МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1975

УДК 532.526.2

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЯХ

В. С. КАПЛАН

(Москва)

Точные решения играют важную роль в теории пограничного слоя. Традиционный путь получения этих решений – уменьшение числа независимых переменных в уравнениях пограничного слоя. Цель данной работы заключается в том, чтобы описать структуру решений, для которых возможно такое упрощение.

1. Рассматривается стационарное течение несжимаемой жидкости в трехмерном ламинарном пограничном слое на развертывающейся поверхности. На таких поверхностях уравнения пограничного слоя могут быть записаны так же, как на плоскости, т. е.

$$
\begin{aligned}
& u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
& u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\qquad(1.1)\\
& \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0
\end{aligned}
$$

Здесь x, z — система ортогональных криволинейных координат на обтекаемой поверхности; y измеряется вдоль нормали к поверхности; u, v, w — проекции скорости в пограничном слое на направления x, y, z соответственно; p — давление. Все величины безразмерные.

Уравнения трехмерного пограничного слоя, как известно, допускают редукцию, т. е. имеют решения, расчет которых сводится либо к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, либо к интегрированию уравнений в частных производных, но не от трех, а лишь от двух независимых переменных. Решения того и другого типов существуют только при некоторых распределениях давления $p=p(x, z)$ по поверхности обтекаемого тела или соответствующих проекциях скорости внешнего потока. (Если поверхность тела проницаемая, то скорости отсасывания или выдувания также должны быть заданы определенным образом.) Ясно, что решения первого типа суть частные случаи решений второго типа. Последние и будут рассмотрены ниже.

Методом Л. В. Овсянникова [1, 2] в работе [3] получены все допустимые распределения давления, при которых система (1.1) может иметь решения, редуцирующие ее к системе уравнений с двумя независимыми переменными (инвариантные решения второго ранга). Найдены также алгебры Ли инфинитезимальных операторов, соответствующие основным группам, которые допускает система (1.1) при каждом из полученных распределений давления. Допустимые функции $p(x, z)$ в [3] записаны в одной из четырех систем координат: декартовой, прямолинейной косоугольной, полярной и спиральной равноугольной (имеются в виду те системы координат, которые получаются, если поверхность развернуть в плоскость). Далее распределения давления и алгебры Ли, отнесенные к прямолинейной косоугольной системе, будут представлены в декартовой системе, так как указанные распределения не меняют вида при переходе от косоугольных координат к декартовым.

2. Для каждого распределения давления, полученного в работе [3], известным способом [1] были найдены инвариантные решения второго ранга системы (1.1). Эти решения построены на однопараметрических подгруппах основных групп, допускаемых уравнениями (1.1) при том или ином распределении давления (бесконечномерная подгруппа, порождаемая оператором

$$X_\infty=\varphi(x,z)\frac{\partial}{\partial y}+\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial v}$$

не дает физически приемлемого решения [4]). Выкладки, которые здесь не приводятся, заключались в том, что для каждой алгебры Ли из [3] определялась оптимальная система однопараметрических подгрупп, а затем находились инварианты подгрупп, входящих в эту систему. При соответствующем выборе инвариантов все найденные решения могут быть представлены формулами

$$\begin{gathered}
v_\alpha=\gamma_{11}(\alpha,\beta)F(\xi,\eta)+\gamma_{12}(\alpha,\beta)H(\xi,\eta)\\
v_\eta=[G(\xi,\eta)+\gamma_{21}(\alpha,\beta)\eta F(\xi,\eta)+\gamma_{22}(\alpha,\beta)\eta H(\xi,\eta)]\gamma(\alpha,\beta)\\
v_\beta=\gamma_{31}(\alpha,\beta)F(\xi,\eta)+\gamma_{32}(\alpha,\beta)H(\xi,\eta)\\
\xi=\xi(\alpha,\beta),\qquad \eta=y\gamma(\alpha,\beta)
\end{gathered}\tag{2.1}$$

Здесь α, y, β — система ортогональных криволинейных координат, в которой α, β — декартовы, полярные или спиральные равноугольные координаты на поверхности.

