

ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОГО ПОРШНЯ В ГАЗЕ
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА
С УЧЕТОМ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

А. И. ИГОШИН

(Москва)

Изучаются одномерные течения, возникающие при движении теплопроводящего поршня в газе при больших величинах числа Рейнольдса. Рассматривается влияние диффузии и химических реакций в случае бинарной смеси газов. Найдено двухчленное внешнее разложение, учитывающее толщину вытеснения пограничного слоя, образующегося перед поршнем. Получено решение, описывающее пограничный слой, которое включает в себя эффекты аккомодации.

Аналогичная задача об отражении плоской ударной волны от теплопроводящей стенки, но без учета диффузии и химических реакций рассматривалась в [1-3]. В последней работе были учтены эффекты аккомодации, что улучшило совпадение теоретических результатов с экспериментом при малых временах.

Пусть теплопроводящий поршень, занимающий левое полупространство (фиг. 1), начинает двигаться с постоянной скоростью u_∞ , сжимая перед собой газовую смесь, состоящую из двух компонент A и B с одинаковыми удельными теплоемкостями c_v , c_p и массой молекул m . Учитываются прямая и обратная реакции, проходящие по формуле $A \rightleftharpoons B + Q'$, где Q' — теплота реакции.

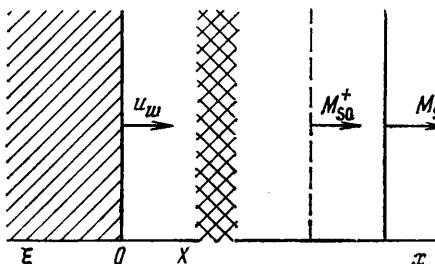
Перед поршнем формируется ударная волна, течение за ней описывается системой уравнений Навье — Стокса, которая в безразмерной форме имеет вид [4]

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{RSc} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \mu \frac{\partial c}{\partial x} \right) &= \frac{\theta}{\rho} W, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma}{Pr} \rho \mu \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\rho \mu Q}{Sc} \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{p}{c_v} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\rho \mu}{c_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{R} \sum_i \left[\frac{U_i}{c_v} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho \mu}{Sc} \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{\theta}{\rho c_v} U_i W_i \right] \\ Sc &= \frac{\mu}{\rho D}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad U_A = c_v T + Q, \quad U_B = c_v T, \quad p = \rho T \end{aligned}$$

Здесь x — лагранжева координата, t — время, ρ — плотность газа, c — массовая концентрация компоненты A , u — среднемассовая скорость газа, T — температура, p — давление, μ — коэффициент вязкости, λ — коэффициент теплопроводности, D — коэффициент диффузии, θ — параметр, характеризующий влияние химических реакций на течение газа, R — число Рейнольдса, Sc — число Шмидта, W — скорость образования компоненты A вследствие химических реакций, Pr — число Прандля, Q — без-

размерная теплота реакции, U_i — внутренняя энергия единицы массы i -компоненты. При решении предполагается, что Pr и Sc — постоянные величины. Зависимость $W=W(c, \rho, T)$ от параметров газовой смеси считается заданной.

При обезразмеривании в качестве характерных величин берутся параметры газа за «невозмущенной» ударной волной ρ^0, T^0, μ^0 , вводится характерная лагранжева длина x^0 и характерная скорость образования компоненты A вследствие химических реакций W^0 . Здесь «невозмущенной» ударной волной называется волна, формирующаяся в случае перенебрежения диссипативными процессами и химическими реакциями. Тогда $a^0 = (\gamma k T^0 / m)^{1/2}$ — скорость звука — берется в качестве характерной скорости,



Фиг. 1

$t^0 = x^0 / \rho^0 a^0$ — характерное время и $R = a^0 x^0 / \mu^0, \theta = x^0 W^0 / (\rho^0 a^0)$ (через k обозначается постоянная Больцмана). Далее, если не оговаривается обратное, все величины взяты в безразмерном виде.

