

КИНЕТИКА КОАЛЕСЦЕНЦИИ ЭМУЛЬСИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Э. Г. СИНАЙСКИЙ

(Москва)

В работе [1] было рассмотрено сближение двух проводящих сферических частиц в вязкой жидкости в присутствии однородного внешнего электрического поля. В результате было определено сечение столкновения частиц и рассмотрена кинетика простейшей бидисперсной системы.

В настоящей работе, которая является непосредственным продолжением [1], рассмотрена кинетика коалесценции с непрерывной функцией распределения частиц по размерам. Получены численное и приближенное решение (методом моментов) кинетического уравнения. Сравнение решений позволит сделать вывод о том, что изменение числа частиц и их объемной концентрации хорошо описывается приближенным решением.

1. **Постановка задачи.** Поведение дисперсной фазы эмульсии можно характеризовать распределением капель по их объемам $n(v, t, P)$, являющейся функцией времени t и точки пространства P . При этом ndv — число капель, объем которых заключен в пределах $(v, v+dv)$ в момент времени t в точке P . Известно [2], что в случае отсутствия дробления капель n описывается следующим кинетическим уравнением:

$$(1.1) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(U(v)n) = \frac{1}{2} \int_0^v K(u, v-u)n(u, t, P)n(v-u, t, P)du - \\ - n(v, t, P) \int_0^\infty K(u, v)n(u, t, P)du = J_1 - J_2$$

Здесь $U(v)$ — средняя скорость капель объема v .

Входящее в (1.1) ядро коалесценции $K(u, v)$ пропорционально количеству капель объема u , захватываемому каплей объема v в единицу времени. В случае ламинарного течения $K(u, v)$ пропорционально сечению столкновения $\sigma(u, v)$ капель объема u и v и имеет следующий вид:

$$(1.2) \quad K(u, v) = \sigma(u, v) |U(u) - U(v)|$$

Рассмотрим процесс коалесценции, обусловленный гравитационным осаждением капель в электрическом поле. Величина $\sigma(u, v)$ для рассматриваемого случая была получена в [1]

$$(1.3) \quad \sigma(u, v) = 0.57\pi b^2 S [1 - \exp(-5.75k)] \\ k = a/b, \quad a = \min\{r(u), r(v)\}, \quad b = \max\{r(u), r(v)\} \\ r(u) = (3u/4\pi)^{1/3}, \quad r(v) = (3v/4\pi)^{1/3} \\ S = 3\epsilon E^2 k^2 / 4\pi \Delta \rho g a (1 - k^2)$$

где E — напряженность электрического поля, $\Delta\rho$ — разность плотностей дисперсной и непрерывной фаз, g — ускорение силы тяжести, ϵ — диэлектрическая проницаемость.

К уравнению (1.1) нужно добавить начальное и граничное условия, вид которых зависит от конкретной задачи.

Кинетическое уравнение коагуляции (1.1) в пространственно-однородном случае исследовалось многими авторами. Известны [3, 4] точные решения для ядер коагуляции $K(u, v)$ специального вида и частных начальных условий, приближенные решения [2], полученные методом моментов, а также численные решения [5, 6]. Однако во всех указанных работах точные решения были получены для ядер коагуляции, область применимости которых при рассмотрении коалесценции в эмульсиях ограничена, а точность приближенных решений не оценивалась.

Основной целью настоящей работы является получение точного (численного) и приближенного решений уравнения (1.1) с ядром (1.2), (1.3) для двух частных случаев, а также оценка точности приближенного решения.

2. Пространственно-однородный случай. Физически этот случай соответствует процессу коалесценции эмульсии в условиях слабого перемешивания при отсутствии дробления капель. В рассматриваемом случае имеем уравнение

$$(2.1) \quad \frac{\partial n(v, t)}{\partial t} = J_1 - J_2, \quad n(v, 0) = n_0(v)$$

В качестве начального распределения возьмем

$$(2.2) \quad n_0(v) = \frac{n_*}{\sigma(v/v_c)} \exp\left(-\frac{\ln^2(v/v_c)}{2\sigma^2}\right)$$

которое, как показывают эксперименты [7], имеет место в эмульсиях в отсутствие электрического поля. Входящий в (2.1) параметр v_c связан со средним значением $\langle v \rangle$ и дисперсией σ соотношением $v_c = \langle v \rangle \exp(-\sigma^2/2)$, а величина n_* выбирается из условия сохранения объемной концентрации дисперсной фазы

$$(2.3) \quad \int_0^{\infty} un(u, t) du = \int_0^{\infty} un_0(u) du = C_0$$

Уравнение (2.1) с условиями (2.2) и (2.3) в безразмерных переменных

$$v_1 = v/v_c, \quad n_1 = nv_c^2/C_0, \quad \tau = 0.024\epsilon E^2 C_0 t / \pi \mu$$

интегрировалось численно методом итераций.

