МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1975

УДК 532.59+591.112.3

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБКАХ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА. СТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

И. М. РУТКЕВИЧ

(Москва)

Установившиеся течения крови по малым сосудам могут терять устойчивость в условиях реализации падающего участка на кривой зависимости давления от радиуса. Имеются эксперименты, подтверждающие существование такого участка [1]. В процессах раскачки возмущений важную роль играют вязкоупругие свойства стенок кровеносных сосудов, зафиксированные в опытах [2] и предсказанные реологическими моделями мышечной ткани (см., например, [3]). Линейный анализ устойчивости течений в сосудах с S- и N-образными статическими характеристиками дан в [4].

Результатом развития неустойчивости в нелинейных системах может быть образование стационарных волн конечной амплитуды. Такие движения исследуются ниже в безынерционном гидравлическом приближении. Для замыкания гидравлического описания привлечены модельные нелинейные уравнения, связывающие конечные нестационарные возмущения давления и деформации.

Для сосудов S-типа изучен класс ограниченных решений, содержащий периодические волны и солитоны. В случае N-образной характеристики определены условия существования периодических решений; дано описание периодических волн в гармоническом приближении. Обнаружено, что длины ограниченных стационарных волн в сосудах обоих типов соответствуют области линейной неустойчивости.

1. Пусть на установившееся течение несжимаемой вязкой жидкости в длинной осесимметричной трубке с податливой стенкой наложены нестационарные возмущения. В предположении о применимости безынерционного гидравлического приближения в работе [4] было получено уравнение, связывающее возмущения радиальной деформации трубки $\delta\varepsilon(x,t)$ и среднего по сечению давления $\delta p(x,t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2u_*\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\varepsilon=\frac{R_*^3}{16\mu R_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta p \tag{1.1}$$

$$(\varepsilon=R/R_0-1,\ \delta\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon_*,\ \delta p=p-p_*)$$

Звездочкой будем отмечать параметры невозмущенного потока. Здесь p_* и $u_*\geqslant 0$ — средние по сечению давление и скорость соответственно, R_* — радиус трубки, R_0 — значение радиуса, при котором в стенке отсутствуют внутренние напряжения.

В [4] уравнение (1.1) выведено из линеаризованного уравнения движения в проекции на ось x и уравнения неразрывности. При этом пренебрегалось градиентами невозмущенных величин (за исключением dp_*/dx), что допустимо при рассмотрении возмущений, пространственный масштаб которых мал по сравнению с длиной изменения невозмущенных параметров. Это условие позволяет также считать коэффициенты уравнения (1.1) постоянными.

В безынерционном приближении уравнение движения имеет вид

$$uF=-(8\pi\mu)^{-1}F^2\partial p/\partial x,\ F=\pi R^2$$

Линеаризованная форма этого уравнения используется при выводе соотношения (1.1). Последнее можно использовать в нелинейном анализе, если $\delta(F^2) \ll F_*^2$, т. е. при условии

(1.2) $$|\delta\varepsilon| \ll {}^1/_4(1+\varepsilon_*)$$

Кроме (1.1), имеется еще одно соотношение между величинами δp и $\delta\varepsilon$, которое следует из реологического закона поведения тонкой несжимаемой стенки и уравнения баланса радиальных сил, действующих на элемент стенки. Если внешнее давление p_e постоянно, а для вязкоупругого материала стенки принимается нелинейное обобщение модели Пойнтинга, то, как показано в [4], «реологическая» связь между p и ε будет иметь вид

(1.3) $$\partial p/\partial t + \varphi(p, \varepsilon) = H(p, \varepsilon)\,\partial\varepsilon/\partial t$$

(1.4) $$H(p, \varepsilon) > 0$$

Статическая характеристика на плоскости εp определяется из уравнения $\varphi=0$. Функция $H(p, \varepsilon)$ имеет смысл высокочастотного упругого модуля и должна удовлетворять условию (1.4), обеспечивающему эволюционность модели [4].

