

О ДИНАМИКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ДЕЛЬТОВЫХ ИЛИ ОСТРОВНЫХ ТЕРРИТОРИЙ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ПАВОДКОВ

А. Д. КОРОСТЕЛЕВ, А. Ж. МУФТАХОВ

(Астрахань)

Рассматривается динамика уровней грунтовых вод, гидравлически связанных с реками, при прохождении в последних паводков. Для плоских фильтрационных потоков, ограниченных с двух сторон каналами с вертикальными откосами, эта задача рассматривалась в [1-3], для полуограниченных потоков — в [4-8]. Ниже исследуется данный вопрос для симметричного плоского грунтового потока, ограниченного с двух сторон водоемами с наклонными откосами.

Применительно к неустановившейся фильтрации в плотинах при опускании уровней воды в бьефах, задачи динамики ограниченных фильтрационных потоков в массивах с наклонными откосами решались в [9, 10]. В [9] считалось, что одна из границ на процесс фильтрации не влияет (предположение о полуограниченности потока), а в [10] применялась предпосылка о мгновенном падении уровня воды в водоеме с последующим использованием метода последовательной смены стационарных состояний.

В настоящей статье приводятся решения, свободные от указанных допущений, из которых результаты [1-3] вытекают как частные случаи.

При прохождении паводка в гидрографе реки можно выделить четыре этапа: I — повышение уровня воды в реке, II — поддержание постоянного высокого уровня, III — спад уровня, IV — поддержание постоянного низкого уровня. Решение задачи получено последовательно для всех этапов применительно к вытянутому в плане острову или участку суши, ограниченному с двух сторон реками так, что в плане фильтрацию можно считать одномерной. Гидродинамическая схема рассматриваемой задачи представлена на фиг. 1. (В силу симметрии относительно оси полосы приведена лишь левая часть схемы.) На поверхности грунтовых вод имеет место инфильтрация (полив) или испарение постоянной интенсивности.

Нестационарная фильтрация грунтовых вод описывается уравнением¹

$$(0.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon = \frac{1}{a_1} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = 0.5h^2, \quad \varepsilon = \frac{\omega}{k}, \quad a_1 = \frac{k\langle h \rangle}{\mu}$$

где h — глубина грунтового потока, ω — интенсивность инфильтрации ($\omega > 0$) или испарения ($\omega < 0$), k — коэффициент фильтрации, μ — свободная пористость грунта, $\langle h \rangle$ — осредненная глубина грунтового потока.

Пусть до прохождения паводка имела место стационарная фильтрация, при этом распределение уровня грунтовых вод (начальное условие для первого этапа паводка) получается из (0.1) при $\partial u / \partial t = 0$ и имеет вид

$$(0.2) \quad u(x, 0) = u_0 + \frac{1}{2}\varepsilon(R_0^2 - x^2) = u_{1c}(x), \quad u_0 = 0.5h_0^2$$

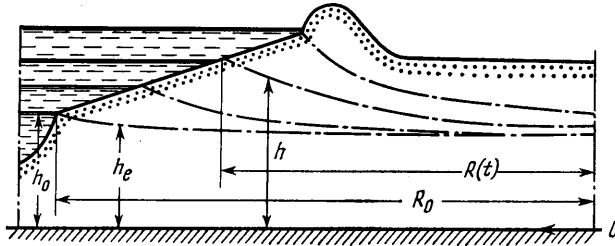
Здесь h_0 — высота уровня воды в водоеме над водоупором до начала паводка, R_0 — расстояние от оси симметрии до уреза воды в водоеме до начала паводка.

¹ В [11] подробно исследуется применимость уравнения (0.1) к рассматриваемым процессам.

1. На первом этапе прохождения паводка считаем, что уровень воды в водоеме повышается по линейному закону, при этом граница области фильтрации $R(t)$ будет изменяться также линейно

$$(1.1) \quad h[R(t), t] = h_0 + v_1 t, \quad R(t) = R_0 - b_1 t, \quad b_1 = v_1 \operatorname{ctg} \alpha$$

где v_1 — скорость подъема уровня воды в реке, причем рассматриваются процессы с относительно небольшими средними значениями $v_1 = 0.2 -$



Фиг. 1

0.3 м/сут, так как в противном случае кривая депрессии вблизи берега теряет однозначность [8]; b_1 — скорость изменения области фильтрации; α — угол наклона откоса к горизонту.

