

ДВИЖЕНИЕ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ НАД ПОДВОДНЫМ ХРЕБТОМ

В. А. РЕУТОВ

(Москва)

Двумерное и трехмерное движение уединенной волны в слое жидкости переменной глубины было исследовано в [1, 2]. Было показано, что если невозмущенное состояние жидкости является состоянием покоя, то некоторая интегральная величина, характеризующая энергию волны, отнесенная к элементу фронта волны, сохраняется в процессе движения.

В данной работе, основываясь на этом свойстве, находится форма фронта волны при ее стационарном движении над бесконечным подводным цилиндрическим хребтом; предложена модель для описания волны предельной амплитуды; рассматривается нестационарное возмущение стационарного решения. Отметим, что частный случай — движение прямого фронта, ортогонального оси хребта, параллельно этой оси — был рассмотрен другим способом в [3].

1. Постановка задачи. Будем считать жидкость идеальной несжимаемой однородной, движение — потенциальным, трехмерным. Предположим, что

$$(1.1) \quad \frac{h_0^2}{\lambda^2} \sim \varepsilon = o(1), \quad \frac{a_0}{h} \sim \varepsilon$$

$$h_0^{-1} \frac{\partial h}{\partial x} \sim \beta_1, \quad h_0^{-1} \frac{\partial h}{\partial y} \sim \beta_1, \quad \kappa \sim \beta_1 \ll \lambda^{-1}$$

где $\zeta = -h(x, y)$ — уравнение поверхности дна, h_0 — характерная глубина, ε, β_1 — малые параметры, λ — характерная длина волны, a_0 — характерная амплитуда, κ — характерная кривизна фронта волны.

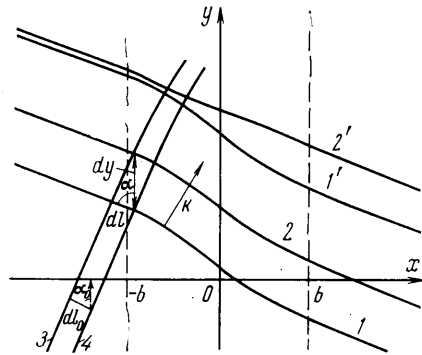
В случае когда глубина слоя жидкости постоянна, движение определяется одной функцией $\theta(x, y, t)$ — фазой волны. Фазу выбираем так, что значение $\theta(x, y, t) = 0$ соответствует гребню волны. Разрешенное относительно t последнее соотношение задает семейство линий фронта на плоскости (x, y) (фиг. 1, кривые 1, 2, 1'), совпадающей с невозмущенной поверхностью жидкости. Пусть $\mathbf{k} = \text{grad } \theta$ — волновой вектор; $c = -\theta_t k^{-1}$ — скорость волны, где $k = |\mathbf{k}|$, $\theta_t = \partial \theta / \partial t$.

Для учета неровности дна в аргументы неизвестных величин, кроме θ , введем независимые переменные x, y .

Пусть плотность полной энергии жидкости в данной точке есть $E(\theta, x, y, \zeta)$, $\zeta = \zeta_1(x, y, t)$ — уравнение свободной поверхности. Тогда

$$E(\theta, x, y) = \int_{-h}^{\zeta_1} E(\theta, x, y, \zeta) d\zeta, \quad \langle E(x, y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k^{-1} [E(\theta, x, y) - E_{\infty}(x, y)] d\theta$$

где предполагается существование $E_{\infty}(x, y) = \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} E(\theta, x, y)$; $E(\theta, x, y)$ — энергия жидкости в вертикальном столбе единичной площади поперечного



Фиг. 1

сечения; $\langle E(x, y) \rangle$ — средневолновая плотность энергии в данной точке (x, y) , которая является энергией, заключенной в возвышении, или в «шпалке», волны, проходящей через данную точку (x, y) в данном направлении $k(x, y)$ по ровному дну на глубине $h(x, y)$.

Проведем на плоскости (x, y) семейство кривых, ортогональных семейству фронтов, являющихся траекториями точек фронта. Из каждой линии фронта две близкие кривые (фиг. 1, кривые 3, 4) выделяют «элемент» фронта в разные моменты времени. Возьмем в момент t_0 один из них с центром в точке (x_0, y_0) с малой длиной dl_0 (фиг. 1). Все остальные вырезанные элементы фронта — его «образы» в соответствующие моменты времени. Из [1, 2] следует, что при движении элемента с точностью до $O(\beta_1^2)$ выполняются равенства

$$(1.2) \quad E(x_0, y_0) dl_0(x_0, y_0) = E(x, y) dl(x, y), \quad E(x, y) = [4/3 h(c^2 - h)]^{3/2}$$

где dl — любой из образов dl_0 (скобки у $\langle E \rangle$ опущены).