Для конечных отклонений параметров от их значений в установившемся состоянии из (1.3) получим

(1.5) $$(\partial/\partial t)\,\delta p + \varphi(p_* + \delta p,\ \varepsilon_* + \delta\varepsilon) = H(p_* + \delta p,\ \varepsilon_* + \delta\varepsilon)\,(\partial/\partial t)\,\delta\varepsilon$$

Для случаев, когда уравнение $\varphi=0$ определяет однозначную зависимость $\varepsilon(p)$ или $p(\varepsilon)$, соответственно запишем

(1.6) $$\varphi(p_* + \delta p,\ \varepsilon_* + \delta\varepsilon) = C(p_*, \varepsilon_*;\ \delta p, \delta\varepsilon)\,[\delta\varepsilon - \Phi(\delta p)]$$

(1.7) $$\varphi(p_* + \delta p,\ \varepsilon_* + \delta\varepsilon) = D(p_*, \varepsilon_*;\ \delta p, \delta\varepsilon)\,[\Psi(\delta\varepsilon) - \delta p]$$

Представления (1.6), (1.7) справедливы, если $\varphi(p, \varepsilon)$ — регулярная функция своих аргументов. Тогда C, Φ, D и Ψ регулярным образом зависят от возмущений δp, $\delta\varepsilon$. Параметры p_*, ε_* войдут также в функции Φ и Ψ. Естественно предположить, что статическая характеристика является нулевым многообразием простой кратности для функции $\varphi(p, \varepsilon)$ (в противном случае материал стенок должен обнаруживать нелинейное поведение при бесконечно малых отклонениях от произвольного состояния равновесия). Тогда функции C и D будут сохранять знак при любых возмущениях δp, $\delta\varepsilon$.

Пусть точка (ε_*, p_*) лежит на падающем участке статической характеристики. При качественном исследовании S- и N-образную формы характеристик можно описать полиномами третьей степени, что соответствует удержанию членов третьего порядка в разложениях функций $\Phi(\delta p)$ и $\Psi(\delta\varepsilon)$ в степенные ряды. Примем следующую аппроксимацию:

(1.8) $$\Phi(\delta p) = G^{-1}\delta p\,(1 - \delta p/\delta p^-)\,(1 - \delta p/\delta p^+)$$
$$\Psi(\delta\varepsilon) = G\,\delta\varepsilon\,(1 - \delta\varepsilon/\delta\varepsilon^-)\,(1 - \delta\varepsilon/\delta\varepsilon^+)$$

(1.9) $$p_1 < p_* < p_2,\quad |\delta p| \leqslant p_{\max} - p_1 = p_2 - p_{\min}$$

(1.10) $$\varepsilon_1 < \varepsilon_* < \varepsilon_2,\quad |\delta\varepsilon| \leqslant \varepsilon_{\max} - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_{\min}$$

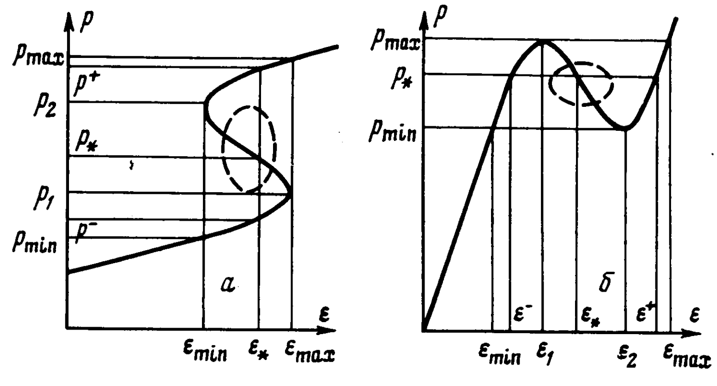
Здесь $\delta p^- = p^- - p_* < 0$, $\delta p^+ = p^+ - p_* > 0$ — значения возмущений давления, соответствующие положениям равновесия на возрастающих участках S-образной характеристики при фиксированной деформации $\varepsilon = \varepsilon_*$. Величины $\delta\varepsilon^- = \varepsilon^- - \varepsilon_* < 0$, $\delta\varepsilon^+ = \varepsilon^+ - \varepsilon_* > 0$ имеют аналогичный смысл для N-образной характеристики в случае фиксированного давления. Обозначения характерных точек на кривых S- и N-типа приведены на фиг. 1, *а* и *б* соответственно. В (1.8) величина $G=dp_*/d\varepsilon_*<0$ имеет смысл статического дифференциального модуля упругости в точке (ε_*, p_*).

Неравенства (1.9) и (1.10) задают области, в которых будут использованы входящие в (1.8) функции Φ и Ψ соответственно.

Для совместимости второго неравенства (1.10) с (1.2) достаточно ввести ограничение на ширину N-образного участка

$$\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}\ll {}^1/_4(1+\varepsilon_*)$$

В системе S-типа условие (1.2) также приводит к ограничениям, вид которых устанавливается при анализе конкретных волновых движений.