Итерации брались по схеме

$$(2.4) \quad n_{1ij}^{(s)} = n_{1ij-1} + \Delta\tau [J_{1ij}^{(s-1)} - J_{2ij}^{(s-1)}]$$

Здесь $n_{ij} = n(i\Delta v, j\Delta\tau)$, s — номер итерации.

Интегралы, входящие в J_1, J_2 , аппроксимировались по формулам трапеций. Полу-бесконечный интервал объемов v_1 заменялся конечным $(0, N\Delta v_1)$, причем величина N в процессе счета выбиралась таким образом, чтобы с увеличением N изменение значения несобственного интеграла, входящего в (1.1), составляло не более 1%. Число итераций регулировалось условием

$$\max_i |(n_{1ij}^{(s)} - n_{1ij}^{(s-1)})/n_{1ij}^{(s)}| \leq \lambda$$

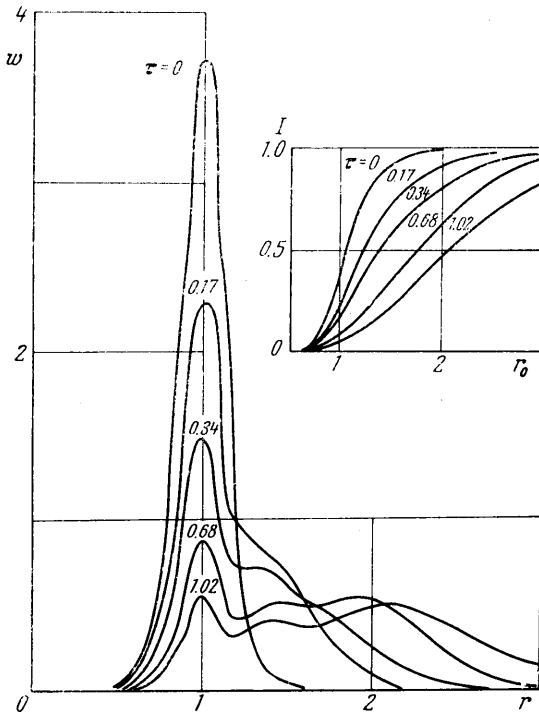
где λ — заданная величина. С увеличением j значение Δv_1 увеличивалось.

Приводимый в работе графический материал соответствует случаю $N=40$, $\Delta v_1 = 0.1 \div 0.2$, $\lambda = 10^{-3}$. Число итераций зависит от j . На первых шагах по времени $s \lesssim 10$, с увеличением j величина s уменьшается до $s=3$.

В результате интегрирования определялось распределение $n_1(v_1, \tau)$, объемное распределение $w(v_1, \tau) = v_1 n_1(v_1, \tau)$, а также интегральные характеристики \bar{N} — полное число частиц, J — объем, заключенный в каплях объема $v_1 \leq v_0$

$$N = \int_0^{\infty} n_1 dv_1, \quad J = \int_0^{v_0} w dv_1$$

На фиг. 1 представлены распределения $w(v_1, \tau)$ и $J(v_0, \tau)$ для значения $\sigma = 0.3$. Для удобства на оси абсцисс отложены радиусы $r_1 = (3v_1 / 4\pi)^{1/3}$.



Фиг. 1

Следует отметить появление двух и более «горбов» в распределении w . Через некоторое время τ_* с момента начала процесса коалесценции распределения w для различных значений σ практически совпадут. Величина τ_* с уменьшением σ увеличивается.

С увеличением времени скорость коалесценции падает, что объясняется уменьшением числа капель.

Найдем приближенное решение уравнения (2.1) методом моментов с начальным условием вида

$$(2.5) \quad n(v, 0) = \frac{k+1}{C_0 k!} \times N^2(0) \left(\frac{v}{v_c(0)}\right)^k \times \exp\left(-\frac{v}{v_c(0)}\right)$$

Этот метод применительно к кинетическому уравнению (1.1) был разработан в [2]. Там же рассмотрены не-

которые частные случаи задания ядра $K(u, v)$ и начального условия (2.5). Из (2.5) следует, что дисперсия начального распределения полностью определяется параметром

$$(2.6) \quad \sigma_0 = \frac{\sigma(0)}{\langle v(0) \rangle} = (k+1)^{-1/2}$$

Следуя [2], введем момент m -го порядка

$$M_m(t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{v_c}\right)^m n(v, t) d\left(\frac{v}{v_c}\right)$$