Отметим, что все применяемые формулы записаны в безразмерных переменных [1, 2], отнесенных к λ , h_0 , $(gh_0)^{1/2}$, где g — величина ускорения силы тяжести.

2. Стационарное движение уединенной волны над бесконечным цилиндрическим хребтом. Направим ось OY системы координат вдоль хребта. Ось ξ ортогональна плоскости OXY . Форма дна и движение фронта заданы в виде

$$\begin{aligned} \xi &= -h(x); \quad h(x) = \{h_-, x \leq -b; h(x), |x| \leq b; h_+, x \geq b\}, \\ \theta &= y - f(x) - c_1 t = 0, \quad c_1 = \text{const} > 0 \end{aligned}$$

где b , h_+ , h_- — постоянные, $f(x)$ — некоторая однозначная, достаточно гладкая функция.

В силу стационарности длина любого элемента dl , соответствующего dl_0 , есть функция только от x . Из (1.2) следует, что E тоже зависит только от x .

Обозначим $\alpha(x)$ угол, образованный осью OY с элементом dl (фиг. 1). Заметим, что $E \cos \alpha$ есть плотность потока средневолновой энергии через прямую $x = \text{const}$. В силу стационарности движения она постоянна. С другой стороны, $dl = dy \cos \alpha(x)$, где dy — расстояние вдоль оси OY между близкими положениями фронта (фиг. 1). При стационарном движении dy постоянно, так как из (1.2) следует, что $dy = \text{const} / E \cos \alpha$.

Уравнения (1.2) вместе с равенствами

$$(2.1) \quad c = c_1 \sin \alpha(x), \quad dl = dy \cos \alpha(x),$$

$$\alpha(x) = -\text{arc ctg } f'(x), \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq \pi/2$$

образуют систему, описывающую стационарное движение элемента фронта. Здесь неизвестными функциями являются $f(x)$, $c(x)$, $E(x)$, $dl(x)$, $\alpha(x)$.

Начальные условия выставим в момент t_0 , когда элемент находится слева от хребта в достаточно далеко удаленной от него точке (x_0, y_0) , где $dl(x_0) = dl_0$; $E(x_0) = E_0$; $\alpha(x_0) = \alpha_0$. Сама величина элемента dl_0 играет в системе (1.2), (2.1) роль параметра, от которого зависят E_0 и dy .

Систему (1.2), (2.1) сведем к одному уравнению, определяющему наклон элемента к оси Y , как функцию глубины $h(x)$

$$(2.2) \quad \sqrt{\sqrt[3]{\frac{z}{z-1} \frac{E^{o'}}{h^2}} + h'} = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad E^o = 3/4 (E_0 \cos \alpha_0)^{3/2}$$

$$(2.3) \quad 1 + [f'(x)]^2 = z(x), \quad h' = h / c_1^2, \quad E^{o'} = E^o / c_1^3, \quad f'(x) = df / dx$$

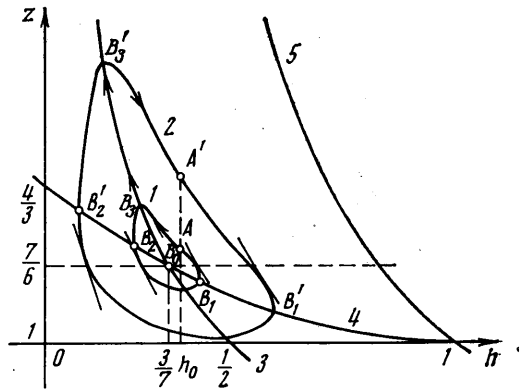
Для простоты штрихи у h' и $E^{o'}$ в дальнейшем опущены.

Область допустимых значений $z(x)$ для (2.2) есть $z > 1$. Случай $z(x) = 1$ соответствует $f(x) = \text{const}$. Соотношение (2.2) приводится к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно z с коэффициентами, зависящими от h, c, E^0 . Однако проще исследовать (2.2) графически.

