МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1975

УДК 532.526.2

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ОТСОСЕ

Э. А. ГЕРШБЕЙН

(Москва)

Рассмотрено течение многокомпонентного сжимаемого газа в ламинарном пространственном пограничном слое при больших значениях параметра отсоса. Получены асимптотические формулы для профилей скоростей, температуры и концентраций компонент поперек пограничного слоя, а также для коэффициентов трения, тепло- и массообмена на поверхности тела.

Ранее асимптотическое решение уравнений двумерного пограничного слоя в однородной несжимаемой жидкости было получено в [1], в сжимаемом газе в [2, 3], в многокомпонентном сжимаемом газе в [4]. Течение в окрестностях пространственной критической точки при сильном отсосе рассматривалось в работе [5].

1. Уравнения пространственного пограничного слоя при пренебрежении химическими реакциями внутри слоя и термодиффузией имеют следующии безразмерный вид [6-8]:

$$
\frac{\partial(\rho v)}{\partial\zeta}=-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}u\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}w\right)\right]
\tag{1.1}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)-\rho v\frac{\partial u}{\partial\zeta}=\varepsilon^2\rho\left[\mathrm{D}u+A_1u^2+A_2w^2+A_3uw-\frac{A_4}{\rho}\right]
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)-\rho v\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\varepsilon^2\rho\left[\mathrm{D}w+B_1u^2+B_2w^2+B_3uw-\frac{B_4}{\rho}\right]
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\mu c_p}{\sigma}\frac{\partial T}{\partial\zeta}\right)-c_p\rho v\frac{\partial T}{\partial\zeta}+
$$

$$
+\alpha\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2+2\cos\psi\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right]-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{N}c_{pi}I_i\frac{\partial T}{\partial\zeta}=\varepsilon^2[\rho c_p\,\mathrm{D}T-\alpha\,\mathrm{D}p]
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\zeta}I_i+\rho v\frac{\partial C_i}{\partial\zeta}=-\varepsilon^2\rho\,\mathrm{D}C_i,\qquad (i=1,\dots\ N-1)
$$

$$
\frac{\partial(C_im)}{\partial\zeta}=\sum_{j=1}^{N}\frac{m^2}{m_j\mu}S_{ij}(C_iI_j-C_jI_i)\qquad (i=1,\dots,N-1)
$$

$$
\sum_{i=1}^{N}C_i=1,\qquad \sum_{i=1}^{N}I_i=0,\qquad p=\rho RT\sum_{i=1}^{N}\frac{C_i}{m}
$$

$$D\equiv\frac{u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{w}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\eta},\quad \varepsilon^2=\frac{\rho_e{}^*U_e{}^*}{\rho_w{}^*v_w{}^*}\delta,\quad \delta=\frac{\rho_e{}^*U_e{}^*}{\rho_w{}^*v_w{}^*}\frac{1}{\mathrm{Re}}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho_e{}^*U_e{}^*l}{\mu_e{}^*},\quad \alpha=\frac{U_e{}^{*2}}{c_{pe}{}^*T_e{}^*},\quad \cos\psi=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\quad g=g_{11}g_{22}-g_{12}{}^2$$

Здесь элемент длины ls на поверхности тела выражается формулой $ds=g_{11}d\xi^2+2g_{12}d\xi d\eta+g_{22}d\eta^2$, ξ, η — произвольные криволинейные координаты, выбираемые на поверхности тела; координата $l\delta\zeta$ направлена по нормали к поверхности тела; $U_e{}^*u$, $U_e{}^*w$, $(\rho_w{}^*v_w{}^*/\rho_e{}^*)v$ — составляющие скорости в направлениях ξ, η, ζ соответственно; $\rho_e{}^*\rho$, $\rho_e v_e{}^{*2}p$, $T_e{}^*T$, $c_{pe}{}^*c_p$, $\lambda_e{}^*\lambda$, $\mu_e{}^*\mu$ — соответственно плотность, давление, температура, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, коэффициент вязкости смеси газов, состоящей из N химических компонент; C_i, m_i, $c_{pe}{}^*c_{pi}$, $\delta\rho_e{}^*U_e{}^*I_i$ — концентрация, молекулярный вес, теплоемкость, диффузионный поток i-й компоненты соответственно; S_{ij} — бинарное число Шмидта, σ — число Прандтля, l — характерный линейный размер, A_i, B_i выражаются через метрические коэффициенты и давление [6]; индексы e, w и звездочка относятся к параметрам на внешней границе пограничного слоя, к параметрам на поверхности тела и к характерным размерным значениям параметров.