Умножая далее (2.1) на $(v/v_c)^m$, интегрируя по v в пределах от 0 до ∞ , раскладывая $n(v, t)$ в ряд по полиномам Лагерра

$$(2.7) \quad n(v, t) = \left(\frac{v}{v_c}\right)^k \exp\left(-\frac{v}{v_c}\right) \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) L_i^{(k)}\left(\frac{v}{v_c}\right)$$

используя очевидные соотношения

$$v_c(t) = C(t) / (k+1)N(t), \quad N(t) = v_c(t)M_0(t), \\ C(t) = v_c^2(t)M_1(t)$$

и ограничиваясь в ряде (2.7) двумя членами разложения, получим для полного числа частиц N и объемной концентрации C два уравнения

$$(2.8) \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{M_0^2(t)}{2k!} J_k(v_c), \quad \frac{dC}{dt} = 0$$

$$J_k(v_c) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(u, v) (u/v_c)^k (v/v_c)^k \exp(-(u+v)/v_c) du dv$$

Для ядра $K(u, v)$, выбранного в соответствии с (1.2) и (1.3), из (2.8) получим

$$(2.9) \quad N(\tau) = N(0) \exp(-\alpha_k \tau), \quad C = C(0)$$

$$\tau = 0.024 \epsilon E^2 C(0) t / \pi \mu$$

$$\alpha \approx 1.2(2k+2)! F(1.2k+3; k+2.45; 0.5) / (k+1.45) / 2^{2k+3} (k!)^2 (k+1)$$

Здесь $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция.

На фиг. 2 представлена зависимость $N_1 = N/N(0)$, найденная из (2.9), для случая $k=2$. Там же пунктирной линией представлена эта же зависимость, полученная численным интегрированием уравнения (2.1) с начальным условием (2.5) для $k=2$. Из фигуры видно, что число частиц, полученное методом моментов, уже в приближении двух моментов дает достаточно хорошее приближение к точному вплоть до $\tau \sim 1$. При $\tau > 1$ точное решение дает более медленное затухание процесса, чем приближенное. С практической точки зрения наибольший интерес представляют времена $\tau \lesssim 1$, поскольку по существу на этих временах разыгрывается весь процесс коалесценции.

3. Стационарный одномерный случай. Рассмотрим случай, когда распределение частиц по размерам зависит от одной координаты z . Физически это может соответствовать установившемуся режиму либо оседания капель под действием силы тяжести, либо вертикальному подъему частиц с потоком. Во втором случае частицы при движении вверх укрупняются, размер их достигает критического, при котором скорость их гравитационного оседания равна скорости потока, а затем они начинают двигаться против потока. Если рассматривается по z полубесконечная область ($0 < z < \infty$), то в каждом сечении поток частиц, направленных вверх, равен потоку, направленному вниз. В случае, если область по z ограничена ($0 < z < H$), например на высоте H устроен отбор эмульсии, то при заданном распределении $n_0(v)$ при $z=0$ можно определить высоту H . Заметим, что при движении частиц вверх со скоростью $U_0 - U_c$ (где U_0 — скорость потока, U_c — стоксовая скорость оседания частицы) с заданными распределениями $n_0(v)$ на входе, часть этого распределения с $v < 4\pi(9\mu U_0/2\Delta\rho g)^{1/3}/3 \equiv v_*$ обусловлена частицами, движущимися вверх, а другая часть с $v > v_*$ — частицами, движущимися вниз.

Предполагая, что скорость потока U_0 постоянна, из (1.1) получим

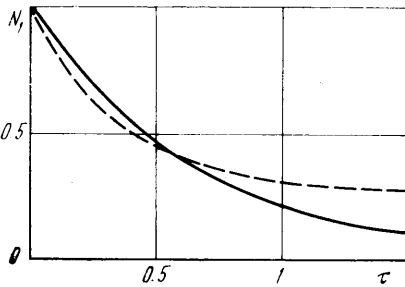
$$(3.1) \quad (U_0 - \alpha v^{2/3}) \frac{\partial n}{\partial z} = J_1 - J_2 \quad \left(|\alpha| = \frac{2\Delta\rho g}{9\mu} \right)$$

Если поток направлен против силы тяжести, то $\alpha > 0$, в противном случае $\alpha < 0$.