При $E^0 \neq 0$ решение существует только при $h \in [h_{10}, h_{20}]$, $h_{10}(E^0) > 0, h_{20}(E^0) < 1$.

Преобразуем (2.2) к виду

$$E^0 = hz^{-4/3}(1-hz)(z-1)^{1/2} = k_1(z, h)$$



Фиг. 2

Это уравнение задает две ветви решения $z_i(h, E^0) > 1, i = 1, 2 (z_1 > z_2)$, которые при фиксированном E^0 на плоскости hz образуют замкнутую кривую (фиг. 2, кривая 1). Кривая с меньшим значением E (фиг. 2, кривая 2) целиком содержит внутри кривую с большим E^0 (фиг. 2, кривая 1). При $E^0 = E_*^0 = 9 \cdot 7^{-1/3}$ кривая стягивается в точку $B_0 (h_* = 3/7, z_* = 7/6)$. Точки кратности, в которых z_1 и z_2 сливаются, лежат на гиперболе $z = 4(h+3)^{-1}$ (фиг. 2, кривая 4, точки B_1, B_2).

В случае $E^0 = 0$ в качестве решения в рассматриваемой области следует брать отрезок гиперболы (фиг. 2, кривая 5) $zh = 1$, выкинув точки ее пересечения с осями Oh и Oz (фиг. 2). При этом $E = 0$, а $\cos \alpha \neq 0$.

Наклон элемента фронта к оси Y определяется только глубиной

$$f(x) = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{z(h(x), E^0) - 1} dx + f(x_0)$$

Знак « \pm » указывает, что возможная форма фронта определена с точностью до зеркального отображения относительно оси Y . (Из (2.2) видно, что E^0 — четная функция α_0 .) Если рассматривается случай движения элемента фронта через хребет слева направо, то $f'(x) < 0$ и надо брать знак « $-$ ». Если же переход происходит справа налево, то $f'(x) > 0$ и надо брать « $+$ ».

В рамках предположений (1.1) для отношения β амплитуды волны к глубине имеем [1, 2]

$$(2.4) \quad \beta = \frac{a}{h} = \frac{2(c - \sqrt{h})}{\sqrt{h}}, \quad \beta = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{zh}} - 1 \right)$$

где a — амплитуда, т. е. наибольшая высота подъема жидкости, достигающаяся на гребне волны. Во второй формуле (2.4) использованы (2.3), (2.1).

Линии $\beta = \text{const}$ образуют семейство гипербол. По их расположению легко проследить за изменениями амплитуды вдоль фронта. Для гиперболы (фиг. 2, кривая 3), проходящей через точку (h_*, z_*) , $\beta = (\sqrt{2} - 1)$. В точках кратности $z_i(h, E^0)$ имеем $\beta = \sqrt{1 + 3/h} - 2$.

Из представления о механизме разрушения волны следует, что для уединенной волны отношение β не может превышать предельного значе-

ния β_0 . Разрушение волны отнюдь не означает полного разрушения и исчезновения волны. При начале разрушения на гребне появляются «гребешки», или «языки», с которыми волна может продолжать движение и которые могут при определенных условиях исчезнуть. Существует несколько критериев для момента начала разрушения. Согласно критерию Стокса, волна разрушается, когда свободная поверхность образует на гребне угол в 120° , что соответствует $\beta=0.72$ [4, 5]. Другие критерии дают $\beta=0.82$, $\beta=0.86$, $\beta=1.21$ [2, 6]. Эксперименты показывают, что $\beta \in [0.72, 0.86]$ [2, 7].

Примем, что $\beta_0=2(\sqrt{2}-1) \approx 0.828$; тогда решением является часть кривой I , лежащая правее гиперболы $zh=1/2$ (фиг. 2, кривая \mathcal{J}), на которой находятся точки экстремума $\partial z(h, E^\circ)/\partial h=0$. Поэтому левые точки кратности не могут достигаться.

Случай вырождения кривой в точку B_0 соответствует прямому фронту, расположенному под углом к оси Y , причем глубина h постоянна. При $E_0=0$ в момент t получим, что $E_0=0$ во все время движения и решение соответствует движению с нулевой амплитудой (гипербола $zh=1$).