С учетом (1.1) и условий симметрии при $x=0$ граничные условия для функции $u(x, t)$ примут вид

$$(1.2) \quad u[R(t), t] = 0.5h^2[R(t), t] = u_0 + h_0 v_1 t + 0.5v_1^2 t^2 = f_1(t), \quad \partial u(0, t) / \partial x = 0$$

Таким образом, нужно решить уравнение (0.1) с краевыми условиями (0.2), (1.2). Особенностью задачи, вызванной учетом наклонного откоса, является наличие подвижной границы области фильтрации $R=R(t)$, на которой задано изменение уровня в водоеме $f_1(t)$. В силу отмеченной особенности классические методы математической физики для решения задачи непосредственно неприемлемы. Однако можно строго решить ее, используя метод работы [12].

Сущность метода заключается в том, что вначале вводится новая безразмерная координата $\xi = x / R(t)$. При этом переменная область фильтрации переходит в постоянную $0 \leq \xi \leq 1$, но дифференциальное уравнение (0.1) существенно усложняется. После этого применяется специальная функциональная подстановка, переводящая полученное дифференциальное уравнение (для постоянной области) в уравнение с разделяющимися переменными, которое можно решать классическими методами (методом конечных интегральных преобразований Кошлякова — Гринберга или методом собственных функций [13]).

Последовательно применяя описанные выше методы, получим решение для первого этапа фильтрации в безразмерных переменных в виде

$$(1.3) \quad \frac{u(\xi, \tau) - u_{1e}(\xi)}{u_0} = \varphi_1(\tau) - 2w_1 \Phi_1(\xi, \tau) - 4w_2 \Phi_2(\xi, \tau) = w_1 [\tau - 2\Phi_1(\xi, \tau)] + w_2 [\tau^2 - 4\Phi_2(\xi, \tau)] = w_1 N_1(\xi, \tau) + w_2 N_2(\xi, \tau)$$

$$\xi = \frac{x}{R_0 \rho(\tau)}, \quad \tau = \frac{a_1 t}{R_0^2}, \quad \rho(\tau) = \frac{R(t)}{R_0} = 1 - B_1 \tau$$

$$\Phi_1(\xi, \tau) = q(\xi, \tau) \sum_{n=1}^{n=\infty} I_{1n}(\tau) \theta_n(\xi), \quad \Phi_2(\xi, \tau) = q(\xi, \tau) \sum_{n=1}^{n=\infty} I_{2n}(\tau) \theta_n(\xi)$$

$$(1.4) \quad I_{1n} = \int_0^1 F_n(y) dy, \quad I_{2n} = \int_0^1 y F_n(y) dy,$$

$$q(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\tau)}} \exp[-0.25\rho(\tau)\rho'(\tau)\xi^2]$$

$$F_n(y) = \sqrt{\rho(y)} \exp\left[-\lambda_n^2 \left(\frac{\tau}{\rho(\tau)} - \frac{y}{\rho(y)}\right)\right] \int_0^1 \exp[0.25\rho(y)\rho'(y)x^2] \theta_n(x) dx$$

$$\theta_n(\xi) = \sin[\lambda_n(1-\xi)], \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad \varphi_1(\tau) = w_1\tau + w_2\tau^2$$

$$N_1(\xi, \tau) = \tau - 2\Phi_1(\xi, \tau), \quad N_2(\xi, \tau) = \tau^2 - 4\Phi_2(\xi, \tau)$$

Значения безразмерных постоянных, входящих в (1.3), (1.4), вычисляются через параметры задачи по формулам

$$(1.5) \quad B_1 = \frac{R_0 b_1}{a_1}, \quad w_1 = \frac{R_0^2}{a_1 u_0} (h_0 v_1 - R_0 b_1 \varepsilon), \quad w_2 = \frac{R_0^4}{2a_1^2 u_0} (v_1^2 + \varepsilon b_1^2)$$

Отметим, что параметр B_1 характеризует отношение скорости продвижения уреза воды по наклонному откосу к скорости изменения уровня грунтовых вод. В случае вертикального откоса $B_1 = b_1 = v_1 \operatorname{ctg} \alpha = 0$.