В табл. 1 приведены коэффициенты формул (2.1) для решений в декартовой системе координат ($\alpha=x$, $\beta=z$), для которых $\gamma_{21}=0$. В табл. 2 указаны те же функции для решений в системе полярных координат ($\alpha=\theta$, $\beta=r$). Наконец, по табл. 3 находятся решения в спиральной равноугольной системе координат λ, μ, связанных с полярными координатами соотношениями

$$\lambda=[A\theta-B\ln r]\,/\,(A^2+B^2),\quad \mu=[B\theta+A\ln r]\,/\,(A^2+B^2)$$

где A и B — произвольные, но не равные нулю константы. Для последних решений $\gamma_{12}=\gamma_{31}=0$. Для каждого распределения давления в таблицах указаны только те решения, которые не могут быть получены при более общем распределении. Поэтому количество допустимых распределений давления стало меньше, чем в работе [3], а количество существенно различных решений при некоторых распределениях давления меньше числа подгрупп в соответствующих оптимальных системах.

Часть приведенных в табл. 1—3 решений была найдена и опубликована раньше. В работе [5] получены решения {1.3}, {2.6} при $p_1=0$ и {3.1} (здесь и далее первая цифра в фигурных скобках означает номер таблицы, затем стоит номер решения в этой таблице). Вывод [5] о том, что система (1.1) не имеет других инвариантных решений второго ранга, оказался, как видим, ошибочным. Позднее вновь были получены [6] решения {1.3}, {3.1} и, кроме того, решения {2.2}, {2.4} и {3.2}.

При сравнении результатов работ следует иметь в виду различие в постановках задачи. В [5, 6] давление рассмотрено наряду с проекциями скорости и под инвариантным решением системы (1.1) подразумевают со-

Таблица 1

	p	ξ	γ	γ_{11}	γ_{12}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
1	$\Phi(x) - p_1 z$	x	1	1	0	0	0	1
2	$\Phi(x) - \frac{1}{2} p_1 z^2$	x	1	1	0	0	0	z
3	$p_0 - \Phi(x) e^{2mz}$	x	$e^{\frac{mz}{2}}$	e^{mz}	0	$-\frac{m}{2}$	0	e^{mz}
4	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 x^{2m} - \frac{1}{2} p_2 z^{2n}$	$x^{\frac{m-1}{1-n}} z$	$x^{\frac{(m-1)}{2}}$	0	x^m	$\frac{1-m}{2}$	$x^{\frac{n(m-1)}{n-1}}$	$\frac{m-1}{n-1} x^{m-1} z$
5	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 x^{2m} - p_2 \ln z$	$x^{m-1} z$	$x^{\frac{(m-1)}{2}}$	0	x^m	$\frac{1-m}{2}$	1	$(1-m) x^{m-1} z$
6	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 e^{2mx} - \frac{1}{2} p_2 z^{2n}$	$e^{\frac{mx}{1-n}} z$	$e^{\frac{mx}{2}}$	0	e^{mx}	$-\frac{m}{2}$	$e^{\frac{mnx}{n-1}}$	$\frac{m}{n-1} e^{mx} z$
7	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 e^{2mx} - p_2 \ln z$	$e^{mx} z$	$e^{\frac{mx}{2}}$	0	e^{mx}	$-\frac{m}{2}$	1	$-m e^{mx} z$
8	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 x^{2m} - p_2 z$	$x^{2(m-1)} z$	$x^{\frac{(m-1)}{2}}$	0	x^m	$\frac{1-m}{2}$	x^{1-m}	$2(1-m) x^{m-1} z$
9	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 x^2 - p_2 z$	$z - k \ln x$	1	0	x	0	1	k
10	$p_0 - p_1 \ln x - p_2 z$	$x^{-2} z$	$x^{-\frac{1}{2}}$	0	1	$\frac{1}{2}$	x	$\frac{2z}{x}$
11	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 e^{2mx} - p_2 z$	$e^{2mx} z$	$e^{\frac{mx}{2}}$	0	e^{mx}	$-\frac{m}{2}$	e^{-mx}	$-2m e^{mx} z$
12	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 x^2 - \frac{1}{2} p_2 z^2$	$x^{-k} z$	1	0	x	0	x^k	kz
13.1	$p_0 - \frac{1}{2} p_1 x^{2m}$	z	$x^{\frac{(m-1)}{2}}$	0	x^m	$\frac{1-m}{2}$	x^{m-1}	0
13.2	»	$x e^{-z}$	$e^{\frac{(m-1)z}{2}}$	z^{mz}	$x e^{(m-1)z}$	$\frac{1-m}{2}$	0	$e^{(m-1)z}$
13.3	»	$x z^{-k}$	$z^{\frac{k(m-1)}{2}}$	z^{km}	$k x z^{k(m-1)}$	$\frac{k(1-m)}{2}$	0	$z^{k(m-1)+1}$
14.1	$p_0 - p_1 \ln x$	z	$x^{-\frac{1}{2}}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$1/x$	0
14.2	»	$x e^{-z}$	$e^{-z/2}$	1	$x e^{-z}$	$\frac{1}{2}$	0	e^{-z}
14.3	»	$x z^{-k}$	$z^{-k/2}$	1	$k x z^{-k}$	$\frac{k}{2}$	0	z^{1-k}