При $t=0$ считается, что газ находится в состоянии химического равновесия и

$$(2) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & T(x, 0) &= T_\infty, \\ \rho(x, 0) &= \rho_\infty, & c(x, 0) &= c^\circ \\ (x > 0) \end{aligned}$$

Температура поршня (его параметры снабжаются индексом w) описывается уравнением

$$(3) \quad \frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_w}{\partial \xi^2}, \quad \xi < 0 \quad \left(\xi = \frac{x_w}{(k_w t^0)^{1/2}} \right)$$

Здесь x_w — эйлерова координата поршня, k_w — коэффициент температуропроводности материала, из которого изготовлен поршень.

В начальный момент считается

$$(4) \quad T_w(\xi, 0) = C, \quad u(x, 0) = 0$$

Из условия непротекания газа и из равенства тепловых потоков на поверхности раздела твердого тела и газа получается

$$(5) \quad u(0, t) = u_w, \quad \rho \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \sqrt{R} \Omega \frac{\partial T_w}{\partial \xi}(0, t), \quad \Omega = \left(\text{Pr} \frac{\lambda_w \rho_w c_w}{\lambda^0 \rho^0 c_p^0} \right)^{1/2}$$

Здесь c_w — удельная теплоемкость материала поршня.

С учетом эффектов аккомодации [3, 6] скачок температуры на поверхности раздела связан с градиентом температуры равенством

$$(6) \quad \frac{A}{\sqrt{R}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = T(0, t) - T_w(0, t), \quad A = \frac{2-r}{r} \frac{\lambda}{\text{Pr} (RT)^{1/2}}$$

Буквой r обозначен коэффициент аккомодации. Предполагается, что величина A постоянна [3].

Для упрощения выкладок предполагается, что стенка абсолютно некаталитична, тогда поток массы каждой компоненты на поршне равен нулю и выполняется

$$(7) \quad \frac{\partial c}{\partial x}(0, t) = 0$$

Изучаемая задача при достаточно больших величинах числа Рейнольдса относится к задачам особых возмущений [5]. Зона течения разделяется на внешнюю область, в которой эффектами вязкости, теплопроводности и диффузии можно пренебречь, а также на внутреннюю область типа пограничного слоя, прилегающую к поршню, где необходимо учитывать эффекты диссипации.

Используется метод сращиваемых асимптотических разложений, сформулированный Ван-Дайком, решение ищется в виде двух — внешнего и внутреннего — разложений по функциям от числа Рейнольдса.

Внешнее разложение будем искать в виде

$$(8) \quad \begin{aligned} c(x, t) &\sim c_0^+(x, t) + \delta_1(R)c_1^+(x, t) + \dots, & u(x, t) &\sim u_0^+(x, t) + \\ &+ \delta_1(R)u_1^+(x, t) + \dots, & p(x, t) &\sim p_0^+(x, t) + \delta_1(R)p_1^+(x, t) + \dots \\ & \rho(x, t) &\sim \rho_0^+(x, t) + \delta_1(R)\rho_1^+(x, t) + \dots, & \delta_1(R) &\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в уравнения (1) для первого члена разложения при $R \rightarrow \infty$ получим систему уравнений

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial c_0^+}{\partial t} &= \frac{\theta}{\rho_0^+} W_0^+, & \frac{\partial \rho_0^+}{\partial t} + (\rho_0^+)^2 \frac{\partial u_0^+}{\partial x} &= 0, & p_0^+ &= \rho_0^+ T_0^+ \\ \frac{\partial u_0^+}{\partial t} + \frac{\partial p_0^+}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial T_0^+}{\partial t} &= - \frac{p_0^+}{c_v} \frac{\partial u_0^+}{\partial x} - \frac{\theta Q}{c_v \rho_0^+} W_0^+ \end{aligned}$$