Функции $N_i(\xi, \tau)$, ($i=1,2$), входящие в решение (1.3), рассчитаны для различных значений τ, B_1 на ЭВМ и представлены на фиг. 2, 3 для $\xi=0$ и $\xi=0.5$ соответственно. Функция N_1 нанесена в виде сплошной линии в нижней от диагонали половине графика, N_2 — в верхней. Отметим свойства монотонных функций $\Phi_i(\xi, \tau)$, вытекающие из (1.4) и необходимые для дальнейшего

$$(1.6) \quad \Phi_i(\xi, 0) = \Phi_i(1, \tau) = 0, \quad \Phi_i(0, \tau) = \max \Phi_i(\xi, \tau)$$

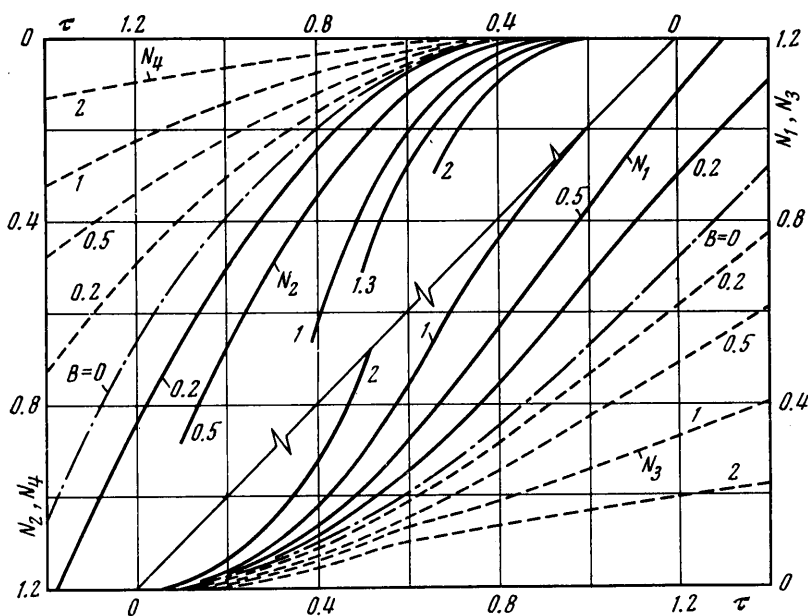
Из (1.3) следует, что функции $\Phi_i(\xi, \tau)$ определяют меру отставания фильтрационного потока относительно изменения уровня воды в реке, которое выражается функцией $\varphi_1(\tau)$.

Для случая, когда инфильтрационное питание и испарение взаимно уравновешиваются, в формуле (0.1) $\varepsilon=0$ и применим первый способ линеаризации $u=h$ [2], при этом граничное условие имеет вид (1.1), а формула (1.3) несколько упрощается

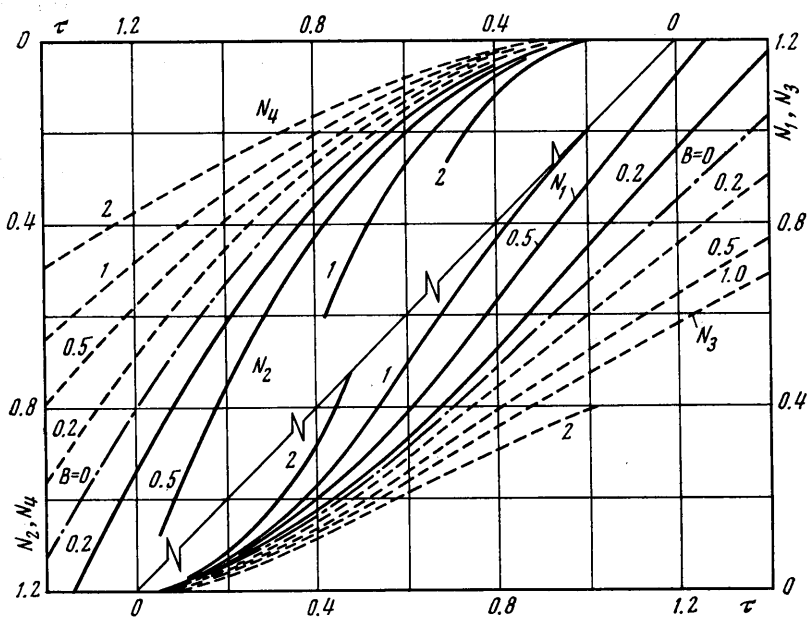
$$(1.7) \quad \frac{h(\xi, \tau) - h_0}{h_0} = V_1 [\tau - 2\Phi_1(\xi, \tau)] = V_1 N_1(\xi, \tau), \quad V_1 = \frac{v_1 R_0^2}{a_1 h_0}$$