Фиг. 1

Будем считать возмущения δp и $\delta\varepsilon$ достаточно малыми для того, чтобы принять

$$C(p_*, \varepsilon_*;\, \delta p, \delta\varepsilon)\approx C(p_*, \varepsilon_*;\, 0, 0)=C_*$$

$$D(p_*, \varepsilon_*;\, \delta p, \delta\varepsilon)\approx D(p_*, \varepsilon_*;\, 0, 0)=D_* \tag{1.11}$$

$$H(p_*+\delta p, \varepsilon_*+\delta\varepsilon)\approx H(p_*, \varepsilon_*)=H_*$$

Хотя модельный характер допущений (1.11) очевиден, они оправданы при качественном исследовании ввиду знакопостоянства функций C, D и H. С другой стороны, учет нелинейных членов в (1.8) имеет принципиальное значение для описания развития неустойчивостей и распространения стационарных волн.

Используя соотношения (1.6)–(1.8) и (1.11), придем к следующим двум вариантам уравнения (1.5):

$$[(1-\delta p/\delta p^-)(1-\delta p/\delta p^+)-\lambda\partial/\partial t]\delta p=G(1+\theta\partial/\partial t)\delta\varepsilon \tag{1.12}$$

$$(1-\lambda\partial/\partial t)\delta p=G[(1-\delta\varepsilon/\delta\varepsilon^-)(1-\delta\varepsilon/\delta\varepsilon^+)+\theta\partial/\partial t]\delta\varepsilon$$

$$\lambda=G/C_*,\ \theta=-H_*/C_*;\ \lambda=1/D_*,\ \theta=-H_*/(GD_*) \tag{1.13}$$

Первое уравнение (1.12) и первая пара формул (1.13) относятся к модели S-типа, остальные соотношения — к модели N-типа.

Поскольку $\lambda/\theta=-G/H_*>0$, величины λ и θ должны иметь одинаковый знак. В дальнейшем будем считать, что $\lambda>0$, $\theta>0$ для модели S-типа и $\lambda<0$, $\theta<0$ для модели N-типа.

Эти условия приняты по следующим соображениям. Неустойчивость состояний, описываемых падающими участками, должна проявляться при фиксированной деформации в сосудах S-типа и при фиксированном давлении в сосудах N-типа. Иной выбор знаков привел бы к неадекватному описанию реальных систем.

Поведение возмущений в трубках с S и N-образными характеристиками описывается системами, состоящими из (1.1) и соответствующего уравнения (1.12). Исключая из первой системы возмущение $\delta\varepsilon$, а из второй величину δp, получим нелинейные уравнения третьего порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2u_*\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\delta p\left(1-\frac{\delta p}{\delta p^-}\right)\left(1-\frac{\delta p}{\delta p^+}\right)-\lambda\frac{\partial}{\partial t}\delta p\right]+$$

$$+\eta\left(1+\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta p=0\qquad(\lambda>0,\ \theta>0)\tag{1.14}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2u_*\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(1-\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\delta\varepsilon+\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\delta\varepsilon\left(1-\frac{\delta\varepsilon}{\delta\varepsilon^-}\right)\left(1-\frac{\delta\varepsilon}{\delta\varepsilon^+}\right)+\right.$$

$$\left.+\theta\frac{\partial}{\partial t}\delta\varepsilon\right]=0\qquad(\lambda<0,\ \theta<0),\qquad \eta=-GR_*^3/(16\mu R_0)>0$$

Первое уравнение (1.14) относится к модели S-типа, второе — к модели N-типа. Если

$$|\delta p|\ll\min(\delta p^+,\ |\delta p^-|),\ |\delta\varepsilon|\ll\min(\delta\varepsilon^+,\ |\delta\varepsilon^-|)$$

то от (1.14) можно перейти к линеаризованным уравнениям, данным в [4].

Сформулированные нелинейные уравнения могут быть использованы для анализа процессов, развивающихся при потере устойчивости.

2. Будем искать решение первого уравнения (1.14) в виде стационарных волн

$$\delta p=f(x-Vt)\equiv f(z),\ V=\text{const}\tag{2.1}$$

Дифференциальное уравнение для функции f после однократного интегрирования приводится к виду

$$\begin{gathered}-\eta\theta Vf''+(\eta+2\lambda u_*V-\lambda V^2)f'+(2u_*-V)P(f)=\text{const}\\ P(f)=f(1-f/f_-)(1-f/f_+),\ f_\mp=\delta p^\mp\end{gathered}\tag{2.2}$$