Система уравнений (1.1) решается при следующих граничных условиях:

$$u\to u_e(\xi,\eta),\quad w\to w_e(\xi,\eta),\quad T\to T_e(\xi,\eta),\quad C_i\to C_{ie}$$
$$(i=1,\ldots,N),\quad \zeta\to\infty,\quad u=w=0,\quad \rho v=G(\xi,\eta)<0,$$
$$T=T_w(\xi,\eta),\quad C_i=C_{iw}(\xi,\eta)\quad (i=1,\ldots,N),\quad \zeta=0 \tag{1.2}$$

2. При ε^2, стремящемся к нулю, решение системы (1.1), (1.2) ищем в виде

$$f_k(\xi,\eta,\zeta,\varepsilon)=f_{k0}(\xi,\eta,\zeta)+\varepsilon^2 f_{k2}(\xi,\eta,\zeta)+\ldots \tag{2.1}$$

где f_k — любая из искомых функций.

Вводя новые переменные по формулам

$$y=-\int_0^\zeta\frac{\rho_w v_w}{S\mu}d\zeta,\quad X_i=-\frac{1}{\rho_w v_w}I_i,\quad S=\frac{1}{mS_{pq}} \tag{2.2}$$

$$\rho v=\rho_w v_w\varphi,\quad g_i=mC_i,\quad a_{ij}=S_{ij}/(m_jS_{pq})$$

получаем для определения коэффициентов разложения (2.1) следующие уравнения (индекс 0 опускаем):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\varphi\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\varphi\frac{\partial w}{\partial y}=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_p}{\sigma S}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left(c_p\varphi-\sum_{i=1}^N c_{pi}X_i\right)\frac{\partial T}{\partial y}=$$
$$=-\frac{\alpha}{S}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2\cos\psi\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] \tag{2.5}$$

$$(2.6)\qquad \frac{\partial}{\partial y}X_i-\varphi\frac{\partial C_i}{\partial y}=0\qquad (i=1,\dots,N)$$

$$(2.7)\qquad \frac{\partial g_i}{\partial y}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(g_iX_j-g_jX_i)\qquad (i=1,\dots,N)$$

. . . .

Граничные условия для системы (2.3) – (2.7) следующие:

$$(2.8)\qquad \begin{array}{l} u_0\to u_e(\xi,\eta),\quad w_0\to w_e(\xi,\eta),\quad T_0\to T_e(\xi,\eta),\quad C_{i0}\to C_{ie} \\ (i=1,\dots,N),\quad y\to\infty,\quad u_0=w_0=0,\quad T_0=T_w(\xi,\eta),\quad \varphi_0=1, \\ C_i=C_{iw}(\xi,\eta)\quad (i=1,\dots,N),\quad y=0 \end{array}$$

Для остальных приближений ($j=2, 4,\dots$) – нулевые граничные условия.

Интегрируя уравнения (2.3) и (2.6), получаем

$$(2.9)\qquad \varphi=1,\quad X_i=C_i-C_{ie}\quad (i=1,\dots,N)$$

Будем предполагать, что отношения чисел Шмидта S_{ij}/S_{pq} постоянны. Тогда подставив выражения (2.9) в уравнения (2.7), получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$(2.10)\qquad \frac{\partial g_i}{\partial y}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(g_jC_{ie}-g_iC_{je})\qquad (i=1,\dots,N)$$

вид которых совпадает с видом уравнений (3.2) работы [4], в которой приведено их решение.

Решение уравнений (2.4) и (2.5) с условиями (2.8) дает

$$(2.11)\qquad u=u_ek_1\int_0^y S\exp\left(-\int_0^y S\,dy\right)dy,$$

$$w=w_ek_1\int_0^y S\exp\left(-\int_0^y S\,dy\right)dy$$

$$(2.12)\qquad T=T_w+\int_0^y\left(k_2-\alpha\Phi\int_0^y\frac{c}{\omega}\,dy\right)a\omega\,dy$$

$$k_1^{-1}=\int_0^\infty S\exp\left(-\int_0^y S\,dy\right)dy,\quad k_2=(T_e-T_w)k_3+\frac{1}{2}\alpha\Phi k_4$$

$$k_3^{-1}=\int_0^\infty a\omega\,dy,\quad \omega=\exp\left(-\int_0^y ab\,dy\right),\quad a=\frac{\sigma S}{c_p}$$

$$k_4=2k_3\int_0^\infty a\omega\left(\int_0^y\frac{c}{\omega}\,dy\right)dy,\quad b=c_p-\sum_{i=1}^{N}c_{pi}(C_i-C_{ie})$$

$$c=k_1^2S\exp\left(-2\int_0^y S\,dy\right),\qquad \Phi=u_e^2+w_e^2+2u_ew_e\cos\psi$$

На поверхности тела при $\zeta=0$ получаем в размерных переменных

$$\mu\frac{\partial u}{\partial\zeta}=-\rho_w v_w u_e k_1,\quad \mu\frac{\partial w}{\partial\zeta}=-\rho_w v_w w_e k_1 \tag{2.13}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y}=-\rho_w v_w\left[c_p^*(T_e-T_w)k_3+\frac{1}{2}k_4(u_e^2+w_e^2+2u_e w_e\cos\psi)\right] \tag{2.14}$$

$$I_i=\rho v(C_{ie}-C_{iw})\qquad (i=1,\ldots,N) \tag{2.15}$$

Формулы (2.13) показывают, что предельные (донные) линии тока на поверхности тела при сильном отсосе в первом приближении совпадают с линиями тока внешнего невязкого течения.