Если в начальный момент времени зеркало грунтовых вод горизонтально $h(x, 0) = h_0$, а затем вместе с изменением уровня воды в реках начинает действовать инфильтрация или испарение постоянной интенсивности, то здесь также применима первая линеаризация [3], а уровень грунтовых вод междуречья с наклонными откосами определится по формуле

$$(1.8) \quad \frac{h(\xi, \tau) - h_0}{h_0} = V_1 \tau - 2(V_1 - \varepsilon_1) \Phi_1(\xi, \tau), \quad \varepsilon_1 = \frac{\omega R_0^2}{kh_0 \langle h \rangle}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Из формул (1.7), (1.8) при $B_1=0$ (откос вертикальный, штрихпунктирная линия на Фиг. 2, 3) получаем исследованные в [1-3] случаи фильтрации из каналов (дрен) при линейном нарастании в последних уровня воды.

Из Фиг. 2, 3 видно, что при значениях $\tau \leq 0.1$ наклонный откос не влияет на фильтрационный поток на середине междуречья. Однако при $\tau > 0.1$ влияние наклонного откоса на глубину фильтрационного потока возрастает

для одних и тех же значений B_1 уклона откоса. Аналогичное влияние имеет уменьшение уклона откоса (увеличение B_1) при постоянном τ .

2. К концу первого этапа t_1 уровень воды в водоеме и размер области фильтрации со свободной поверхностью достигнут величин

$$(2.1) \quad h_1 = h_0 + v_1 t_1, \quad R_1 = R_0 - b_1 t_1$$

На втором этапе фильтрации будет происходить повышение уровня грунтовых вод в области $0 \leq x \leq R_1$ под действием подпора со стороны водоема. Таким образом, на этом этапе область фильтрации неизменна. Математически задача сводится к решению уравнения (0.1) с граничными условиями

$$(2.2) \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(R_1, t) = u_1 = 0.5h_1^2 = \text{const}$$

Начальное условие определяется формулами (1.3) или (1.7) при $t = t_1$ ($\tau = \tau_1$). Отсчет времени будем вести от начала второго этапа. Общее решение поставленной задачи известно [13] и выражается через бесконечные ряды, коэффициенты которых содержат интегралы, не вычисляемые аналитически. Для получения аналитического решения аппроксимируем начальное условие (1.3) параболой, используя свойства (1.6) монотонных функций

$$(2.3) \quad 2w_1 \Phi_1(\xi, \tau_1) + 4w_2 \Phi_2(\xi, \tau_1) = c_0(1 - \xi^2)$$

Применяя для решения интегральное преобразование Лапласа по переменному τ , получим для второго этапа.

$$(2.4) \quad \frac{u(\xi, \tau) - u_{2e}(\xi)}{u_0} = z(\xi, \tau) = -2c_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\lambda_n^3} \cos(\lambda_n \xi) \exp(-\lambda_n^2 \tau)$$

$$u_{2e}(\xi) = u_1 + \frac{eR_1^2}{2}(1 - \xi^2), \quad \xi = \frac{x}{R_1} \quad \tau = \frac{a_2 t}{R_1^2}$$

Функцию (2.4) можно рассчитать по графику на рис. 52 работы [2] при $\xi = 0$.

Из вида решения (2.4) ясно, что на втором этапе фильтрации грунтовый поток быстро устанавливается, так как функция $z(\xi, \tau)$ выражается через ряд, который с увеличением τ очень быстро стремится к нулю.

Отметим, что гидрограф паводка с ярко выраженным вторым этапом характерен для дельтовых районов в условиях зарегулированного стока [14]. Так, например, предполагается с вводом Астраханского вододелиителя для рыбохозяйственных целей в левобережной дельте поддерживать уровень, близкий к пиковому, в течение 1–1.5 месяцев. Поэтому в дальнейшем будем считать, что к концу второго этапа грунтовый поток практически устанавливается.