Делается предположение, что влияние химических реакций мало по сравнению с другими процессами в газе, т. е. считается $\theta \ll 1$, все члены разложений ищутся в виде

$$(10) \quad f^+(x, t) = f(x, t) + \theta \Delta f(x, t)$$

С учетом этого допущения система (9) расщепляется на две аналитически решаемые системы уравнений

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial c_0}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \rho_0^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} &= 0, & p_0 &= \rho_0 T_0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial T_0}{\partial t} &= - \frac{p_0}{c_v} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta c_0}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0} W_0, & \frac{\partial \Delta \rho_0}{\partial t} + \rho_0^2 \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} + 2\rho_0 \Delta \rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \Delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial \Delta p_0}{\partial x} &= 0, & \Delta p_0 &= \Delta \rho_0 T_0 + \rho_0 \Delta T_0 \\ \frac{\partial \Delta T_0}{\partial t} &= - \frac{p_0}{c_v} \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} - \frac{\Delta p_0}{c_v} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{Q}{c_v} \frac{\partial \Delta c_0}{\partial t} \end{aligned}$$

Соотношения на ударной волне дают недостающие граничные условия, которые после разложения приобретают вид (параметры на ударной волне обозначаются индексом s_0)

$$(12) \quad \begin{aligned} p_{s0} &= 1, & u_{s0} &= 2 / (\gamma + 1) a_\infty / a^\circ (M_{s0} - M_{s0}^{-1}), & T_{s0} &= 1 \\ \Delta p_{s0} &= \frac{4}{\gamma + 1} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\rho^\circ a^\circ \gamma^2} M_{s0} \Delta M_{s0}, & \Delta u_{s0} &= \frac{2}{\gamma + 1} \frac{a_\infty}{a^\circ} (1 + M_{s0}^{-2}) \Delta M_{s0} \\ \Delta T_{s0} &= \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\rho^\circ}{\rho_\infty} \left[\Delta p_{s0} \left(\frac{\gamma - 1}{2} + M_{s0}^{-2} \right) - 2 M_{s0}^{-3} \Delta M_{s0} \right] \end{aligned}$$

Здесь $M_s = D/a_\infty \sim M_{s0} + \theta \Delta M_{s0}$ — число Маха ударной волны, D — скорость ударной волны. Условия (12) выполняются в точке

$$x_{s0} = (a_\infty / a^0 M_{s0} - u_w) t = Et \quad (E = \rho_\infty a_\infty / (\rho^0 a^0) M_{s0})$$

На поршне выполняются условия

$$(13) \quad u_0(0, t) = u_w, \quad \Delta u_0(0, t) = 0$$

Решение уравнений (11) дает следующие выражения для первого члена внешнего разложения ($0 \leq x \leq Et$)

$$(14) \quad \begin{aligned} c &\sim c^0 + \theta \lambda (t - E^{-1}x), \quad u \sim u_w + \theta 2\kappa_1 x \\ \rho &\sim 1 + \theta (-2\kappa_1 t + \kappa_2 x), \quad p \sim 1 + \theta (-2\gamma \kappa_1 - Q\lambda/c_v) t \\ \lambda &= W(c^0, 1, 1), \quad \beta_1 = (1 + M_{s0}^{-2})/(2E), \quad \kappa_1 = -\beta_1 Q\lambda/(2(\gamma\beta_1 + E)c_v) \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{a_\infty}{a^0} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma-1} + M_{s0}^{-2} \right) \right]^{-2}, \quad \kappa_2 = 2\kappa_1 \left(\frac{1}{E} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \end{aligned}$$

Теперь ищется первый член внутреннего разложения в виде

$$(15) \quad \begin{aligned} c(x, t) &\sim S_0^+(X, t) + \dots, \quad \rho(x, t) \sim R_0^+(X, t) + \dots \\ p(x, t) &\sim P_0^+(X, t) + \dots, \quad u(x, t) \sim u_w + \Delta_0(R) V_0^+(X, t) + \dots \\ T(x, t) &\sim H_0^+(X, t) + \dots, \quad \Delta_0(R) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Для внутреннего разложения вводится X -растянутая координата. Анализ системы (1) и граничных условий дает $X = x/\Delta_0$, $\Delta_0(R) = R^{-1/2}$.