Рассматривая семейство решений, содержащее нулевое возмущение, положим константу в правой части (2.2) равной нулю. Тогда после умножения уравнения на f' получим

$$[-{}^1\!/_2\eta\theta Vf'^2+(2u_*-V)Q(f)]'+(\eta+2\lambda u_*V-\lambda V^2)f'^2=0\tag{2.3}$$

$$Q(f)=\int\limits_0^f P(f)\,df=\frac{f^4}{4f_-f_+}-\frac{f^3}{3}\left(\frac{1}{f_-}+\frac{1}{f_+}\right)+\frac{f^2}{2}$$

Для того чтобы решение уравнения (2.3) было периодическим или принимало одинаковые значения при $z\to\pm\infty$, коэффициент при f'^2 должен равняться нулю. Поэтому периодические волны должны распространяться со скоростями

$$V=V_{1,2}=u_*\mp\sqrt{c_s^2+u_*^2},\ c_s=\sqrt{\eta/\lambda}\tag{2.4}$$

Величины $V_{1,2}$ совпадают со скоростями консервативных волн бесконечно малой амплитуды в трубках S-типа [4].

Интегрируя уравнение (2.3) с учетом (2.4), получим

$${}^1\!/_2mf'^2+Q(f)=E=\text{const},\quad m=\eta\theta V/(V-2u_*)>0,\ V=V_{1,2}\tag{2.5}$$

Легко усмотреть формальную аналогию уравнения (2.5) с законом сохранения энергии при одномерном движении частицы массы m в поле с потенциалом $Q(f)$. При этом константа E имеет смысл полной энергии. Функция $Q(f)$ имеет минимум ($Q=0$) при $f=0$ и два максимума ($Q=Q_\mp$) при $f=f_\mp$. Финитное движение возможно только внутри «потенциальной ямы», т. е. при условии

$$0\leqslant E\leqslant \min(Q_-, Q_+) \tag{2.6}$$

Рассмотрим сначала случай $f_++f_->0$, соответствующий положению точки (ε_*, p_*) ниже центра симметрии S-образного участка (фиг. 1, a). Тогда будет $Q_-<Q_+$. При выполнении (2.6) уравнение $Q(f)=E$ имеет четыре вещественных корня, два из которых расположены на отрезке $[f_-, f_m]$, где f_m — наименьший положительный корень уравнения $Q(f)=Q_-$

$$f_m={}^1/_3[2f_+-f_--\sqrt{2(2f_+-f_-)(f_++f_-)}]$$

Пусть $f_i=f_i(f_+, f_-, E)$ — корни уравнения $Q(f)=E$, пронумерованные в порядке возрастания. При $0<E\leqslant Q_-$ имеют место неравенства

$$f_1\leqslant f_-\leqslant f_2<0<f_3\leqslant f_m<f_+<f_4$$

Ограниченные интегралы уравнения (2.5) изменяются на отрезке $[f_2, f_3]$ и представимы в виде

$$f(z)=f_4+(f_3-f_4)[1-a\,\mathrm{sn}^2(\rho(z-z_0);q)]^{-1} \tag{2.7}$$

$$a=\frac{f_3-f_2}{f_4-f_2},\qquad q=\sqrt{\frac{(f_3-f_2)(f_4-f_1)}{(f_4-f_2)(f_3-f_1)}},\qquad \rho=\sqrt{\frac{(f_4-f_2)(f_3-f_1)}{-8mf_+f_-}}$$

Константу интегрирования z_0 без ограничения общности примем равной нулю. Величина q — модуль эллиптической функции Якоби $\mathrm{sn}\,\rho z$. Решение (2.7) описывает периодические волны, длины которых выражаются формулами

$$l_{1,2}=2K(q)/\rho_{1,2} \tag{2.8}$$

Здесь $K(q)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\rho_{1,2}$ — значения ρ при $V=V_1$ и $V=V_2$ соответственно. Если принять для амплитуды волны A_f определение $2A_f=\max f-\min f$, получим $A_f={}^1/_2(f_3-f_2)$.

Длина волн и их амплитуда — возрастающие функции параметра E. При $E\to0$ будет $A_f\to0$, $l_{1,2}\to l_{1,2}^0$, и распределения (2.7) близки к линейным консервативным волнам [4]

$$f(z)\approx A_f\cos(2\pi z/l_{1,2}^0)$$

$$l_{1,2}^0=2\pi\sqrt{\eta\theta}(\sqrt{M_s^2+1}\mp M_s),\quad M_s=u_*/c_s$$

Максимум амплитуды достигается, когда $E\to Q_-$. При этом $q\to1$, $\mathrm{sn}\to\mathrm{th}$, $l_{1,2}\to\infty$, $2A_f\to f_m-f_-$ и (2.7) переходит в распределение, описывающее уединенные волны (солитоны)

$$\begin{gathered} f=f_4^++(f_m-f_4^+)(1-a_+\,\mathrm{th}^2\rho_+z)^{-1}\\ f_4^+={}^1/_3[2f_+-f_-+\sqrt{2(2f_+-f_-)(f_++f_-)}]\\ a_+=(f_m-f_-)/(f_4^+-f_-),\quad \rho_+={}^1/_2\sqrt{(1-f_-/f_+)/m} \end{gathered} \tag{2.9}$$