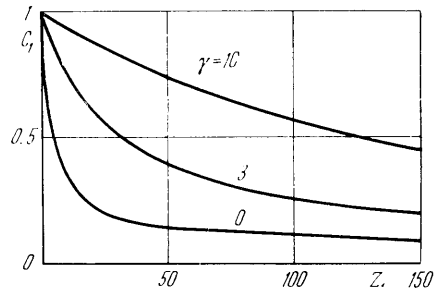
Заметим, что в отличие от пространственно-однородного случая объемная концентрация дисперсной фазы не сохраняется, а сохраняется поток

$$(3.2) \quad \int_0^{\infty} (U_0 - \alpha v^{2/3}) v n(v, z) dv = q$$

Возьмем в качестве граничного условия при $z=0$ распределение (2.5).



Фиг. 2



Фиг. 3

Поступая так же, как и в п.2, и ограничиваясь двумя моментами, получим для полного числа частиц и объемной концентрации следующие уравнения:

$$(3.3) \quad \frac{d}{dz_1} \left[\gamma - A_k \frac{k+1}{k+5/3} \left(\frac{C_1}{N_1} \right)^{2/3} \right] N_1 = -\alpha_k C_1 N_1, \quad C_1 \left[\gamma - A_k \left(\frac{C_1}{N_1} \right)^{2/3} \right] = \gamma - A_k$$

В (3.3) введены безразмерные переменные

$$z_1 = 0.024 \varepsilon E^2 C(0) z / \pi \alpha \mu \langle v(0) \rangle^{2/3}, \quad N_1 = N/N(0), \quad C_1 = C/C(0)$$

$$\gamma = U_0 / \alpha \langle v(0) \rangle^{2/3}, \quad (q = C(0) \alpha \langle v(0) \rangle^{2/3} (k+1)^2 (\gamma - A_k))$$

Решение (3.3) имеет вид

$$(3.4) \quad \alpha_k z_1 = -\frac{27}{44} (\gamma - A_k) (C_1^{-2} - 1) - \frac{37}{22} \gamma (C_1^{-1} - 1) - \\ - \frac{3}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma - A_k} \ln \left| \frac{A_k + \gamma (C_1 - 1)}{C_1 A_k} \right|, \quad N_1 = A_k^{3/2} C_1^{5/2} (\gamma C_1 - \gamma + A_k)^{-3/2}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения (3.4). Пусть направление потока совпадает с направлением силы тяжести.

В рассматриваемом случае в формуле (3.4) следует поменять знаки при γ и z . Решение примет вид

$$(3.5) \quad \alpha_k z_1 = \frac{27}{44} (\gamma + A_k) (C_1^{-2} - 1) + \frac{37}{22} \gamma (C_1^{-1} - 1) + \\ + \frac{3}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma + A_k} \ln \left| \frac{A_k - \gamma (C_1 - 1)}{C_1 A_k} \right|$$

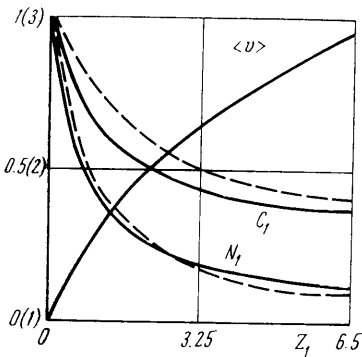
Зависимости $C_1(z)$ для $k=2$ для различных значений γ представлены на фиг. 3. Заметим, что при $\gamma=0$, соответствующем случаю оседания капель в покоящемся потоке, решение (3.5) может быть представлено в виде

$$(3.6) \quad C_1(z) = \left(1 + \frac{4}{3} \left(\frac{k+5/3}{k+1} \right) \frac{\alpha_k z_1}{A_k} \right)^{-1/2}$$

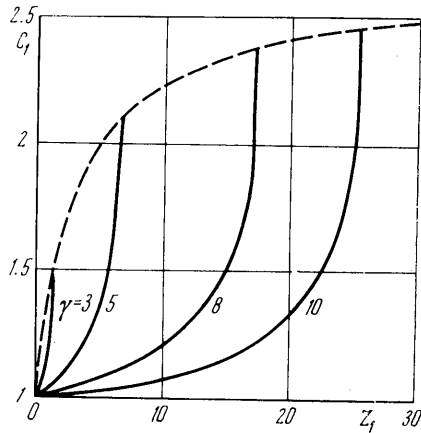
В частном случае $k=2$ имеем

$$C_1 = (1+0.75z_1)^{-1/2}, \quad N_1 = (1+0.75z_1)^{-5/4}$$

На фиг. 4 представлены зависимости $N_1, C_1, v_1 = \langle v \rangle / \langle v(0) \rangle$ от z_1 для $\gamma=0$; там же пунктирной линией приведены соответствующие значения $N_1, C_1,$



Фиг. 4



Фиг. 5

полученные путем численного интегрирования уравнения (3.1), с условием (2.5) при $k=2$. Следует отметить достаточно хорошее совпадение приближенных и точных значений как N_1 , так и C_1 .