Первый член внутреннего разложения описывается системой уравнений, получаемой из (1) при $R \rightarrow \infty$. Эта система и начальные условия для нее имеют вид

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial S_0^+}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_0^+ R_0^+ \frac{\partial S_0^+}{\partial X} \right) &= \theta W_0^+(S_0^+, R_0^+, H_0^+) \\ P_0^+ &= R_0^+ H_0^+ \\ \frac{\partial R_0^+}{\partial t} + R_0^{+2} \frac{\partial V_0^+}{\partial X} &= 0, \quad P_0^+ = P_0^+(t) \\ \frac{\partial H_0^+}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\gamma}{Pr} \mu_0^+ R_0^+ \frac{\partial H_0^+}{\partial X} \right) - \frac{P_0^+}{c_v} \frac{\partial V_0^+}{\partial X} - \theta \frac{Q}{c_v} W_0^+(S_0^+, R_0^+, H_0^+) \\ H_0^+(X, 0) &= T_0, \quad S_0^+(X, 0) = c^0, \quad V_0^+(X, 0) = 0 \end{aligned}$$

Для нахождения граничных условий при $X \rightarrow \infty$ производится сращивание одночленного внешнего разложения с одночленным внутренним, основанное на существовании области перекрытия внешнего и внутреннего течений [5]. Тогда получим

$$(17) \quad \begin{aligned} c_0^+(0, t) &= S_0^+(\infty, t), \quad \rho_0^+(0, t) = R_0^+(\infty, t) \\ p_0^+(0, t) &= P_0^+(\infty, t), \quad V_0^+(X, t) \sim \theta 2\kappa_1 X \quad (X \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

На поверхности раздела выполняются следующие условия:

$$(18) \quad \begin{aligned} \partial S_0^+ / \partial X &= 0, \quad R_0^+ \lambda_0^+ \partial H_0^+ / \partial X = \Omega \partial H_{w0}^+ / \partial \xi \\ A \partial H_0^+ / \partial X &= H_0^+ - H_{w0}^+ \quad (X = \xi = 0) \end{aligned}$$

Система (16) в предположении малости возмущения потока газа химическими реакциями ищется в форме (10). Главная часть решения совпадает с результатами, полученными в работе [3], для системы координат, связанной с поршнем, так как концентрация компоненты A остается постоянной и равной концентрации перед ударной волной.

Добавка за счет химических реакций к главной части первого члена внутреннего разложения имеет следующий вид:

$$\Delta S_0(X, t) = \Delta c_0(0, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \left(\frac{Sc}{t-\tau} \right)^{1/2} \left[\exp \left(-\frac{(X-\xi)^2 Sc}{4(t-\tau)} \right) + \right. \\ \left. + \exp \left(-\frac{(X+\xi)^2 Sc}{4(t-\tau)} \right) \right] \left\{ -\frac{d\Delta c_0(0, \tau)}{d\tau} + W_0[c^o, R_0(\xi, \tau) H_0(\xi, \tau)] \right\} d\tau d\xi$$

$$\Delta P_0(X, t) = -(2\gamma\kappa_1 + Q\lambda/c_v)t, \quad \Delta R_0(X, t) = \Delta P_0/H_0 - R_0\Delta H_0/H_0$$

$$\Delta V_0(X, t) = - \int_0^X \left(R_0^{-2} \frac{\partial \Delta R_0}{\partial t} - 2\Delta R_0/R_0 \frac{\partial V_0}{\partial X} \right) dX$$