В периодических волнах (2.7) гребни ($f\approx f_3$) являются более узкими, чем впадины ($f\approx f_2$). Это различие усиливается с ростом амплитуды. Для уединенных волн (2.9) будет $f\to f_-$ при $z\to\pm\infty$. Ширина Δ солитонного горба по порядку величины равна

$$(2.10)\qquad \Delta\approx 4\sqrt{\eta}\theta(\sqrt{M_s^2+1}\mp M_s)\operatorname{Arth}[(2-a_+)^{-1/2}](1-f_-/f_+)^{-1/2}$$

для уединенных волн, распространяющихся со скоростями V_1 и V_2 соответственно. Таким образом, рост «числа Маха» M_s приводит к сжатию горбов в волнах, бегущих вверх по потоку, и к расплыванию — при распространении вниз по потоку.

Можно показать, что $\langle f\rangle<0$, где $\langle f\rangle$ – среднее за период значение распределения (2.7), поэтому периодические нелинейные волны приводят к уменьшению постоянной составляющей давления.

На фазовой плоскости ff' при $V=V_{1,2}$ одно из положений равновесия $(0,0)$ является центром, два других, $(f_-, 0)$ и $(f_+, 0)$ – седлами. Расположение интегральных кривых схематически показано на фиг. 2. Замкнутая сепаратриса, проходящая через точки $(f_-, 0)$ и $(f_m, 0)$, соответствует солитону.

Случай $f_++f_-<0$, отвечающий расположению точки (ε_*, p_*) выше центра симметрии S-образного участка, заменой $f\to -f$ сводится к рассмотренному выше. Поведение решений описывается формулами (2.7) – (2.10), если произвести в них (и в выражения для f_m) замену: $f\to -f$, $f_\mp\to -f_\mp$, $f_{1,2,3,4}\to -f_{4,3,2,1}$.

Величины $f_{4,3,2,1}$ – расположенные в порядке убывания корни уравнения $Q(f)=$ $=E$ при $0<E\leqslant Q_+$ и $f_++f_-<0$. В этом случае впадины волн будут более узкими, чем гребни, и величина $\langle f\rangle>0$. Солитоны становятся «перевернутыми»: $f(0)=-f_m<0$, $f(\pm\infty)=f_+>0$.

При $f_++f_-=0$ гребни и впадины волн приобретают одинаковую форму, а зависимость (2.7) можно привести к виду

$$f=f_3\operatorname{sn}(K(q_0)-\rho_0 z;\ q_0),\quad q_0=f_3/f_4,\quad \rho_0=2\rho/(1+q_0)$$

В этом случае $\langle f\rangle=0$. Периодические решения при $f_++f_-=0$ изображаются на фазовой плоскости симметричными относительно координатных осей замкнутыми кривыми, заполняющими линзообразную область. Граница области — замкнутая кривая с изломами в седловых точках. В отличие от асимметричного случая верхняя и нижняя части сепаратрисы не реализуются в одном решении и отвечают двум независимым ударным волнам шириной Δ_1

$$f=\pm f_+\operatorname{th}\rho_+ z,\quad \Delta_1\approx 2\sqrt{2\eta}\theta(\sqrt{M_s^2+1}\mp M_s)$$

Распределение деформации в рассмотренных волнах имеет вид

$$(2.11)\qquad \delta\varepsilon(z)=\eta G^{-1}(V-2u_*)^{-1}f'(z)$$

Из (2.11) следует, что траектории, которые описывает изображающая точка $(\varepsilon_*+\delta\varepsilon,\ p_*+\delta p)$ за период волны на плоскости εp, получаются аффинным преобразованием замкнутых интегральных кривых на фазовой плоскости ff'. На фиг. 1, *а* пунктиром показана типичная траектория для симметричного случая $f_++f_-=0$.