Таблица 1 (окончание)

	p	ξ	γ	γ_{11}	γ_{12}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
15.1	$p_0-\frac{1}{2}p_1e^{2mx}$	z	$e^{mx/2}$	0	e^{mx}	$-\frac{m}{2}$	e^{mx}	0
15.2	»	$x-z$	$e^{mx/2}$	0	e^{mx}	$-\frac{m}{2}$	$-e^{mx}$	e^{mx}
15.3	»	$x-k\ln z$	$z^{km/2}$	z^{km}	kz^{km}	$-\frac{km}{2}$	0	z^{km+1}
16.1	$p_0-\frac{1}{2}p_1(x^2+z^2)$	x	1	1	0	0	z/x	$1/x$
16.2	»	$\ln x-\frac{z}{x}$	1	0	x	0	$-x$	$x+z$
16.3	»	$x^{-k}z$	1	0	x	0	x^k	kz
16.4	»	*	1	x	$-z$	0	z	$x-2kz$
17.1	p_0-p_1x	z	1	0	1	0	1	0
17.2	»	z	1	x/z	$1/z$	0	1	0
17.3	»	$x-\frac{1}{2}z^2$	1	1	z	0	0	1
17.4	»	$e^{-x}z$	1	0	1	0	e^x	z
17.5	»	xe^{-2z}	$e^{-z/2}$	e^z	$2xe^{-z}$	$\frac{1}{2}$	0	e^{-z}
17.6	»	$\frac{x}{z}-\frac{1}{2}\ln z$	$z^{-1/4}$	$z^{1/2}$	$(2x+z)z^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$2z^{1/2}$
17.7	»	$x^{-k/2}z$	$x^{-1/4}$	0	$2x^{1/2}$	$\frac{1}{2}$	$x^{(k-1)/2}$	$kx^{-1/2}z$

* $\xi=\frac{1}{2}\ln(x^2-2kxz+z^2)+\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z-kx}{\sqrt{1-k^2}\,x}\right)$.

Таблица 2

	p	ξ	γ	γ_{11}	γ_{12}	γ_{22}	γ_{31}	γ_{32}
1	$p_0-\Phi(\theta)\,r^{2m}$	θ	$r^{\frac{m-1}{2}}$	r^m	0	$\frac{1-m}{2}$	0	r^m
2	$p_0-\Phi(r)\,e^{2m\theta}$	r	$e^{\frac{m}{2}\theta}$	0	$e^{m\theta}$	$-\frac{m}{2r}$	$e^{m\theta}$	0
3	$\Phi(\theta)-p_1\ln r$	θ	$r^{-\frac{1}{2}}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	1
4	$\Phi(r)-p_1\theta$	r	1	0	1	0	1	0
5	$p_0-\frac{1}{2}p_1r^{2m}e^{2n\theta}$	$\theta-k\ln r$	$r^{\frac{l-1}{2}}$ $l=m+kn$	r^l	kr^l	$\frac{1-l}{2}$	0	r^l
6	$p_0-p_1\theta-p_2\ln r$	$\theta-k\ln r$	$r^{-\frac{1}{2}}$	1	k	$\frac{1}{2}$	0	1