Итак, возможно с точностью до зеркального отображения две формы фронта $z=z_1(h, E^\circ)$ и $z=z_2(h, E^\circ)$ (фиг. 1, кривые I' , I''), обеспечивающие стационарность. При этом наклон элемента фронта определяется только глубиной, т. е. зависит от x неявным образом через $h(x)$. В качестве решения можно брать только участки замкнутой кривой $z_i=z_i(h, E^\circ)$, лежащие правее гиперболы $\beta=\beta_0$. Заметим, что решение $z_i(E^\circ, h)$ описывает явление разворота фронта волны на мелководье по направлению к «берегу» — вершине хребта (фиг. 1).

3. Движение уединенной волны с предельной амплитудой. Рассмотрим движение в слое жидкости, глубина которого монотонно, медленно убывает. Если бы не было разрушения волны, то при убывании $h(x, y)$ величина $\beta=a/h$ для данного элемента фронта, согласно предыдущему, возрастала бы и могла бы превысить значение β_0 . Но когда β превысит β_0 , начинается разрушение волны до тех пор, пока амплитуда не станет предельной. Так, постоянно и постепенно разрушаясь, движется волна. При этом вследствие различных сложных процессов, протекающих при разрушении, теряется полная энергия волны и уменьшается средневолновая плотность энергии.

Примем в качестве нулевого приближения следующую модель движения. Будем считать, что при движении волны с предельной амплитудой величина β в точности равна β_0 , а формулы, выражающие связи между a , E , c , h [1, 2], где каждая из перечисленных величин однозначно определяется двумя другими, справедливы в рамках данной модели. Тогда для фронта можно написать

$$(3.1) \quad \theta(x, y, t) = f(x, y) - t = 0, \quad a = 2(c\sqrt{h} - h)$$

Используя (3.1) и то, что $\beta=\beta_0$, получим уравнение

$$(3.2) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{c^2(x, y)} = \frac{1}{(1/2\beta_0+1)^2 h(x, y)}$$

Заметим, что это же уравнение описывает фронт волны при распространении света в неоднородной изотропной среде с переменным коэффициентом преломления $c^{-2}(x, y)$. Поверхности $f(x, y) = \text{const}$ представляют собой фронт волны, а характеристики — «световые лучи» — ортогональны

к семейству фронтов волн. Скорость движения точек фронта волны вдоль лучей не зависит от формы фронта и равна $c(x, y)$.

Начальным условием для уравнения (3.2) будет $f(x, y) = t_0$ — положение фронта в момент t_0 .

Вернемся к задаче о хребте, сформулированной в предыдущем пункте. (Тогда форма фронта задается $\theta = y - f(x) - c_1 t = 0$.) Допустим, что элементу фронта dl_0 соответствует амплитуда меньше предельной (фиг. 2, кривая 1, точка A), так что движение описывается соотношениями (1.2), (2.1). При движении в область с меньшей глубиной, т. е. по направлению к хребту, наступит момент, когда амплитуда станет предельной (фиг. 2, точка B₃), что соответствует пересечению кривой 1 с гиперболой $\beta = \beta_0$ (фиг. 2, кривая 3), где $\beta_0 = 2(\sqrt{2} - 1)$.

Дальнейшее движение будет происходить по гиперболе

$$(3.3) \quad z(h, E_1^\circ) h = (\beta_0/2 + 1)^{-2} = 1/2$$

Момент склейки $h = h_1$ (фиг. 2, кривая 3, точка B₃) находится из (3.3), где E_1° — параметр, определенный (2.2), а $z(h, E_1^\circ)$ — известное решение п. 2.

Как отмечалось выше, при движении волны с предельной амплитудой уменьшается средневолновая плотность энергии. Поэтому величина $E^{\circ 1/2} \sim E \cos \alpha$ — плотность потока средневолновой энергии через прямую $x = \text{const}$ — при разрушении волны должна убывать. Значение E° вдоль гиперболы $zh = 1/2$ имеет максимум в точке B₀ (фиг. 2). В силу сказанного движение с предельной амплитудой по направлению к хребту описывается только частью гиперболы, лежащей выше точки B₀, а в качестве решения для последующего движения с предельной амплитудой следует брать только верхнюю ветвь стационарного решения $z_1(h, E_1^\circ)$ (так как нижняя ветвь пересекает гиперболу ниже точки B₀).