Среди множества ограниченных решений наибольшее значение $|\delta\varepsilon|$ достигается при $f_++f_-=0$ для ударных волн давления в их центре, являющемся вершиной деформационного солитона. После простых вычислений найдем

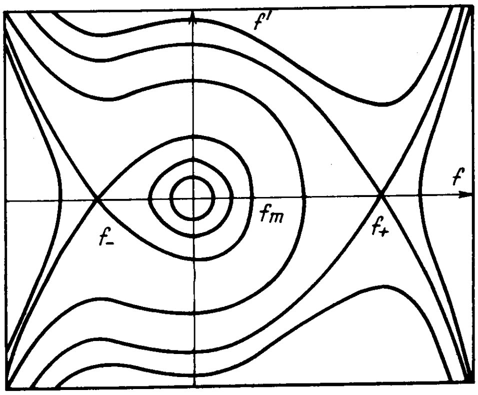
$$\max|\delta\varepsilon|=(27/32)^{1/2}(\lambda/\theta)^{1/2}(\varepsilon_{\max}-\varepsilon_{\min})$$

Значения $\varepsilon_{\max}$, $\varepsilon_{\min}$ показаны на фиг. 1, *а*. Следовательно, условие (1.2) будет выполнено для всех рассмотренных движений, если ширина S-образного участка удовлетворяет требованию

$$\varepsilon_{\max}-\varepsilon_{\min}\ll(2/27)^{1/2}(\theta/\lambda)^{1/2}(1+\varepsilon_*)$$

Как следует из (2.8), диапазон длин волн, в котором возможны нелинейные периодические движения, совпадает с областью линейной неустойчивости [4]. Это позволяет предположить существование класса малых начальных возмущений, в процессе роста которых формируются распределения (2.7), (2.9). Отметим, что образование в сосудах S-типа периодических волн только в надкритической области ($l_i > l_i^0$) и монотонное стремление их амплитуды к нулю при $l_i \to l_i^0$ характерно для неустойчивых систем с мягким возбуждением.

3. Рассмотрим стационарные волны в трубке с N-образной характеристикой. Полагая



Фиг. 2

$$\delta\varepsilon = g(x - Vt) \equiv g(z), \quad V = \text{const} \tag{3.1}$$

из второго уравнения (1.14) после однократного интегрирования получим

$$g'' + T(g)g' + k^2 g = \text{const} \tag{3.2}$$

$T(g) = -(\alpha + \beta g + \gamma g^2)/(\theta V)$, $\alpha = 1 - V(2u_* - V)/c_n^2$, $\beta = -2(g_+ + g_-)/(g_- g_+)$, $\gamma = 3/(g_- g_+)$, $g_\mp = \delta\varepsilon^\mp$, $c_n = (-\eta/\lambda)^{1/2}$, $k^2 = -(2u_* - V)/(\eta\theta V)$

Константу в правой части уравнения (3.2) положим равной нулю (по тем же соображениям, что и в уравнении (2.2)). Тогда, умножая обе части (3.2) на g, получим

$$\left(gg' + \int gT(g)\,dg\right)' - g'^2 + k^2 g^2 = 0 \tag{3.3}$$

Для того чтобы уравнение (3.3) имело периодическое решение, необходимо

$$\int_z^{z+l} (k^2 g^2 - g'^2)\,dz = 0$$

Здесь l — длина волны. Следовательно, должно быть $k^2 > 0$, т. е. $0 < V < 2u_*$.

Умножая уравнение (3.2) на g' и интегрируя по интервалу длины l, придем к соотношению

$$\int_z^{z+l} Tg'^2\,dz = 0 \tag{3.4}$$

Отсюда видно, что для существования периодического решения необходима смена знака функции $T(g)$, поэтому $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

Для того чтобы периодическое решение являлось устойчивым во времени предельным циклом на фазовой плоскости gg', должно быть $\alpha > 0$. Тогда предыдущее неравенство выполняется автоматически, так как $\gamma < 0$. (При $\alpha < 0$ с ростом времени движение вдоль интегральных кривых в окрестности начала координат плоскости gg' происходило бы по направлению к особой точке (0, 0), так как $V > 0$.)

Неравенства $0 < V < 2u_*$, $\alpha > 0$ вместе с условием $\gamma < 0$ обеспечивают существование предельного цикла на фазовой плоскости. Это утверждение доказывается с помощью теоремы Бендиксона (см., например, [5]). Совместное решение этих неравенств имеет вид

$$
\begin{aligned}
&0<V<2u_* \qquad (M_n<1)\\
(3.5)\qquad &0<V<V_1, \quad V_2<V<2u_* \qquad (M_n\geqslant 1)\\
&M_n=u_*/c_n, \quad V_{1,2}=u_*\mp\sqrt{u_*^2-c_n^2}
\end{aligned}
$$

Величины $V_{1,2}$ совпадают со скоростями линейных консервативных волн в системе N-типа [4]. Периодические решения уравнения (3.2) с нулевой правой частью удовлетворяют условию $\langle g\rangle=0$.

