

О РАСТЯЖЕНИИ ПРЯДОМОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Ю. А. БУЕВИЧ, В. К. СКУРАТОВ

(Москва)

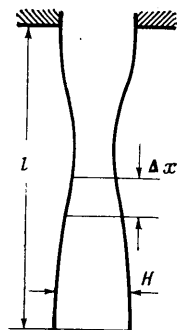
Исследовано растяжение жидкого образца, выдавливаемого в вертикальном направлении из отверстия произвольной формы. Обсуждена задача об управлении размерами отверстия или скоростью выдавливания для получения образцов заданной конфигурации.

Рассматриваемая ниже простая задача возникает при производстве изделий методом экструзионно-раздувочного формования. Нагретая очень вязкая жидкость (обычно расплав или раствор полимера) выдавливается из экструзионной головки и через определенное время переводится в твердое состояние, например в результате быстрого охлаждения. При производстве полых изделий жидкость подается из отверстия с замкнутым контуром и дополнительно подвергается раздуву за счет создания избыточного давления газа внутри контура. В обоих случаях желательно программное управление зазором головки с тем, чтобы скомпенсировать уменьшение толщины образца в результате его растяжения под действием собственного веса или же получить изделие с нужным распределением толщины стенок (например, полые изделия с ребрами жесткости).

В общем случае задача о растяжении образца с поперечным сечением сложной формы или неплоской пленки упруговязкой неньютоновской жидкости весьма сложна (см. [1], а также примеры частных задач такого типа в [2-4]). Однако многие важные в практическом отношении выводы могут быть получены уже из решения задачи в пренебрежении упругими и неньютоновскими свойствами жидкости, которые не играют существенной роли для весьма широкого класса реальных процессов формования.

В этой работе приведено решение такой задачи, необходимое для решения вопроса о том, каким образом нужно изменять со временем размеры экструзионного отверстия или скорость экструзии, чтобы получить образец заданной конфигурации.

1. Рассмотрим растяжение образца жидкости, поступающей из отверстия в горизонтальной плоскости $x=0$ со скоростью $v_0(t)$ (сечение образца показано на фиг. 1). Площадь отверстия равна sh_0r_0 , где $h_0(t)$ и $r_0(t)$ — размеры отверстия, зависящие в общем случае от времени, а s — постоянный фактор формы. Процесс начинается в момент $t=0$ и заканчивается при $t=t_*$. Длина образца есть $l(t)$, причем $l(0)=0$, $l(t_*)=L_*$, средняя продольная скорость жидкости равна $V(t, x)$, а размеры поперечных сечений образца — $H(t, x)$ и $R(t, x)$, где x — продольная координата, отсчитываемая вниз от плоскости отверстия.



Фиг. 1

Процесс растяжения считаем изотермическим, «разбуханием» образца при выходе из отверстия за счет упругости жидкости пренебрегаем (в принципе это явление легко учитывается, если понимать под h_0 и r_0 не размеры самого отверстия, а эффективные размеры начального сечения образца, определяемые с учетом разбухания).

Анализ условий формования, осуществляемых на практике, показывает, что обычно характерное время процесса значительно превышает время релаксации жидкости, а характерные ускорения жидкости намного меньше ускорения свободного падения. Это позволяет

пренебречь в первом приближении влиянием упругих свойств жидкости и инерционными силами по сравнению с силами тяжести.

Поле скорости жидкости для образцов с поперечными сечениями правильной формы нетрудно найти стандартными методами; очевидно, это поле будет зависеть от формы сечений. Чтобы включить в анализ образцы произвольного сечения и получить достаточно универсальные зависимости, ниже исследуем лишь одномерную задачу, используя формализм продольной («трутоновской») вязкости [1]. При этом учитываем, что различные сечения образца, подвергающегося одноосному растяжению, геометрически подобны одно другому и сечению отверстия.

2. Рассматриваем элемент образца толщины $\Delta x(t|t_0)$, вышедший из отверстия в момент t_0 , имея в этот момент толщину $\Delta x_0(t_0)$ (см. фиг. 1). В соответствии с принятыми допущениями на этот элемент действует растягивающая сила $\dot{P}(t_0)$, равная весу жидкости, истекшей ранее

$$(2.1) \quad P(t_0) = \rho g s \int_0^{t_0} v_0(\tau) h_0(\tau) r_0(\tau) d\tau = \rho g s \Psi(t_0)$$

где g — ускорение силы тяжести. Растягивающее напряжение в этом элементе равно

$$(2.2) \quad \sigma(t|t_0) = \frac{P(t_0)}{sh(t|t_0)r(t|t_0)}$$

где $h(t|t_0)$ и $r(t|t_0)$ — поперечные размеры элемента в момент t .

