

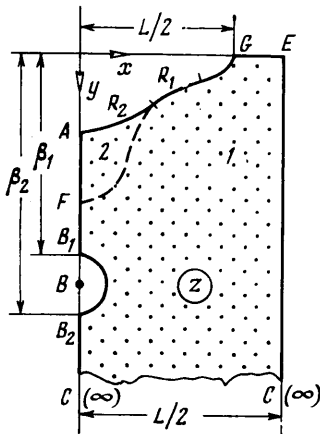
**ПЛОСКАЯ БЕЗНАПОРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ
ПРИ ДРЕНАЖНЫХ ПРОМЫВКАХ ПОЧВЕННОГО СЛОЯ
НЕОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ**

В. Н. ЭМИХ

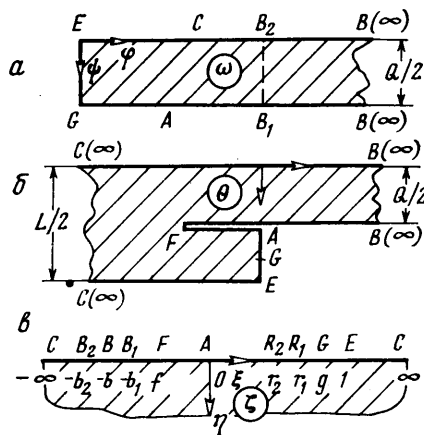
(Новосибирск)

В [1] построено и исследовано приближенное (со снесением кривой депрессии на горизонтальную линию) гидродинамическое решение задачи о плоской установившейся фильтрации в процессе дренажных промывок почвенного слоя с горизонтальным непроницаемым основанием. При сравнительной простоте решения, позволяющей проанализировать его теоретически и приспособить для расчетов, остается открытым вопрос о его погрешностях, обусловленных заменой неизвестной кривой депрессии фиксированной границей. Ниже рассматривается решение задачи с учетом депрессионной кривой для случая однородного почвенного слоя неограниченной мощности при полосообразном затоплении земной поверхности. Путем теоретического анализа решения выявляются некоторые детали структуры годографа скорости и формы депрессионной кривой.

1. Решение задачи. Область течения в предположении о его периодичности схематично представлена на фиг. 1 для половины одного из междурений. На фиг. 2, а и б изображены соответственные области комплексного



Фиг. 1



Фиг. 2

потенциала $\omega = \phi + i\psi$ (ϕ — потенциал скорости фильтрации, ψ — функция тока) и функции Жуковского

$$(1.1) \quad \theta = \omega + iz = (\phi - y) + i(\psi + x) \quad (z = z'/L, \omega = \omega'/\kappa L)$$

Здесь z' и ω' — фактические (неприведенные) величины, L — междуренное расстояние, κ — коэффициент фильтрации.

Отображая области ω и θ на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 2, в), найдем

$$(1.2) \quad \omega = \frac{Q\sqrt{(1+b)(b+g)}}{2\pi} \int_{\zeta}^g \frac{d\zeta}{(b+\zeta)\sqrt{(1-\zeta)(g-\zeta)}} + i\frac{Q}{2} =$$

$$= \frac{Q}{\pi} \text{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(g-\zeta)}{(1-g)(b+\zeta)}} + i\frac{Q}{2}$$

$$(1.3) \quad \theta = i\frac{Q\sqrt{b(1+b)}}{2\pi(b-f)} \int_0^{\zeta} \frac{(f+\zeta)d\zeta}{(b+\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + i\frac{Q}{2} =$$

$$= i\frac{Q}{\pi} \left[\frac{\sqrt{b(1+b)}}{b-f} \arcsin \sqrt{\zeta} - \arcsin \sqrt{\frac{(1+b)\zeta}{b+\zeta}} \right] + i\frac{Q}{2}$$

