает до нуля, давление на его поверхности возрастает.

В точке $\tau=0.5$ скорость тела меняет знак и достигает максимума при $\tau=0.75$, а скорость потока относительно тела при этом соответственно возрастает. Если тело при разгоне достигает местной сверхзвуковой скорости,— а в данном случае это имеет место,— волна сжатия, появившаяся на



Фиг. 2



Фиг. 3

поверхности тела при его разгоне, переходит в ударную волну, которая распространяется по ударному слою и вскоре достигает головной ударной волны, давление на которой резко возрастает. Затем слабая волна разгрузки, отразившись от головного скачка, достигает тела. Наблюдаемый при $\tau \approx 0.75$ второй максимум давления соответствует минимальному отходу и наибольшей скорости потока относительно тела ($M=13.1$).

Из приведенных на фиг. 2 пунктирных линий следует, что вниз по потоку отмеченные эффекты уменьшаются.

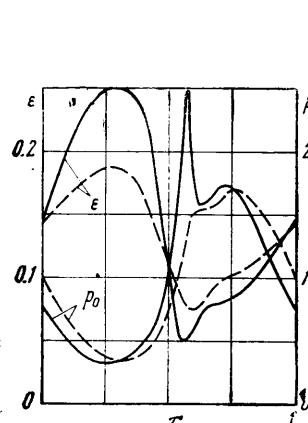
На фиг. 3 показано изменение давления поперек ударного слоя на оси симметрии от ударной волны ($\xi=1$) до точки торможения ($\xi=0$) в разные моменты времени для одного периода. Здесь наблюдается формирование внутренней ударной волны и ее перемещение в сторону головного скачка уплотнения, который в свою очередь движется ей навстречу вследствие увеличения числа Маха относительного движения потока и тела и связанного с этим уменьшения величины отхода.

Следует отметить, что в рассмотренном случае головная ударная волна испытывает значительные деформации наряду с изменением отхода. Если, например, отношение величины отхода при $\theta=\pi/2$ к его значению на оси симметрии равно примерно трем для $\tau=0$, то при $\tau=0.6$ это отношение возрастает почти на порядок.

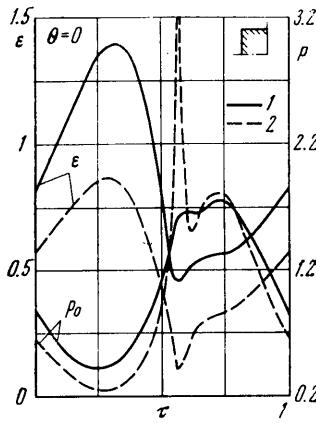
Проведены расчеты колебаний потока и тела при $M_0=10$, $T=4$. На фиг. 4 даны зависимости от времени давления в точке торможения колеблющегося тела и величины отхода волны (сплошные линии) и проведено сравнение этих величин с результатами решения задачи о колебаниях потока (пунктир). Как видно, различие получается существенным,

что объясняется ролью инерциальных членов в правых частях системы (1.1).

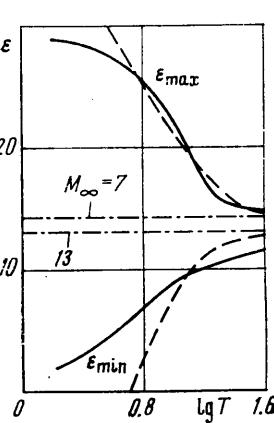
Проведены аналогичные расчеты при $M_0=2$. Здесь также наблюдается повышение давления и распространение волны сжатия, однако при данных значениях амплитуды и частоты колебаний скорость газа оставалась дозвуковой в ударном слое вблизи оси симметрии, поэтому внутренние ударные волны здесь не наблюдались.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Рассмотрено также обтекание колеблющегося цилиндрического торца. На фиг. 5 представлены зависимости от времени величины отхода волны ϵ и давления в точке торможения p_0 на оси симметрии для двух вариантов: 1 — $M=2, T=20$; 2 — $M=10, T=10$. Основное отличие от обтекания сферы состоит в том, что нелинейные эффекты проявляются здесь значительно сильнее. В отличие от приведенных результатов параметры течения около сферы для случая 1 близки к гармоническим, имеется один максимум давления. В условиях 2 пик давления на поверхности сферы только лишь намечается, величина его от стационарного значения отличается примерно на 2%.

4. Сравнение с результатами линейной теории. Согласно линейной теории, при гармонических колебаниях тел все искомые функции являются гармоническими и их можно представить в виде

$$(4.1) \quad f = f^0 + A (f_1 \cos p^* t - f_2 p^* \sin p^* t), \quad p^* = 2\pi / T$$

Параметр p^* обычно называют числом Струхала. В выражении (4.1) f^0 — решение нелинейной стационарной задачи, f_1, f_2 — не зависящие от времени аэродинамические производные, которые находятся из решения линеаризованных уравнений.

Проведено сравнение в широком диапазоне чисел Струхала данных линейной и нелинейной теории для амплитуды колебаний тела $A=0.31$. На фиг. 6 сплошными линиями отмечены наибольшие ϵ_{\max} и наименьшие ϵ_{\min} значения отхода волны при $\theta=0$, полученные на основе нелинейных уравнений. Пунктирными линиями отмечены соответствующие величины для линейной теории, выражения для которых можно получить из соотношения (4.1), приравняв нулю производную по времени. После преобразований получаются формулы для вычисления максимального (знак

«плюс») и минимального (минус перед радикалом) значений параметров газа

$$(4.2) \quad f_{ex} = f^0 \pm A \sqrt{f_1^2 + f_2^2 p^{*2}}$$

Функции f_1 и f_2 при $\theta=0$ взяты из работ [3, 6], штрихпунктирные линии на фиг. 6 нанесены для проверки гипотезы стационарности.

Как видно из фиг. 6, даже при колебаниях с большими амплитудами результаты линейной и нелинейной теорий хорошо согласуются при больших T (малые числа Струхала). Для исследования неустановившихся течений, характерное время нестационарного процесса которых одного порядка с характерным временем течения ($T \sim 1$), необходимо использовать нелинейный подход.

Поступила 11 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических моментов и сил при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 7.
2. Теленин Г. Ф., Липницкий Ю. М. Нестационарное сверхзвуковое обтекание затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
3. Грудницкий В. Г. Обтекание колеблющегося затупленного тела сверхзвуковым потоком газа. Тр. Воен.-возд. инж. акад. им. Н. Е. Жуковского, 1969, вып. 1253.
4. Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 2.
5. Чушкин Л. И. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений. М., 1968 (АН СССР. Вычислит. центр).
6. Численное исследование современных задач газовой динамики. М., «Наука», 1974.
7. Магомедов К. М. О расчете искомых поверхностей в пространственных методах характеристик. Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 6.