Таблица 3

	p	ξ	γ	γ_{11}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{32}
1	$p_0-\Phi(\lambda)e^{2m\mu}$	λ	$(A^2+B^2)^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{B}{2}\lambda+\frac{m-A}{2}\mu}$	$e^{m\mu}$	$-\frac{B}{2}$	$\frac{A-m}{2}$	$e^{m\mu}$
2	$\Phi(\lambda)-p_1\mu$	λ	$(A^2+B^2)^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{B}{2}\lambda-\frac{A}{2}\mu}$	1	$-\frac{B}{2}$	$\frac{A}{2}$	1

вокупность четырех функций (u, v, w, p). В данной же работе решением названа совокупность u, v, w, а давление рассматривается как некоторая функция $p(x, z)$, входящая в систему (1.1). Аналогичная ситуация встретилась в работе [12]. При второй постановке задачи набор инвариантных решений будет шире. Действительно, если по основной группе, полученной в [5] (для стационарного течения в [6] получена та же основная группа), найти все существенно различные решения второго ранга системы (1.1), то окажется, что они охватывают только решения {1.1} и {1.3}, а также решения, указанные в табл. 2 и 3, причем классификация решений будет, конечно, другой. Можно показать, что это те решения, которые находятся без использования характерного свойства развертывающейся поверхности — равенства нулю ее полной кривизны.

В результате подстановки выражений (2.1) в уравнения пограничного слоя, записанные в соответствующей системе координат, получают редуцированные системы вида

$$
\begin{gathered}
F\frac{\partial F}{\partial \xi}+G\frac{\partial F}{\partial \eta}+g_{11}F^2+g_{12}FH+g_{13}H^2=f_1+\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\\
F\frac{\partial H}{\partial \xi}+G\frac{\partial H}{\partial \eta}+g_{21}F^2+g_{22}FH+g_{23}H^2=f_2+\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}\\
\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}+g_{31}F+g_{32}H=0
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

где f_i и g_{ij} — известные функции одного только ξ, причем g_{ij} в большинстве случаев — константы. Таким образом, задача сводится к интегрированию системы уравнений с двумя независимыми переменными. Единообразие систем (2.2), достигнутое надлежащим выбором инвариантов соответствующих подгрупп, позволяет рассчитать все инвариантные решения на ЭЦВМ по одной программе.

3. Чтобы проинтегрировать систему (2.2), требуется задать краевые условия для функций F, G, H. Пусть $F\to F_e(\xi)$, $H\to H_e(\xi)$, а $v_\alpha\to V_\alpha$, $v_\beta\to V_\beta$ при $\eta\to\infty$. Связь между этими функциями получают путем предельного перехода в формулах (2.1)

$$
V_\alpha=\gamma_{11}F_e+\gamma_{12}H_e,\qquad V_\beta=\gamma_{31}F_e+\gamma_{32}H_e
\tag{3.1}
$$

Если предположить, как обычно, что при $\eta\to\infty$ все производные по η исчезают, то предельный переход в уравнениях (2.2) дает систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
F_eF_e'+g_{11}F_e^2+g_{12}F_eH_e+g_{13}H_e^2=f_1\\
F_eH_e'+g_{21}F_e^2+g_{22}F_eH_e+g_{23}H_e^2=f_2
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

из которых и находят краевые условия для F и H на внешней границе пограничного слоя. Краевые условия на поверхности обтекаемого тела ($\eta=0$) для непроницаемой поверхности можно задать в виде $F=G=H=0$.