С другой стороны, указанное напряжение равно произведению продольной вязкости η , зависящей в общем случае от скорости деформации, на скорость деформации, т. е.

$$(2.3) \quad \sigma(t|t_0) = \eta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varphi = \ln \Delta x(t|t_0)$$

Таким образом, из (2.1) — (2.3) получаем

$$\eta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\rho g \Psi(t_0)}{h(t|t_0)r(t|t_0)}$$

Чтобы выразить неизвестные h и r в этом уравнении через Δx или φ , используем условие сохранения объема элемента, которое дает

$$(2.4) \quad h(t|t_0)r(t|t_0) = h_0(t_0)r_0(t_0) \frac{\Delta x_0(t_0)}{\Delta x(t|t_0)}$$

В результате получаем следующую задачу для величины φ из (2.3):

$$(2.5) \quad \eta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\rho g \Psi(t_0)}{h_0(t_0)r_0(t_0)} e^{\varphi - \varphi_0}, \quad \varphi|_{t=t_0} = \varphi_0 = \ln \Delta x_0(t_0)$$

Фигурирующая в (2.5) продольная вязкость η зависит от произведения $d\varphi/dt$ на характерное время релаксации τ , упруговязкой среды [1]. Последнее намного меньше, как правило, времени t_* процесса формования, имеющего порядок десятков секунд. Поэтому, хотя уравнение (2.5) нетрудно проинтегрировать и при зависящей от $d\varphi/dt$ вязкости, для целей этой работы вполне достаточно ограничиться исследованием при $\tau \cdot d\varphi/dt \rightarrow 0$, когда η равняется утроенной сдвиговой вязкости.

При $\eta = \text{const}$ из (2.5) получаем

$$(2.6) \quad \frac{\Delta x(t|t_0)}{\Delta x_0(t_0)} = \left[1 - \frac{\rho g \Psi(t_0)}{\eta h_0(t_0) r_0(t_0)} (t-t_0) \right]^{-1}$$

Снова используя (2.4) и подобие сечений, находим из (2.6) поперечные размеры рассматриваемого элемента

$$(2.7) \quad \frac{h(t|t_0)}{h_0(t_0)} = \frac{r(t|t_0)}{r_0(t_0)} = \left[1 - \frac{\rho g \Psi(t_0)}{\eta h_0(t_0) r_0(t_0)} (t-t_0) \right]^{1/2}$$

причем функция $\Psi(t_0)$ определена в (2.1).

При определенном значении $t=t_f$ размеры h и r обращаются в нуль, что соответствует разрыву образца в месте расположения данного элемента. Уравнение для t_f следует из (2.7). Имеем

$$(2.8) \quad t_f = t_0 + \frac{\eta h_0(t_0) r_0(t_0)}{\rho g \Psi(t_0)}$$

Очевидно, в реальном процессе формирования необходимо, чтобы t_f для всех t_0 из интервала $(0, t_*)$ было больше t_* .

В частности, при постоянных h_0 , r_0 и v_0 имеем из (2.7)

$$t_f = t_0 + t_m^2/t_0, \quad t_m^2 = \eta/\rho g v_0$$

Величина t_f имеет минимум при $t_0 = t_m$, и условие отсутствия разрыва запишется в виде $t_* < 2t_m$.