$$\Delta H_0(X, t) = \frac{2\Delta T_0(0, t)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/2 X (\text{Pr}/t)^{1/2}} \exp(-\alpha^2) d\alpha + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi} \text{Pr}} \int_0^t X \mu(\alpha) \left(\frac{t-\alpha}{\text{Pr}} \right)^{-3/2} \exp \left(-\frac{X^2 \text{Pr}}{4(t-\alpha)} \right) d\alpha + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \left(\frac{\text{Pr}}{t-\alpha} \right)^{1/2} \left[\exp \left(-\frac{(X-\xi)^2 \text{Pr}}{4(t-\alpha)} \right) - \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{(X+\xi)^2 \text{Pr}}{4(t-\alpha)} \right) \right] F_2(\xi, \alpha) d\xi d\alpha$$

$$\Delta H_{w0}(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \xi (t-\alpha)^{-3/2} \exp \left(-\frac{\xi^2}{4(t-\alpha)} \right) \mu_w(\alpha) d\alpha$$

$$F_2(X, t) = F_1(X, t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d\Delta T_0(0, t)}{dt} \int_0^{1/2 X (\text{Pr}/t)^{1/2}} \exp(-\alpha^2) d\alpha$$

$$F_1(X, t) = \frac{\Delta p_0(t)(1-C)}{A} \left[(\pi t)^{-1/2} \exp \left(-\frac{X^2}{4t} \right) - \right. \\ \left. - \tau^{-1/2} \exp(X/(\tau)^{1/2} + t/\tau) \operatorname{erfc} \left(\frac{X}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\frac{t}{\tau}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{H_0(X, t)}{c_p} \frac{d\Delta p_0(t)}{dt} - \frac{Q}{c_p} W_0[c^o, R_0(X, t), H_0(X, t)] \right]$$

$$Z_1(t) = \Delta p_0(t) (1-C) e^{t/\tau} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t/\tau}} e^{-u^2} du \right)$$

$$Z_2(t) = 2 \int_0^t \sqrt{\frac{t}{t-\alpha}} \int_0^\infty u e^{-u^2} F_2 \left(2u \sqrt{\frac{t-\alpha}{\text{Pr}}}, \alpha \right) du d\alpha$$

$$\mu(t) = \frac{-\sqrt{t} Z_1(t) - v_1 [\Delta T_0(0, t) + Z_2(t)] (1 - A v_2 t^{-\eta})}{v_2 - v_1 + A v_1 v_2 / \sqrt{t}}$$

$$\mu_\infty(t) = \mu(t) (1 + A v_1 t^{-\eta}) - A v_1 t^{-\eta} [\Delta T_0(0, t) + Z_2(t)]$$

$$v_1 = (\text{Pr}/\pi)^{\eta}, \quad v_2 = \Omega \text{Pr} / (c_p \sqrt{\pi})$$

Здесь, как и в [3], использовались линейная зависимость коэффициента вязкости от температуры $\mu(X, t) = H_0^+(X, t)$.

После того как найдено одночленное внутреннее разложение, ищется двучленное внешнее, которое учитывает влияние пограничного слоя, возникающего у поршня из-за эффектов диссипации, на движение ударной волны и на параметры газа за ней.

Чтобы найти $\delta_1(R)$, а также недостающее граничное условие для скорости газа, сращивается двучленное внешнее разложение с одночленным внутренним. Откуда находится $\delta_1(R) = R^{-\eta}$

$$u_1^+(0, t) = (C-1)/A \exp(t/\tau) \operatorname{erfc}(\sqrt{t/\tau}) - \theta \int_0^\infty F_3(X, t) dX$$

$$(19) \quad F_3(X, t) = R_0^{-2} \partial \Delta R_0 / \partial t - 2R_0^{-1} \Delta R_0 \partial V_0 / \partial X$$

После представления второго члена внешнего разложения в виде (10), для нахождения его главной части получается система уравнений

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0, & p_1 &= T_1 + \rho_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial T_1}{\partial t} &= -\frac{1}{c_v} \frac{\partial u_1}{\partial x} \end{aligned}$$