Здесь Q — фильтрационный расход дрены на единицу ее длины. Полагая в (1.3) $\zeta=1$, $\theta=i/2$, имеем $Q=(b-f)[b(1+b)]^{-1/2}$. Используя это выражение для Q , получим из (1.1)–(1.3)

$$(1.4) \quad z = i(\omega - \theta) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\zeta} \frac{(f+\zeta)d\zeta}{(b+\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \right.$$

$$\left. + iQ\sqrt{(1+b)(b+g)} \int_{\zeta}^g \frac{d\zeta}{(b+\zeta)\sqrt{(1-\zeta)(g-\zeta)}} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \sqrt{\zeta} - Q \arcsin \sqrt{\frac{(1+b)\zeta}{b+\zeta}} + iQ \text{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(g-\zeta)}{(1-g)(b+\zeta)}} \right]$$

При $0 \leq \zeta \leq g$ (1.4) представляет собой уравнение кривой депрессии AG в комплексно-параметрической форме, а при $\zeta=g$, $z=l/2$ дает соотношение

$$(1.5) \quad \frac{l}{2} = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \sqrt{g} - Q \arcsin \sqrt{\frac{(1+b)g}{b+g}} \right]$$

Для схематизации дрены потребуем, следуя [2] и по аналогии с [1], чтобы $\varphi(B_1) = \varphi(B_2)$; в результате найдем, используя (1.2)

$$(1.6) \quad b = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{1 + \sqrt{1 - \alpha}}, \quad \alpha = \frac{(b_2 - b_1)(1 + b_1 + b_2 + g)}{(1 + b_1)(b_1 + g)}$$

Аффиксы $-b_1$ и $-b_2$ точек B_1 и B_2 в плоскости ζ связаны с их заданными ординатами β_1 и β_2 посредством соотношений, вытекающих из (1.4)

$$(1.7) \quad \beta_1 = \frac{1}{\pi} \left[\text{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)b_1}{b-b_1}} - Q \text{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(b_1+g)}{(1-g)(b-b_1)}} \right]$$

$$(1.8) \quad \beta_2 = \frac{1}{\pi} \left[\text{arsh} \sqrt{\frac{(1+b_2)b}{b_2-b}} - Q \text{arsh} \sqrt{\frac{(1+b_2)(b+g)}{(1-g)(b_2-b)}} \right]$$

Будем рассматривать (1.5) — (1.8) как систему уравнений относительно параметров b , b_1 , b_2 и g , если Q задано; в противном случае к указанной

системе присоединим соотношение, получающееся из (1.2) при задании напора $h(B_1) = -H$ в точке B_1 , имея в виду, что $\omega(B_1) = -h(B_1) + iQ/2$

$$(1.9) \quad H = \frac{Q}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(b_1+g)}{(1-g)(b-b_1)}}$$

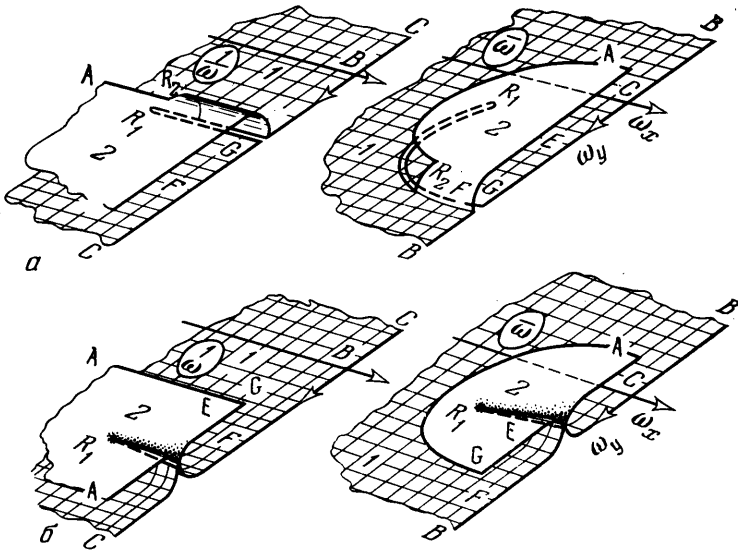
Так как $\varphi = h = 0$ на GE , то H — действующий напор. Используя (1.9), представим (1.7) в записи