3. Перейдем теперь к эйлерову описанию растяжения, т. е. найдем функции $V(t, x)$, $H(t, x)$ и $R(t, x)$. В точке $x(t|t_0)$, в которой в момент t находится элемент, вышедший из отверстия в момент t_0 , имеем

$$(3.1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x(t|t_0)} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d \ln \Delta x(t|t_0)}{dt}$$

Скорость жидкости в этой точке в момент t представляется в форме

$$(3.2) \quad v(t|t_0) = V|_{x(t|t_0)} = v_0(t) + \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \sum_j \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x(t|t_j)} \Delta x(t|t_j)$$

где суммирование проводится по всем элементам, исходящим из отверстия за время от t_0 до t . Из (3.1) и (2.5) имеем для отдельного члена суммы в (3.2) следующее выражение:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x(t|t_j)} \Delta x(t|t_j) &= \Phi(t_j) \left[\frac{\Delta x(t|t_j)}{\Delta x_0(t_j)} \right]^2 \Delta x_0(t_j) = \\ &= \Phi(t_j) [1 - \Phi(t_j)(t-t_j)]^{-2} v_0(t_j) \Delta t_j \\ \Phi(t_j) &= \rho g \Psi(t_j) [\eta h_0(t_j) r_0(t_j)]^{-1} \end{aligned}$$

где Δt_j — время истечения элемента $\Delta x_0(t_j)$, которое без ограничения общности можно считать одинаковым для всех элементов.

Рассматривая (3.2) как интегральную сумму и используя (3.3), получаем

$$(3.4) \quad v(t|t_0) = v_0(t) + \int_{t_0}^t \frac{v_0(\tau) \Phi(\tau) d\tau}{[1 - (t-\tau) \Phi(\tau)]^2}$$

Совершенно аналогично, имеем

$$(3.5) \quad x(t|t_0) = \int_{t_0}^t v_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' \frac{v_0(\tau') \Phi(\tau')}{[1 - (t - \tau') \Phi(\tau')]^2}.$$

Формулы (3.4) и (3.5) определяют скорость и координату элемента в виде функций от времени t_0 . Исключая t_0 , т. е. выражая его в виде функции от t и x из (3.5) и подставляя в (3.4), получаем искомое представление для $V(t, x)$. Используя функцию $t_0(t, x)$ в соотношениях (2.7), получаем эйлеровы представления для поперечных размеров образца $H(t, x)$ и $R(t, x)$.

В качестве простейшего примера снова рассмотрим процесс с постоянными v_0 , h_0 и r_0 , предполагая дополнительно, что неравенство

$$(t_* - \tau) \Phi(\tau) = t_m^{-2} \tau (t_* - \tau) \ll 1, \quad t_m^2 = \eta / \rho g v_0$$

удовлетворяется при любых τ из интервала $(0, t_*)$. Это неравенство соответствует предположению о слабом деформировании жидкости за время формирования t_* . Из (2.7) и (3.4) получаем

$$\frac{h(t|t_0)}{h_0} = \frac{r(t|t_0)}{r_0} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{t_0(t-t_0)}{t_m^2}, \quad v(t|t_0) \approx v_0 \left(1 + \frac{t^2 - t_0^2}{2t_m^2} \right)$$

а уравнение, определяющее t_0 как функцию t и x , следует из (3.5)

$$x \approx v_0 \left(1 - \frac{t_0^2}{2t_m^2} \right) (t - t_0) + v_0 \frac{t^3 - t_0^3}{6t_m^2}$$

Нетрудно показать, что это кубическое уравнение имеет единственный действительный положительный корень, который с точностью до членов второго порядка по t/t_m включительно равен

$$t_0 \approx t^0 + \frac{1}{t_m^2} \left(\frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t t^2 \right), \quad t^0 = t - \frac{x}{v_0}$$

Подставляя эту величину в предыдущие соотношения для скорости и поперечных размеров, получаем явные представления для $V(t, x)$, $H(t, x)$ и $R(t, x)$.

4. Формулы, приведенные выше, позволяют выразить конечные параметры жидкого образца, т. е. его длину L_* и поперечные размеры $H_*(x) = H(t_*, x)$, $R_*(x) = R(t_*, x)$ в виде функционалов от «функции управления» $v_0(t)$, $h_0(t)$ и $r_0(t)$, зависящих дополнительно от параметра t_* . Эти формулы можно рассматривать как систему интегральных уравнений для определения этих функций, решение которой дает возможность так подобрать время процесса t_* и функции управления, чтобы обеспечить нужную длину L_* и требуемые профили $H_*(x)$, $R_*(x)$. Дополнительно на функции управления могут быть наложены связи, диктуемые технологическими особенностями процесса формирования. Так, во многих случаях расход жидкости поддерживается постоянным, т. е.

$$(4.1) \quad s v_0(t) h_0(t) r_0(t) = Q = \text{const}$$

В аналитическом виде решение указанной системы может быть получено лишь в простейших ситуациях. Однако ее легко решить численно практически при всех достаточно гладких зависимостях H_* и R_* от x . Результаты такого решения можно затем использовать для программированного управления зазором экструзионной головки при формировании конкретных изделий.