3. Решения для третьего этапа паводка будут формально определяться формулами (1.3), (1.7) для первого, в которых величины v_1 , B_1 , w_1 , V_1 следует заменить на отрицательные, соответствующие третьему этапу, а также пересчитать параметры задачи. Отсчет времени следует вести от начала третьего этапа. В этом случае значения функций $N_3(\xi, \tau)$ и $N_4(\xi, \tau)$, соответствующих $N_1(\xi, \tau)$ и $N_2(\xi, \tau)$ (см. (1.4)), представлены пунктирными линиями на фиг. 2, 3 для различных τ , B , $\xi = 0$, $\xi = 0.5$. Отметим, что графики линий при $B = 0$ (штрихпунктирные линии) являются общими для N_1 , N_3 и N_2 , N_4 . Несовершенство русла реки и слоистость пласта можно учитывать обычными методами, вводя соответствующие

коэффициенты в безразмерные переменные и параметры (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) [1, 2, 6]. Дополнительное фильтрационное сопротивление, обусловленное несовершенством водной границы при движении ее по наклонному откосу, можно учесть по методике работы [9], так же как и возможное появление участка высачивания при быстром снижении уровня воды в реке на третьем этапе паводка.

В качестве обобщенного параметра, учитывающего степень влияния наклонных откосов на динамику уровней грунтовых вод, можно принять величину $B\tau = tv \operatorname{ctg} \alpha / R_0$, представляющую собой отношение величины затопленной зоны (числитель) к первоначальному размеру области R_0 . Из фиг. 2, 3, а также расчетов динамики уровней грунтовых вод следует, что при $B\tau < 0.1$ влиянием наклонных откосов можно пренебречь, считая их вертикальными, при этом ошибка в расчете динамики грунтовых вод не превышает 10%. При $B\tau \geq 0.1$ следует учитывать влияние наклонных откосов.

Динамику грунтовых вод после стабилизации уровней в реках (четвертый этап) можно рассчитать аналогично второму этапу по формулам, соответствующим (2.4), (2.3), с использованием результатов третьего этапа. Эти формулы здесь не приводятся.

Приведенные формулы и графики могут быть использованы при расчете депрессионных кривых в плотинах и дамбах при опускании уровней воды в бьефах [9, 10, 15].

Поступила 1 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. В сб. «Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод». М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. Васильев С. В., Веригин Н. Н., Глейзер Б. А., Разумов Г. А., Рудаков В. К., Саркисян В. С., Шержуков Б. С. Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем М., «Колос», 1970.
3. Кононенко Г. Н., Булдей В. Р. Динамика грунтовых вод при изменении горизонтов воды в системе каналов. Гидравлика и гидротехника. Респ. межвед. научно-техн. сб., 1972, вып. 15.
4. Веригин Н. Н. Движение грунтовых вод вблизи водохранилищ. Гидротехнич. стр-во, 1952, № 4.
5. Веригин Н. Н. Режим грунтовых вод при наполнении и сработке водохранилищ. Гидротехн. стр-во, 1952, № 11.
6. Абрамов С. К., Биндеман Н. Н., Бочевер Ф. М., Веригин Н. Н. Влияние водохранилищ на гидрогеологические условия прилегающих территорий. М., Госстройиздат, 1960.
7. Полубаринова-Кочина П. Я. О движениях грунтовых вод при колебаниях уровня воды в водохранилище с вертикальной границей. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
8. Пряжинская В. Г., Цанг В. П. К численному решению одной плоской нелинейной задачи нестационарной фильтрации. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 2. Новосибирск, «Наука», 1969.
9. Шестаков В. М. Определение гидродинамических сил в земляных сооружениях и откосах при падении уровней в бьефах. В сб. «Вопросы фильтрационных расчетов гидротехнических сооружений», № 2, М. Госстройиздат, 1956.
10. Абаджиев Х. Фильтрация в земнонасыщенной стене с ядром при понижении на водного ниво в язовира. Изв. Центр. научно-исслед. лаб. гидравл. изслед., 1970, № 10.
11. Шестаков В. М. Исследования внутренней кинематики неустановившегося фильтрационного потока и вывод уравнения неустановившейся фильтрации. Докл. АН СССР, 1953, т. 92, № 5.
12. Гринберг Г. А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся и сжимающихся областей. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
14. Сборник материалов наблюдений по дельте Волги за 1967–1968 гг. Ростов-на-Дону, 1971.
15. Коростелев А. Д. О фильтрационном расчете плотин и дамб с откосами при опускании бьефов. Изв. вузов, Строительство и архитектура, 1975, № 2.