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{b_1} = \\ & = \beta_1 - H \left[1 - \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)b_1}{b-b_1}} / \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(b_1+g)}{(1-g)(b-b_1)}} \right] \end{aligned}$$

Отсюда и с учетом того, что $0 \leq g \leq 1$, следует

$$(1.10) \quad \operatorname{sh}^2 \pi (\beta_1 - H) \leq b_1 \leq \operatorname{sh}^2 \pi \beta_1$$

Верхняя граница допустимых значений параметра b_1 достигается при $g=0$, т. е. в случае полного затопления земной поверхности [1]. Из оценки (1.10) снизу вытекает, что $b_1 > 0$, т. е. дрена затоплен (фиг. 1; 2, e), при наличии на ней подпора ($H < \beta_1$).



Фиг. 3

Из (1.5) формулы для Q и соотношений $b < b_2 \leq \operatorname{sh}^2 \pi \beta_2$ можно установить, что

$$(1.11) \quad \sin^2(\pi l/2) \leq g < \sin^2[\pi(l + \pi \beta_2)/2]$$

Если $H \neq 0$, то равенство в (1.11) возможно лишь в предельных случаях: при $l=0$ и $l=1$.

2. О структуре годографа скорости и форме кривой депрессии. Введем комплексную скорость фильтрации $w = w_x - iw_y = d\omega/dz$. Рассматривая ее вдоль границы области z , видим, что некоторые свои значения функция $w(z)$ принимает в двух различных точках границы и, следовательно, об-

ласть годографа (область функции $\bar{w}=w_x+iw_y$) должна быть по меньшей мере двулистной. Исследуем структуру годографа, основываясь на полученном выше решении. Исходя из (1.2) и (1.4), найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} &= -B \frac{(f+\zeta)\sqrt{g-\zeta}}{\sqrt{\zeta}} + i = -B \int_{\zeta}^g \frac{P(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\zeta^3(g-\zeta)}} + i = \\ &= -B \int_{\zeta}^g \frac{(\zeta-r_1)(\zeta-r_2) d\zeta}{\sqrt{\zeta^3(g-\zeta)}} + i \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$P(\zeta) = \zeta^2 - \frac{g}{2}\zeta + \frac{fg}{2}, \quad B = \frac{\sqrt{b}}{(b-f)\sqrt{b+g}},$$

$$r_{1,2} = \frac{g}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8f}{g}} \right)$$

Посредством интегрального представления отображающей функции $1/w$ обнаруживаются в числе прочих две ее особые точки $R_1(r_1)$ и $R_2(r_2)$. Характер особенностей в них одинаков; в окрестности точки R_1 , например, имеем, согласно (2.1)

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w(r_1)} + (\zeta-r_1)^2 [a_0 + a_1(\zeta-r_1) + \dots], \quad a_0 \neq 0$$

и, следовательно, R_1 и R_2 — алгебраические точки разветвления второго порядка функции $\zeta(1/w)$ [3]. Их аффиксы r_1 и r_2 , будучи корнями полинома $P(\zeta)$ в (2.1), являются вещественными при условии $0 \leq 8f < g$. В этом случае, которому соответствует фиг. 1, $0 \leq r_2 < r_1 \leq g/2$, т. е. в области z точки R_1 и R_2 расположены на кривой депрессии AG (фиг. 2, θ), а в плоскостях $1/w$ и \bar{w} представляют собой, согласно (2.1), вершины граничных разрезов (фиг. 3, a), причем в точке R_2 при обходе границы осуществляется переход на второй лист (на годографе — полуокружность) римановой поверхности. Так как вдоль AG вектор w направлен по касательной к кривой, то R_1 и R_2 являются ее точками перегиба. Эту деталь легко выявить и аналитически, если учесть, что на AG $d\omega = d\varphi = dy$, вследствие чего можем записать

$$(2.2) \quad \frac{1}{w} = \frac{dz}{dy} = \frac{dx}{dy} + i, \quad \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{w} \right) = \frac{d^2x}{dy^2} \frac{d\varphi}{d\zeta}$$