Переходя к новым переменным (ξ, h), приведем уравнение (3.2) к виду

$$
\begin{aligned}
(3.6)\qquad &h''+s(1+bh-h^2)h'+h=0\\
&\xi=kz, \quad h=(-\gamma/\alpha)^{1/2}g, \quad s=(\lambda/\theta)^{1/2}(r^{-1}-r)\\
&r=2M_n\varkappa/(1+\varkappa^2), \quad b=(\beta/\alpha)(-\alpha/\gamma)^{1/2}, \quad \varkappa=(-\eta\theta)^{1/2}k
\end{aligned}
$$

Здесь штрихами обозначены производные по ξ. При $b=0$ уравнение (3.6) переходит в уравнение Ван-дер-Поля. Если параметр s достаточно мал, периодическое решение уравнения (3.6) можно искать в виде ряда

$$
h=h_0\sin\xi+\sum_{n=1}^{\infty}s^n h_n(\xi)
$$

Подставляя нулевое приближение в интегральное соотношение (3.4), найдем $h_0^2=4$. Поэтому для волны деформации в гармоническом приближении получим

$$
\begin{aligned}
&g/g_{\max}\approx A_g\sin[2\pi l^{-1}(x-Vt)]\\
(3.7)\qquad &g_{\max}=2\sqrt{-{}^1/_3 g_- g_+}, \quad A_g=\sqrt{1-4M_n^2\varkappa^2(1+\varkappa^2)^{-2}}\\
&l=2\pi\sqrt{-\eta\theta}/\varkappa, \quad V=2u_*/(1+\varkappa^2)
\end{aligned}
$$

Нелинейные эффекты в этом распределении проявляются в зависимости относительной амплитуды A_g от длины волны. В соответствии с (3.5) безразмерное волновое число $\varkappa$ в формулах (3.7) изменяется в следующих пределах:

$$
\begin{aligned}
&0<|\varkappa|<\infty \qquad (M_n<1)\\
(3.8)\qquad &0<|\varkappa|<\varkappa_2, \quad \varkappa_1<|\varkappa|<\infty \qquad (M_n\geqslant 1)\\
&\varkappa_{1,2}=M_n\pm\sqrt{M_n^2-1}
\end{aligned}
$$

Из (3.8) следует, что длины стационарных волн лежат в линейно-неустойчивом диапазоне [4]. В системе N-типа периодическое возмущение всегда распространяется вниз по потоку, а его скорость зависит от длины волны (в отличие от случая S-образной характеристики, для которого скорость волн в соответствии с (2.4) определяется только параметрами невозмущенного потока).

На фиг. 1, *б* пунктиром показана характерная траектория волнового процесса на плоскости εp. При $s\gg 1$ представление (3.7) несправедливо и существен ангармонизм волн. Из (3.9), (3.7) следует, что условие $s\gg 1$ эквивалентно неравенству

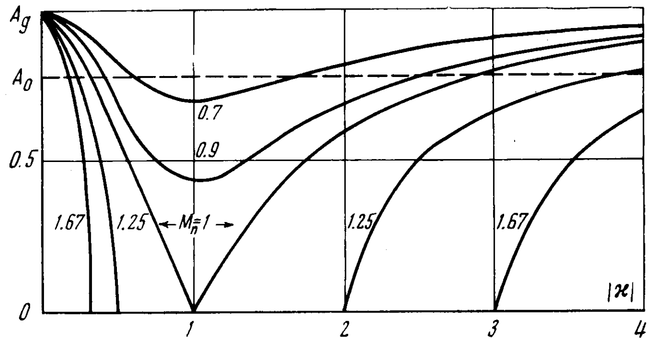
$$
A_g\gg A_0=(\sqrt{\nu^2+4\nu}-\nu)^{1/2}/\sqrt{2}, \qquad \nu=\theta/\lambda
$$

На фиг. 3 показаны зависимости $A_g(|\varkappa|)$ при различных M_n. Кривая, соответствующая значению $M_n=1$, разделяет области «жесткой» ($M_n<1$) и «мягкой» ($M_n>1$) неустойчивости. Гармоническое приближение неприменимо в полосе $A_0<A_g<1$. Величина A_0 на фигуре выбрана при $\nu=1$.