На ударной волне и поршне выполняются условия

$$(21) \quad \begin{aligned} u_{s1} &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{a_\infty}{a^0} (1 + M_{s0}^{-2}) M_{s1}, & p_{s1} &= \frac{4}{\gamma+1} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\rho^0 a^0} M_{s0} M_{s1} \\ T_{s1} &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{\rho^0}{\rho_\infty} \left[p_{s1} \left(\frac{\gamma-1}{2} + M_{s0}^{-2} \right) - 2M_{s1} M_{s0}^{-3} \right] \end{aligned}$$

$$u_1(0, t) = -\exp(t/\tau) \operatorname{erfc}(\sqrt{t/\tau})$$

Решением задачи (20), (21) будут функции

$$c_1 = 0, \quad u_1 = G(x - \sqrt{\gamma} t) + \alpha_1 G[-\alpha_2(x + \sqrt{\gamma} t)]$$

$$p_1 = \sqrt{\gamma} G(x - \sqrt{\gamma} t) - \sqrt{\gamma} \alpha_1 G(-\alpha_2(x + \sqrt{\gamma} t))$$

$$T_1 = p_0 / (c_v \sqrt{\gamma}) \{ \alpha_1 G[-\alpha_2(x + \sqrt{\gamma} t)] - G(x - \sqrt{\gamma} t) \} + \beta_3 G[(E - \sqrt{\gamma}) x / E]$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\gamma} \beta_1 - 1}{\sqrt{\gamma} \beta_1 + 1} \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{\gamma} - E}{\sqrt{\gamma} + E}$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\gamma+1} \frac{\rho^0}{\rho_\infty} \left[\frac{\gamma-1}{2} + M_{s0}^{-2} - \frac{\rho^0 a^{02}}{\rho_\infty a_\infty^2} \frac{\gamma+1}{2} M_{s0}^{-4} \right] \bar{\gamma} (1-\alpha_1) + \frac{\alpha_1 - 1}{c_v \bar{\gamma}}$$

Для определения функции $G(z)$ получается функциональное уравнение

$$G(z) + \alpha_1 G(\alpha_2 z) = f(z)$$

$$(22) \quad f(z) = \alpha_3 \exp(-z/(\tau \bar{\gamma})) \operatorname{erfc} \left[\left(-\frac{z}{\tau \bar{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad \alpha_3 = (C-1)/A$$

Решением уравнения (22) будет сумма ряда

$$(23) \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha_1)^n f(\alpha_2^n z)$$

Для получения добавки за счет химических реакций ко второму члену внешнего разложения решается система уравнений

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Delta c_1}{\partial t} &= W_1 - \rho_1 W_0, \quad \frac{\partial \Delta u_1}{\partial t} + \frac{\partial \Delta p_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Delta p_1}{\partial t} + 4\rho_1 \chi_1 + \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x} + 2\Delta \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ c_v \frac{\partial \Delta T_1}{\partial t} &= - \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x} - \Delta p_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2p_1 \chi_1 - Q(W_1 - \rho_1 W_0) \end{aligned}$$

На ударной волне выполняются соотношения

$$(25) \quad \begin{aligned} \Delta u_{s1} &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{a_\infty}{a^0} (\Delta M_{s1} + \Delta M_{s1} M_{s0}^{-2} - 2\Delta M_{s0} M_{s1} M_{s0}^{-3}) \\ \Delta p_{s1} &= \frac{4}{\gamma+1} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\rho^0 a^{02}} (\Delta M_{s0} M_{s1} + \Delta M_{s1} M_{s0}) \\ \Delta T_{s1} &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{\rho^0}{\rho_\infty} \left[-2M_{s0}^{-4} (\Delta M_{s1} M_{s0} - 3\Delta M_{s0} M_{s1}) - \right. \\ &\quad \left. - 2\Delta p_{s0} M_{s1} M_{s0}^{-3} - 2p_{s1} \Delta M_{s0} M_{s0}^{-3} + \Delta p_{s1} \left(\frac{\gamma-1}{2} + M_{s0}^{-2} \right) \right] \end{aligned}$$