В силу (1.2) $d\varphi/d\zeta < 0$ при $0 < \zeta < g$. Следовательно, $d^2x/dy^2 = d(1/w)/d\zeta = 0$ при $\zeta = r_{1,2}$, причем вторая производная меняет знак при переходе через свои простые нули r_1 и r_2 , и, таким образом, точки R_1 и R_2 оказываются при $8f < g$ точками перегиба депрессионной кривой, ограничивая на ней участок выпуклости.

Из (2.1) и (2.2) имеем на AG

$$(2.3) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\sqrt{\zeta}}{B(f+\zeta)\sqrt{g-\zeta}}$$

Это равенство отражает, в частности, монотонный спад кривой депрессии в направлении к дрене.

В случае $8f > g$ корни r_1 и r_2 полинома $P(\zeta)$ комплексно-сопряженные. Если $\text{Im } r_1 > 0$, то $R_1(r_1)$ — внутренняя точка разветвления функции $\zeta(1/w)$, содержащаяся в рассматриваемой области z (ибо последняя отображается на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$). Присутствие в интеграле Кристоффеля — Шварца (2.1) множителя $(\zeta - r_2)$ и в этом случае обусловлено тем, что в указанном интеграле должны быть учтены все особые точки функции $1/w$ в полной плоскости ζ [3, 4]. Схематично области $1/w$ и \bar{w} изображены на фиг. 3, б. Заметим, что кривая депрессии является теперь вогнутой на всем своем протяжении.

Функция (1.4), аналитически продолженная через участок EC ($1 \leq \zeta < \infty$) по принципу симметрии [3], осуществит конформное отображение полной плоскости с разрезом вдоль полуоси $\zeta < 1$ на всю междреннюю область. Соответствующую ей область годографа скорости получим, склеивая по участку EC ранее построенную область \bar{w} (фиг. 3) с симметричной ей относительно оси $w_x = 0$. Аналогично посредством продолжения исходной ветви функции (1.4) через AC перейдем в соседнюю от выделенной междреннюю область, для которой $-L \leq x \leq 0$.

В [5] рассматривалась сходная задача, но дрены моделировались горизонтальными щелями постоянного напора, а функция $1/w$, для которой сохраняется выражение (2.1), использовалась (с отображением соответствующей двулистной области на полуплоскость) при построении решения наряду с функцией ω . Применительно к этой модели в формулах (1.2) и (1.3) в подынтегральных функциях вместо множителей $b + \zeta$ должны содержаться радикалы $\sqrt{(b_1 + \zeta)(b_2 + \zeta)}$, соответствующие угловым особым точкам B_1 и B_2 на пересечении дренажной щели с линиями тока AB_1 и B_2C . В результате зависимость $\omega(\zeta)$ будет содержать эллиптические интегралы первого, а зависимости $\theta(\zeta)$ и $z(\zeta)$ — также и третьего рода.

Представляет интерес вопрос о физических предпосылках существования на кривой депрессии точек перегиба. Однако четкая физическая интерпретация условия $8f < g$ такого существования затруднительна из-за усложнения (по сравнению с [1]) взаимосвязи геометрических характеристик модели с параметрами отображения в результате учета свободной границы. Ограничимся поэтому приближенным физическим анализом картины.