Рассмотрим пример. Пусть требуется обеспечить изделие постоянного сечения при условии постоянства скорости экструзии v_0 или расхода жидкости Q . Без ограничения общности можно принять $r_0 = h_0$. Из (2.7) получаем интегральное уравнение

$$(4.2) \quad H_*^2 = h_0^2(t) - \frac{\rho g}{\eta} (t_* - t) \int_0^t v_0(\tau) h_0^2(\tau) d\tau$$

где H_* рассматривается как заданная постоянная величина.

Пусть $v_0 = \text{const}$. Тогда, вводя новую неизвестную функцию f , из (4.2) имеем задачу

$$\frac{df}{d(t_* - t)} + \frac{\rho g}{\eta} v_0 [(t_* - t)f + H_*^2] = 0, \quad f = \frac{h_0^2 - H_*^2}{t_* - t}, \quad f = 0 \quad (t = 0)$$

решение которой имеет вид

$$f = \frac{\rho g v_0}{\eta} H_*^2 \left\{ \int_0^{t_*} \exp \left[-\frac{\rho g v_0}{2\eta} (t_*^2 - \tau^2) \right] d\tau - \int_0^{t_* - t} \exp \left[-\frac{\rho g v_0}{2\eta} ((t_* - t)^2 - \tau^2) \right] d\tau \right\}$$

Вводя безразмерные переменные и величину α

$$(4.3) \quad \kappa = \frac{h_0}{H_*}, \quad \xi = \frac{t}{t_*}, \quad \alpha = \frac{\rho g v_0}{2\eta} = \frac{1}{2t_m^2}$$

получаем отсюда

$$(4.4) \quad \kappa = \left\{ 1 + 2\alpha t_* (1 - \xi) \left[\int_0^{t_*} e^{-\alpha(t_*^2 - \tau^2)} d\tau - \int_0^{t_* - t} e^{-\alpha((t_* - t)^2 - \tau^2)} d\tau \right] \right\}^{1/2}$$

Это соотношение и дает искомую функцию управления $\kappa(\xi)$, зависящую как от параметров от величины α (или t_m), т. е. от свойств жидкости и скорости ее истечения, и от времени процесса t_* , которое выбирается так, чтобы получить образец нужной длины L_* . На фиг. 2 показаны функции управления, соответствующие разным t_* (цифры у кривых), вычисленные применительно к условиям экструзии полиэтилена высокого давления марки 10802-020. Плотность и вязкость этой среды при обычно используемой температуре переработки составляют 0.78 г/см^3 и $1.4 \cdot 10^6 \text{ нз}$ соответственно, скорость экструзии была принята равной 0.5 см/сек .

Пусть теперь $Q = sv_0 h_0^2 = \text{const}$. Тогда из (4.2) имеем

$$\frac{df}{d(t_* - t)} + \beta f = 0, \quad f = 0(t = 0), \quad \beta = \frac{\rho g Q}{\eta s}$$

решение которой, $f = \beta t$, дает (снова используем переменные κ и ξ , определенные в (4.3))

$$(4.5) \quad \kappa = [1 + \beta H_*^{-2} t_*^2 \xi (1 - \xi)]^{1/2}$$

В отличие от кривых на фиг. 2 функции управления (4.5) симметричны относительно прямой $\xi = 1/2$. Очевидно, соотношения (4.4) и (4.5) можно непосредственно использовать для программирования экструдеров для производства изделий (цилиндров, плоских листов и т. п.) постоянного поперечного сечения.

Поступила 17 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Lodge A. S. Elastic Liquids. An introductory vector treatment of finite-strain polymer rheology. London - New York, Acad. Press, 1964. (рус. перев.: Лодж А. С. Эластичные жидкости. М., «Наука», 1969).
2. Леонов А. И. О растяжении цилиндра из упруговязкой жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.
3. Schenkel G. Plastic extrusion technology and theory. London, Iliffe Books, 1966.
4. Yeow Y. L. On the stability of extending films: a model for the film casting process. J. Fluid Mech., 1974, vol. 66, pt 3.