При дополнительных предположениях $c_{pi}=c_p^*$, $\sigma=\text{const}$, $mS_{pq}=\text{const}$ константы интегрирования будут равны: $k_1=k_3=k_4=1$.

3. Найдем тепловой поток к поверхности при обтекании тела диссоциированным потоком газа. Будем предполагать, что реакции в пограничном слое заморожены, а на поверхности они протекают бесконечно быстро, т. е. последняя является идеальным катализатором. Кроме того, будем предполагать, что с поверхности тела отсасывается газ, состав которого $C_i^{(1)}$ равен составу газа на поверхности тела C_{iw}. Из условия сохранения элементов на поверхности тела

$$\sum_{k=1}^{N} m_{lk}[\rho v(C_i-C_i^{(1)})+I_i]=0\qquad (l=1,\ldots,r)$$

и асимптотического решения (2.15) будет следовать, что $C_{iw}^e=C_{ie}^e=C_i^{(1)e}$ $(i=1,\ldots,N^e)$.

Здесь m_{lk} – содержание элемента l в компоненте k, C_i^e – концентрация i-го элемента, N^e – число химических элементов.

Если поверхность тела поддерживается при температуре ниже предела диссоциации при данном давлении, то концентрации продуктов диссоциации на поверхности равны нулю. Тогда полный тепловой поток в тело будет равен

$$q=-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\sum_{k=1}^{N}h_k I_k=\left[c_{pe}^*(T_e-T_w)k_3+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}k_4(u_e^2+w_e^2+2u_e w_e\cos\psi)+h_d\right]\rho_w v_w \tag{3.1}$$

Здесь h_i – удельная энтальпия i-й компоненты, включая теплоту ее образования, h_d – энергия диссоциации единицы массы газа.

4. Рассмотрим течение однородной несжимаемой жидкости. Формулы (2.11) для профилей скоростей в первом приближении в данном случае приобретают следующий вид:

$$u_0=u_e(1-e^{v_w\zeta}),\quad w_0=w_e(1-e^{v_w\zeta}) \tag{4.1}$$

Для вторых членов разложения (2.1) получаем

$$v_2=-g^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_e}{v_w}\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}F_1\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{w_e}{v_w}\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}F_1\right)\right] \tag{4.2}$$

$$u_2=(A_4F_2+u_eFF_3)/v_w^2 \tag{4.3}$$

$$w_2=(B_4F_2+w_eFF_3)/v_w^2 \tag{4.4}$$

$$F=\frac{u_w}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_e}{v_w}\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{w_e}{v_w}\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\right)\right]\qquad F_1=v_w\zeta+1-e^{v_w\zeta}$$

$$F_2={}^1/_2e^{2v_w\zeta}-({}^1/_2+2v_w\zeta)e^{v_w\zeta},\quad F_3={}^1/_2(1+v_w^2\zeta^2)e^{v_w\zeta}-{}^1/_2e^{2v_w\zeta}$$

Учитывая (2.1), (4.1) и (4.4), получаем для градиентов скоростей на поверхности тела следующие размерные формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\rho v_w u_e}{\mu} - \frac{1}{\rho v_w}\left[\frac{3}{2}A_4 + \frac{1}{2}\rho u_e F\right], \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\rho v_w w_e}{\mu} - \frac{1}{\rho v_w}\left[\frac{3}{2}B_4 + \frac{1}{2}\rho w_e F\right]$$

Отметим, что уравнения для последующих членов разложения (2.1) также могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Автор благодарит Г. А. Тирского за обсуждение результатов данной работы.

Институт механики МГУ Поступила 11 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Watson E. I.* The asymptotic theory of boundary layer flow with suction. Aeronaut. Res. Council. Repts and Mem., 1952, 2619 (1947).
2. *Morduchow M.* General asymptotic suction solution of the laminar compressible boundary layer with heat transfer. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 8.
3. *Morduchow M., Libby P. A.* Class of solutions of the axi-symmetric boundary – layer equations with mass transfer. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 10.
4. *Гершбейн Э. А.* Асимптотическое решение уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при интенсивном отсосе. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6.
5. *Gersten K.* Die kompressible Grenzschichtströmung am dreidimensionalen Staupunkt bei starkem Absaugen oder Ausblasen. Wärme- und Stoffübertrag., 1973, Bd 6, No. 1.
6. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. *Шевелев Ю. Д.* Численный расчет пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5.
8. *Шевелев Ю. Д.* Численное исследование пространственного пограничного слоя в сжимаемом газе. Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 4.