Сужение полосы затопления, т. е. увеличение l и связанное с этим в силу (1.11) возрастание параметра g вплоть до значения $g=1$, является одной из предпосылок выполнения неравенства $8f < g$. Ее реализации способствует относительная малость параметра f , о степени которой можно судить по оценкам $0 \leq f < b < b_2 \leq \text{sh}^2 \pi \beta_2$ (ср. с (1.10)), имея в виду, что при обычных соотношениях между глубиной заложения дрен и расстоянием между ними, как правило, $\pi \beta_2 \sim 0.1$. К тому же, согласно выражению для Q , указанный параметр «изолирован» от верхней границы b своих допустимых значений, если фильтрационный расход дрены не слишком мал. Прибегнув к несколько иной трактовке этого обстоятельства, заметим, что сближение параметров f и b можно рассматривать как «гашение» особенности в точечном стоке B , ибо $|w|_{\zeta=-f} = 1$.

Из фиг. 2, в и формулы (2.1) для $r_{1,2}$ видно, что по мере убывания f точки F и $R_2(r_2)$ сближаются, сливаясь в пределе, при $f=0$, в точке A , в которую одновременно вырождается второй лист годографа. Для нее теперь имеем на основании (2.1) и (2.3)

$$\lim_{f=0, \zeta \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -\infty, \quad \lim_{f=0, \zeta \rightarrow 0} w = -i$$

и, следовательно, точка A становится точкой заострения кривой депрессии.

На участке AB , где $z=iy$, $\sqrt{\zeta}=i\sqrt{-\zeta}$, $w=\varphi+iQ/2=-p+y+iQ/2$ (p — давление, отнесенное к удельному весу воды), в рассматриваемом предельном случае можем записать, исходя из (2.1)

$$w=i \left(\frac{dp}{dy} - 1 \right) = -i \frac{1}{1 - B\sqrt{-\zeta}(g-\zeta)};$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{B\sqrt{-\zeta}(g-\zeta)}{1 - B\sqrt{\zeta}(g-\zeta)}; \quad B = \frac{1}{\sqrt{b(b+g)}}, \quad -b \leq \zeta < 0$$

Отсюда следует, что $dp/dy < 0$ при $-b < \zeta < 0$, т. е. для превращения точки A в точку заострения депрессионной кривой необходимо поддержание искусственным путем на всем участке AB и, в частности, на контуре дрены давления ниже атмосферного [2]. На практике, однако, дрены функционируют в режиме свободного истечения, и поэтому непосредственно над ними кривая депрессии имеет горизонтальную касательную.

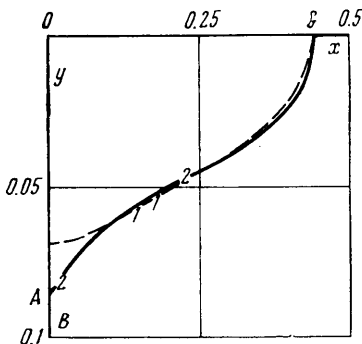
С учетом вышеизложенного естественно связать уменьшение параметра f с понижением давления на дрене, рассматривая этот фактор как способствующий появлению на кривой депрессии точек перегиба.

3. Пример расчета. По полученным выше формулам были произведены некоторые вычисления в полуобратном порядке: задавались отнесенные к междренному расстоянию глубина заложения дрены $\beta_1=0.1$ и действующий напор $H=0.09$, а также два параметра конформного отображения: $b=0.01207$ и $b_1=0.00604$. При этом, для того чтобы заведомо обеспечить выполнение неравенства $8f < g$ и получить тем самым депрессионную кривую с точками перегиба, параметр b_1 формировался в соответствии с (1.10) вблизи нижней границы своих допустимых значений, ибо при таком выборе, как отмечалось ранее, $g \sim 1$.

В процессе вычислений первоначально по соотношению (1.7) после исключения из него посредством (1.9) параметра g определялся приведенный расход Q , далее, из выражения для Q и (1.9) — соответственно параметры $f=0.00631$ и $g=0.98693$, а из (1.5) — величина $l=0.87531$; с помощью (1.6) и (1.8) последовательно находились $b_2=0.01819$ и $\beta_2=0.11372$. Таким образом, ширина полосы затопления $1-l=0.12469$ и диаметр дрены $\beta_2-\beta_1=0.01372$ выявлялись в результате расчетов. Вместе с заданными физическими параметрами они закладывались затем в программу вычислений по формулам рассмотренной ранее [1] приближенной постановки, расчеты при которой выполняются уже в прямом порядке.