Уравнение (3.3) обеспечивает стационарность дальнейшего движения. Форма фронта в случае предельной амплитуды

$$f(x) = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{[(1/2)\beta_0 + 1] \sqrt{h}^{-2} - 1} dx + f(x_0)$$

Знак «±» говорит, что положение фронта определено с точностью до зеркального отображения относительно оси Y. Чем меньше глубина, тем меньше угол α .

При переходе через хребет, как только глубина начнет возрастать (фиг. 2, кривая 3, точка B₃'), движение уже не может быть движением с предельной амплитудой, так как при таком движении с ростом h возрастает E° . Поэтому решение снова выходит на стационарное решение п. 2, но с новым назначением $E^\circ = E_1^\circ$. Для хребта с одной вершиной вторая склейка произойдет на вершине, скажем, при $h = h_2$ (фиг. 2, точка B₃'). Значение E_2° при $h = h_2$ определяется с помощью (1.2), (2.2), (2.4)

$$E_2^\circ = E^\circ(\beta_0 h_2, h_2) = E^\circ(h_2) \neq E_1^\circ = E^\circ(h_1)$$

Продолжая движение в сторону возрастания глубины, элемент при $h = h_0$ займет на фиг. 2 положение A'.

На склейках при h_1 и h_2 принятая модель обеспечивает непрерывность амплитуды и непрерывность наклона элемента фронта. В зависимости от рельефа дна склейка может происходить не один, а много раз.

Описанная модель существенно расширяет область существования решения, так как позволяет дойти с предельной амплитудой (по гиперболе β_0) до глубины $h = 0$, т. е. до «берега». При этом фронт волны будет

постепенно разворачиваться и в пределе станет параллелен оси Y , т. е. «берегу».

4. О нестационарном возмущении стационарного решения. Зададим уравнение фронта

$$(4.1) \quad \theta(x, y, t) = y - f(x) - c_1 t - u(x, t) = 0$$

где $u(x, t)$ — малое возмущение.

При условии (1.2) изменение $E(x, t)$ для элемента dl можно описать уравнением

$$(4.2) \quad dE/dt = E\kappa$$

где κ — кривизна малого элемента фронта. Левая часть (4.2) — полная производная по времени, $x(t)$ — закон движения элемента фронта. Можно показать, что закон изменения $E(x)$ в стационарном случае удовлетворяет уравнению (4.2).

Используя (2.3) и (4.1), получим для x , dx/dt :

$$\kappa = (f''(x) + u_{xx})h^{-3/2}, \quad \frac{dx}{dt} = c \cos \alpha = -k^2(c_1 + u_t)(f'(x) + u_x(x, t))$$

где u_{xx} , u_{xt} , u_{tt} , u_x , u_t — обозначения частных производных от $u(x, t)$, а $f''(x)$ — вторая производная от $f(x)$. Считая все производные от $u(x, t)$ малыми одного порядка малости и ограничиваясь в (4.2) членами первого порядка, получим

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a_1 u_{xx} + a_2 u_{xt} + a_3 u_{tt} + a_4 u_x + a_5 u_t &= 0 \\ a_1 &= c_1^5 h [(h+3)z-4], \quad a_2 = -6c_1^4 h z f'(x), \quad a_3 = 3c_1^3 h z^2 > 0 \\ a_4 &= c_1^5 \left[4h \frac{\partial z}{\partial h} + 15h z^2 - (12h + 9/2)z + 3 \right] \frac{dh}{dx} \\ a_5 &= -c_1^4 / 2 f'^{-1}(x) \left\{ h[(9+h)z-12] \frac{\partial z}{\partial h} + 3z(z-1)(2hz-3) \right\} \frac{dh}{dx} \end{aligned}$$

При $h = \text{const}$ a_4 , a_5 обращаются в нуль. Уравнение (4.3) — линейное, второго порядка относительно неизвестной.

Посмотрим, существует ли у (4.3) характеристика, параллельная образующей хребта. Напишем характеристическое уравнение

$$(4.4) \quad a_1 - a_2 \eta + a_3 \eta^2 = 0, \quad D = a_2^2 - 4a_1 a_3 = 12h^2 z^2 (1 - hz)$$

где $\eta = x'/t'$ и штрих означает дифференцирование по s — параметру вдоль характеристики. Его корни: $\eta_i = (a_2 \pm \sqrt{D}) / (2a_3)$, $i=1, 2$; η_1 соответствует знак «+» перед \sqrt{D} .