В качестве примера ангармонического поведения рассмотрим случай $\varkappa=0$. Тогда $V=2u_*$ и уравнение (3.2) имеет ограниченное точное решение вида

$$|1-g_-/g|^{-\chi}|1-g_+/g|^{-1+\chi}=\exp[z/(2u_*\theta)] \tag{3.9}$$
$$\chi=(1-g_-/g_+)^{-1}$$

Формула (3.9) описывает две независимые ударные волны, распространяющиеся в режиме фиксированного давления ($\delta p\equiv0$). В каждой из



Фиг. 3

них осуществляется переход от неустойчивого состояния перед волной ($g\to0$ при $z\to\infty$) к одному из устойчивых состояний за волной ($g\to g_-$ или $g\to g_+$ при $z\to-\infty$).

4. Полученные выше результаты в принципе допускают экспериментальную проверку. Временной период и амплитуда стационарной волны могут быть определены из осциллограммы давления $p(t)$, полученной для некоторого сечения кровеносного сосуда. Если, кроме того, будет измерена скорость волны, то по известным характеристикам невозмущенного потока и данным динамического эксперимента станет возможной оценка характерных времен λ и θ. Такая оценка может представить самостоятельный интерес в связи с исследованиями релаксационного спектра стенок малых сосудов.

Для сосудов S-типа выражение для периода τ нелинейных колебаний устанавливается из (2.4), (2.7), (2.8) и при $f_++f_->0$ имеет вид

$$\tau=\tau_0(2\sqrt{2}/\pi)K(q)[-(f_4-f_2)(f_3-f_1)/(f_+f_-)]^{-1/2} \tag{4.1}$$
$$\tau_0=2\pi\sqrt{\lambda\theta}$$

Здесь τ_0 — период колебаний в консервативной линейной волне; величина q определена в (2.7). При заданном значении константы E (см. формулу (2.5)) величина τ одинакова для волн, распространяющихся вверх и вниз по потоку.

Известное расположение точки (ε_*, p_*) на статической характеристике и найденная экспериментально величина $f_3=\max p(t)-p_*$ позволят определить константу $E=Q(f_3)$ и рассчитать остальные корни уравнения $Q(f)=E$. Тогда по полученному из осциллограммы периоду колебаний τ из (4.1) можно найти τ_0.

В симметричном случае ($f_++f_-=0$) формула (4.1) упрощается и определяет явную зависимость периода от относительной амплитуды A

$$\tau/\tau_0=(2\sqrt{2}/\pi)(A+\sqrt{2-A^2})^{-1}K(q_A) \tag{4.2}$$
$$q_A=2A^{1/2}(2-A^2)^{1/4}(A+\sqrt{2-A^2})^{-1}, \qquad A=f_3/f_+$$

По измеренной скорости волны, движущейся в определенную сторону, и известной скорости потока из выражений (2.4) находится «скорость звука» c_s и, следовательно, величина λ. Тогда время ретардации θ определится из второй формулы (4.1). Заметим, что путем измерения скоростей волн, распространяющихся в разные стороны, из (2.4) можно найти скорость потока u_*.

Для волн давления в сосудах N-типа в гармоническом приближении из (1.1) и (3.7) получим

$$\delta p = A_p \cos\left[2\pi l^{-1}(x - Vt)\right], \qquad A_p = G g_{\max} \sqrt{-\theta/\eta}\, u_* [2\varkappa/(1+\varkappa^2)] A_g \tag{4.3}$$

Из (4.3) и (3.7) следуют формулы:

$$\begin{aligned} \theta &= -(2u_*V - V^2)\tau^2/(4\pi^2\eta) \\ \lambda &= \{1 - (A_p\tau)^2[2\pi\theta g_{\max} G]^{-2}\}\tau^2/(4\pi^2\theta) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Величины τ и A_p определяются по осциллограмме. Если из эксперимента известна также скорость волны, то, зная параметры невозмущенного потока, по формулам (4.4) можно оценить реологические константы λ и θ.

Автор признателен С. А. Региреру за внимание к работе и полезные замечания по рукописи статьи, а также А. А. Бармину и А. Г. Куликовскому за обсуждение основных результатов.

Поступила 16 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johnson P. C.* Autoregulatory responses of cat mesenteric arterioles, measured in vivo. Circulat. Res., 1968, vol. 22, No. 2.
2. Гидродинамика кровообращения. М., «Мир», 1971.
3. *Усик П. И.* Континуальная механохимическая модель мышечной ткани. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
4. *Регирер С. А., Руткевич И. М.* Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Волны малой амплитуды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.