Система (24) решается аналогично задаче (20), (21). Так, для выражений концентрации компоненты A и скорости газа получается

$$\begin{aligned} \Delta c_1 &= \int_0^t [W_1 - \rho_1 W_0] dt - \int_0^{x/E} (W_1 - \rho_1 W_0) dt \\ \Delta u_1 &= \alpha_1 G[-\alpha_2(x + \bar{\gamma} \bar{\gamma} t)] + \frac{1}{1 + \beta_1 \bar{\gamma} \bar{\gamma}} \left[L_5 \left(E t, \frac{x + \bar{\gamma} \bar{\gamma} t}{E + \bar{\gamma} \bar{\gamma}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + I_1 \left(\frac{x + \bar{\gamma} \bar{\gamma} t}{E + \bar{\gamma} \bar{\gamma}} \right) + \beta_1 \right] + G(x - \bar{\gamma} \bar{\gamma} t) + \int_0^x \int_0^t \Psi(x, \xi, t - \tau) \frac{\partial L_4(\xi, \tau)}{d\xi} d\xi dt \\ \beta_1 &= -2/(\gamma+1) a_\infty/a^0 M_{s0}^{-3} \Delta M_{s0} M_{s1} (3 + M_{s0}^2) \\ I_1(t) &= -L_5(0, t) - \int_0^t L_4(0, t) dt \end{aligned}$$

$$L_5(x, t) = - \int_0^x \left\{ \int_0^y \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \Psi(y, \xi, t-\tau) \frac{\partial L_4(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\xi d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^y \Psi(y, \xi, t-\tau) \frac{\partial L_4(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\xi d\tau \right\} dy$$

$$L_4(x, t) = L_2(x, t) - \partial L_3 / \partial t + L_1(x, t)$$

$$L_2(x, t) = - \frac{\Delta p_0}{c_v} \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2\kappa_1 \frac{p_1}{c_v} - \frac{Q}{c_v} (W_1 - \rho_1 W_0)$$

$$L_1(x, t) = 4\rho_1 \kappa_1 + 2\Delta \rho_0 \partial u_1 / \partial x, \quad L_3(x, t) = \Delta \rho_0 T_1 + \rho_1 \Delta T_0$$

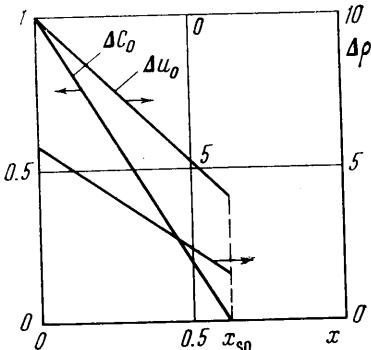
Функция влияния Ψ выражается формулой [7]

$$\Psi(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi \sqrt{\gamma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n \sqrt{\gamma}}{Et} (t-\tau) \sin \frac{\pi n x}{Et} \sin \frac{\pi n \xi}{Et}$$

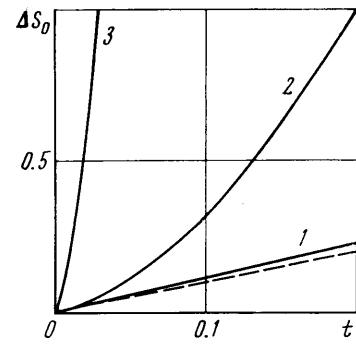
Неизвестная функция $G(z)$ определяется из функционального уравнения типа (22) по формуле (23), где правая часть имеет вид

$$f(z) = - \frac{1}{1 + \beta_1 \sqrt{\gamma}} \left[L_5 \left(-\frac{Ez}{\sqrt{\gamma}}, -\frac{z}{E + \sqrt{\gamma}} \right) + I_1 \left(-\frac{z}{E + \sqrt{\gamma}} \right) + \beta_1 \right] - \\ - \int_0^{\infty} F_3 \left(X, -\frac{z}{\sqrt{\gamma}} \right) dX$$

По приведенной схеме решения можно вычислить и следующие члены разложений, учитывающие эффекты более высокого порядка малости от величины, обратной числу Рейнольдса.