Для искомой характеристики $\eta=0$; отсюда $a_1=0$, т. е. на характеристике должно выполняться равенство $z=4(h+3)^{-1}$. Эта гипербола является геометрическим местом точек кратности стационарного решения. Значит, характеристики, параллельные хребту, проходят через точки кратности стационарного решения $z_i = z_i(h, E^0)$. Итак, в точках кратности $dx/dt = = a_2/a_3 = \eta_1$, $\eta_2=0$.

Заметим, что левая точка кратности не достигается, так как еще раньше будет достигнута предельная амплитуда.

В точках верхней ветви стационарного решения $z_1(h, E^0) > 4(h+3)^{-1}$, поэтому $a_1 > 0$ и дискриминант $D < a_2^2$. Следовательно, $\eta_i > 0$, $i=1, 2$, в случае фронта, для которого $f'(x) < 0$ (фиг. 1). Значит, для верхней ветви характеристики идут в сторону возрастания $x(t)$. Для нижней ветви характеристики направлены в разные стороны.

Из (4.4) следует, что для стационарного решения п. 2 при $E^\circ \neq 0$ выполняется условие гиперболичности уравнения (4.3). Линию склейки можно рассматривать как линию разрыва. Для выполнения условия эволюционности граничные условия на поверхности разрыва в линеаризованной задаче Коши должны позволять однозначно определить положение поверхности разрыва и начальные данные на уходящих от нее характеристиках. В применении к задаче о хребте получим следующее.

Рассмотрим первую склейку ($h=h_1$). Движение с допредельной амплитудой описывается уравнением второго порядка. У верхней ветви решения $z=z_1(h, E^\circ)$ существуют две приходящие на поверхность разрыва характеристики. Движение с предельной амплитудой описывается уравнением первого порядка. Так как характеристики ортогональны к фронту, то имеем одну уходящую характеристику.

Выставим в качестве граничных условий на склейке непрерывность амплитуды и непрерывность наклона элемента фронта. Для верхней ветви на первой склейке условие эволюционности выполнено, так как из двух граничных условий однозначно определяются положение склейки $h_1 = h_1(E_1^\circ, z_1)$ (E_1° — функция наклона и амплитуды) и положение одной уходящей с поверхности характеристики (по наклону элемента фронта).

Положение второй склейки — вершина хребта $h=h_2$ — однозначно определяется рельефом дна и не зависит от величины малых возмущений. Движение с предельной амплитудой дает одну приходящую характеристику, а верхняя ветвь $z_1=z_1(h, E^\circ)$ — две уходящие. При тех же, что и на первой склейке, граничных условиях условие эволюционности выполнено, так как из двух граничных условий на склейке однозначно находятся две неизвестные величины, определяющие движение с допредельной амплитудой (т. е. однозначно определяются начальные данные на двух уходящих характеристиках). Следовательно, можно построить решение, используя верхнюю ветвь $z_1=z_1(h, E^\circ)$.

В этом случае малые возмущения проходят над хребтом и уходят вправо за хребет (фиг. 1). Они могут влиять на стационарное решение $z_1(h, E^\circ)$ после второй склейки и не могут влиять на решение до первой склейки.

Для нижней ветви $z=z_2(h, E^\circ)$ одна из характеристик будет уходящей. Всего на первой склейке получаются две уходящие характеристики, и условие эволюционности не выполняется.

Поэтому, когда решение, соответствующее нижней ветви, достигает предельной амплитуды, его нельзя продолжать путем склейки с решением, соответствующим условию предельной амплитуды.

Автор благодарит А. Г. Куликовского за оказанное им внимание к работе и за ценные советы при подготовке рукописи к печати и А. А. Бармина, прочитавшего рукопись и сделавшего полезные замечания.

Поступила 2 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Grimshaw R. The solitary wave in water of variable depth. Pt. 1. J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, pt. 3.
2. Grimshaw R. The solitary wave in water of variable depth. Pt. 2. J. Fluid Mech., 1971, vol. 46, pt. 3.
3. Биченков Е. И., Гарипов Р. М. Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном. ПМТФ, 1969, № 2.
4. Price R. K. The breaking of water waves. J. Geophys. Res., 1971, vol. 76, No. 6.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
6. Laitone E. V. The second approximation to choidal and solitary waves. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 3.
7. Byatt-Smith J. G. B. An exact integral equation for steady surface waves. Proc. Roy. Soc., London, 1970, Ser. A, vol. 315, No. 1522.