Пусть поток направлен против силы тяжести. Заметим сначала, что по смыслу $\gamma - A_k$ — расход дисперсной фазы через единичную площадку во входном сечении, перпендикулярную оси z_1 . Поэтому в случае $\gamma < A_k$ поток массы сверху больше потока снизу, что возможно при дополнительном подводе дисперсной фазы на некоторой высоте H_1 . При $\gamma > A_k$, наоборот, поток сверху меньше потока снизу и разность потоков должна отбираться на некоторой высоте H . Наконец, в случае $\gamma = A_k$ расход во входном сечении равен нулю, т. е. поток массы вверх равен потоку вниз. Последнее возможно, если все капли, вышедшие из сечения $z_1=0$, укрупнившись, возвращаются обратно. Чтобы подобный процесс имел место, нужно предположить, что коалесценция происходит в полубесконечной области $0 < z_1 < \infty$.

Из рассмотренных трех случаев интерес представляют только два последних. Рассмотрим их для случая $k=2$.

При $\gamma = A_2$ из (3.4) получим $C_1 = N_1 = (1 + 2.98z_1)^{-1}$.

Распределения $C_1(z)$ для различных значений γ , подсчитанные по (3.4), представлены на фиг. 5. Там же пунктиром изображена линия, на которой $dC_1/dz_1 = 0$, что соответствует высоте H , на которой должен производиться отбор дисперсной фазы, чтобы скомпенсировать расход во входном сечении. Следует заметить, что в отличие от случая $\gamma = A_2$ объемная концентрация возрастает.

В заключение рассмотрим двумерный случай, который соответствует, например, гравитационному осаждению относительно потока, движущему-

ся с постоянной скоростью U_0 перпендикулярно направлению силы тяжести во внешнем однородном электрическом поле. Направим ось y по направлению силы тяжести, ось x — по потоку. В таком случае уравнение (1.1) и условие сохранения примут вид

$$U_0 \frac{\partial n}{\partial x} + \alpha v^{2/3} \frac{\partial n}{\partial y} = J_1 - J_2, \quad \int_0^\infty \left(U_0 \frac{\partial n}{\partial x} + \alpha v^{2/3} \frac{\partial n}{\partial y} \right) v n dv = \text{const}$$

Далее легко получить соответствующие уравнения для полного числа частиц N и объемной концентрации C , которые в частном случае $k=2$ имеют вид

$$(3.8) \quad \frac{d}{d\xi} \left[1 + \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{11}{3} \right) \left(\frac{C_1}{3N_1} \right)^{2/3} \right] N_1 = \alpha_2 N_1 C_1$$

$$C_1 \left[1 + \frac{1}{6} \Gamma \left(\frac{14}{3} \right) \left(\frac{C_1}{3N_1} \right)^{2/3} \right] = 1 + \frac{1}{6 \cdot 3^{2/3}} \Gamma \left(\frac{14}{3} \right)$$

$$\xi = \frac{0.024 \epsilon E^2 C(0)}{\pi \mu} \left(\frac{x}{U_0} + \frac{y}{\alpha \langle v(0) \rangle^{2/3}} \right)$$

Уравнения (3.8) по виду совпадают с (3.3), поэтому их решение и исследование этого решения можно провести аналогично тому, как это сделано выше.

Поступила 2 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М., Каминский В. А., Синайский Э. Г. О захвате мелких капель крупными в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
2. Енукашвили И. М. О кинетической теории коагуляции в атмосферных облаках. В сб. «Физика облаков». Тбилиси, Мецниереба, 1967.
3. Головин А. М. Решение уравнения коагуляции облачных капель в восходящем потоке воздуха. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 5.
4. Scott W. T. Analytic studies of cloud droplet coalescence 1. J. Atmosph. Sci., 1968, vol. 25, No. 1.
5. Bleck R. A fast approximative method for integrating the stochastic coalescence equation. J. Geophys. Res., 1970, vol. 75, No. 27.
6. Енукашвили И. М., Бегалишвили Н. А. О численном решении интегральных кинетических уравнений коагуляции методом Монте-Карло. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1973, т. 9, № 8.
7. Espenscheid W. F., Kerker M., Matijevic E. Logarithmic distribution function for colloidal particles. J. Phys. Chem., 1964, vol. 68, No. 11.