Фиг. 2



Фиг. 3

Громоздкий вид окончательных формул для параметров газа приводит к необходимости их приближенного или численного вычисления.

В качестве примера использования полученных решений рассмотрим движение горячего поршня ($\Omega=100$, $C=2$) в смеси, состоящей из атомов и молекул кислорода с параметрами $\gamma=1.4$, $c_v=5/2$, $Pr=1$. Реакции $O+O+X \rightleftharpoons O_2 + X + Q'$ заменяются модельными реакциями между комплексами молекул $A \rightleftharpoons B + Q'$. Принимается, что скорость образования компоненты A вследствие химических реакций равна [8] (штрихом обозначаются размер-

ные величины)

$$W_A' = 2.6 \cdot 10^{10} \rho^2 T^{1/2} \left(\frac{59000}{T} \right)^3 \left[(1-c^2) \exp \left(-\frac{59000}{T} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\rho}{166} (1+c) c^2 \right] \text{ э/см}^3 \cdot \text{сек}$$

В качестве параметров газа перед ударной волной берутся $T_\infty' = 1430^\circ \text{К}$, $\rho_\infty' = 2.91 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$, $c^0 = 0.95 \cdot 10^{-6}$. Считается, что поршень создает «невозмущенную» ударную волну с $M_{s0} = 1.62$, $T^0 = 2000^\circ \text{К}$.

Характерная лагранжева длина при учете диссипативных процессов пропорциональна $\mu^0 / (\rho^0 p^0)^{1/2}$, для рассматриваемого случая $x^0 \approx 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, тогда $\theta \approx 0.5 \cdot 10^{-9}$ и решение (14), учитывающее влияние химических реакций на параметры газа за ударной волной, имеет вид

$$c \sim 0.95 \cdot 10^{-6} + 0.5 \cdot 10^{-9} (t - 1.51x), \quad u \sim 0.706 - 2.9 \cdot 10^{-9} x \\ \rho \sim 1 + 10^{-9} (2.9t - 3.14x), \quad p \sim 1 - 1.74 \cdot 10^{-9} t$$

На фиг. 2 нанесены распределения Δc_0 , Δu_0 , $\Delta \rho_0$ для момента времени $t=1$. Видно, что поглощение тепла в результате образования A приводит к понижению температуры, давления и скорости газа.

Для рассмотрения влияния диссипативных процессов и эффектов аккомодации вычислена зависимость $\Delta S_0(X, t)$ на поверхности поршня. На фиг. 3 нанесена функция $\Delta S_0(0, t)$ для различных значений коэффициента аккомодации ($1 - A = 10$, $2 - A = 1$, $3 - A = 0.1$). Пунктиром нанесено приращение концентрации компоненты A без учета эффектов аккомодации $\Delta c_0(0, t)$. Приведенные графики показывают на значительную зависимость параметров газа в пограничном слое от величины коэффициента аккомодации.

Поступила 25 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldsworthy F. A. The structure of a contact region, with application to the reflexion of a shock from a heat-conducting wall. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 1.
2. Демьянов Ю. А. О влиянии теплопроводности на формирование течений газа. Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 2.
3. Clarke J. F. The reflexion of a plane shock wave from a heatconducting wall. Proc. Roy. Soc., 1967, vol. A299, No. 1457.
4. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд. иностран. лит., 1961.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
6. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М., «Мир», 1967.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
8. Ступченко Е. В., Лосев С. А., Осинов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. М., «Наука», 1965.