Сопоставление этой постановки с описываемой здесь уточненной производилось по ординатам (при одинаковых абсциссах) ряда точек депрессионной кривой, которая получалась в [1] в качестве приближения к фактической из распределения потенциала на граничном отрезке $0 \leq z \leq l/2$, и по значениям отнесенной к κ величине скорости фильтрации в нескольких точках граничных участков GE и EC (таблица). Буквенные обозначения приближенных величин, отличающихся от точных и сравниваемых с ними, снабжены звездочкой.

На фиг. 4 представлены кривые депрессии в точной и приближенной постановках (сплошная и прерывистая линии соответственно). Вертикальный масштаб на



Фиг. 4

	GE				EC			
x	0.4377	0.4573	0.4762	0.5	y	0.0934	0.1867	0.2470
$ w $	1	0.4199	0.3380	0.3132	$ w $	0.1685	0.0834	0.0562
$ w^* $	∞	0.4397	0.3443	0.3170	$ w^* $	0.1677	0.0830	0.0558

графике увеличен по сравнению с горизонтальным в пять раз. Тем не менее, существенное различие между кривыми обнаруживается лишь вблизи дрены; своеобразный эффект дренирования, выраженный в наличии впадины на депрессионной кривой над дренаем, в приближенной постановке почти не проявляется. В остальной части приближенная кривая депрессии хотя и сглаживает точную, но достаточно близка к ней и также имеет участок выпуклости. Ограничивающие его точки перегиба $R_1(0.1438, 0.0563)$ и $(0.1768, 0.0532)$ отмечены на фиг. 4 значками 1; точки перегиба $R_1(0.2217, 0.0477)$ и $R_2(0.0150, 0.0806)$ уточненной кривой обозначены значками 2. Близость точек R_2 и A связано с малостью параметра f : в этом случае имеем, согласно (2.1), $r_1 \approx g/2$, $r_2 \approx f$.

Обращаясь к таблице, видим, что различие в значениях скорости фильтрации, обусловленное особенностью функции w^* в точке G , быстро сглаживается по мере удаления от края полосы затопления. Преобладание величин $|w^*|$ над $|w|$ в пределах всей полосы соответствующим образом отражается на соотношении расходов $Q^*=0.06277$, $Q=0.05217$.

При условленном совмещении точек B_1 и B_2 в сравниваемых постановках найдены следующие значения ординаты точечного стока B : $\beta=0.10759$; $\beta^*=0.10702$. Величина смещения стока относительно центра дрены в приближенной модели $\Delta\beta^* = \beta^* - 0.5(\beta_1 + \beta_2) = 0.00016$ согласуется с оценкой этой величины в [1], в соответствии с которой при достаточном удалении дрены от верхней границы $\Delta\beta^* = O[(\beta_2 - \beta_1)^2]$. В точной постановке смещение оказывается гораздо большим ($\Delta\beta = 0.00073$), что объясняется значительным сокращением по сравнению с приближенной схемой расстояния верхней непроницаемой границы (депрессионной кривой) от дрены; в обеих постановках сток смещается вниз от центра.

Поступила 23 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Эмих В. Н. Фильтрация грунтовых вод при дренажных промывках почвенного слоя с непроницаемым основанием. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
2. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.-Л., Госстройиздат, 1939.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
4. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М., Изд-во Инстр. лит., 1963.
5. Нельсон-Скорняков Ф. Б. Притекание грунтовой воды со свободной поверхностью к системе дренажей при глубоком залегании водоупора. Изв. АН СССР, ОТН, 1941, № 1.