Как известно, при произвольном выборе скоростей V_α и V_β внешний поток будет, вообще говоря, динамически невозможным. В динамически возможных потоках V_α и V_β связаны соотношением, которое в декартовых координатах записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(U\Omega)+\frac{\partial}{\partial z}(W\Omega)=0 \tag{3.3}$$

где $U=V_x$, $W=V_z$, а через $\Omega=\partial U/\partial z-\partial W/\partial x$ обозначена проекция вихря во внешнем потоке на нормаль к поверхности обтекаемого тела. Краевые условия, полученные путем интегрирования системы (3.2), всегда будут динамически возможными.

4. Частными случаями описанных инвариантных решений являются решения некоторых известных задач. В этих задачах выполнено интегрирование системы (2.2).

Для решения (1.1) система (3.2) примет вид $F_eF_e'=-\Phi'(X)$, $F_eH_e'=p_1$. Интегрирование этой системы и использование формул (3.1) дает общие выражения проекций скорости, давления и вихря во внешнем потоке

$$\begin{gathered}U=F_e=f(x),\qquad W=H_e=p_1\int\frac{dx}{f(x)}+c\\ p=p_0-\frac{1}{2}f^2(x)-p_1z,\qquad \Omega=-\frac{p_1}{f(x)}\end{gathered} \tag{4.1}$$

где $\Phi(x)=p_0-f^2(x)/2$, $f(x)$ – произвольная функция, c – произвольная постоянная. В простейшем случае $f(x)=a=\mathrm{const}$, отсюда следует при $p_1=ab$, что

$$U=a,\qquad W=bx+c,\qquad p=p_0-abz,\qquad \Omega=-b \tag{4.2}$$

Уравнения пограничного слоя в случае «параболического» внешнего потока (4.2), линия тока которого – параболы, были проинтегрированы в [7] при $c=0$ и [8]. В работе [9] решение [8] распространено на случай, когда поверхность обтекаемого тела проницаема. Хансен и Херциг (см. [10]) рассмотрели более общий случай $U=a$, $W=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$. Но при $n\geqslant2$ такой внешний поток динамически невозможен, как видно из условия (3.3), а при $n<2$ получается решение [8]. Действительное обобщение этого решения найдено в [11], где рассчитан пограничный слой с внешним потоком, определяемым по формулам (4.1), если в них положить $f(x)=ax^m$, $p_1=ab(1-m)$.

При $p_1=0$ формулы (4.1) дают потенциальный внешний поток

$$U=U(x),\qquad W=\mathrm{const},\qquad p=p_0-{}^1/_2U^2(x)$$

который соответствует задаче о пограничном слое на скользящем бесконечном цилиндре. Точное решение уравнений пограничного слоя на скользящей пластине ($U=\mathrm{const}$) найдено в [12]. В [13] рассчитан пограничный слой при $U=ax^m$. Это решение можно рассматривать как частный случай (при $b=0$) решения [11]. Решение при $U=ax+bx^3$ вычислено в [14]. С целью обобщения этого решения в [15] рассмотрен внешний поток, в котором $U(x)$ – произвольная нечетная функция, $W(x)$ – произвольная функция. Но такой внешний поток будет динамически возможным только в частном случае $W=\mathrm{const}$, который как раз и рассматривался в работах [12, 14].

Для решения (1.2) система (3.2) при $p_1=b^2>0$ будет следующей:

$$F_eF_e'=-\Phi'(x),\qquad F_eH_e'+H_e^2=b^2$$

Если положить

$$\Phi(x)=p_0-\frac{1}{2}f^2(x),\qquad t=-f\frac{dx}{f(x)}$$

где $f(x)$ – произвольная функция, и найти общее решение этой системы, то формулы внешнего потока примут вид

$$U=f(x),\qquad W=bz\frac{1+ce^{2bt}}{1-ce^{2bt}}$$

$$p=p_0-\frac{1}{2}[f^2(x)+b^2z^2],\qquad \Omega=\frac{4b^2ce^{2bt}}{(1-ce^{2bt})^2 f(x)}$$

При $f(x)=ax$, $a=b$, $c=0$ эти формулы дают потенциальный внешний поток для осесимметричного пограничного слоя в окрестности критической точки. Соответствующее точное решение уравнений Навье – Стокса было найдено Хоманом (см. [10]) и позднее [16]. В [17] решена задача о пограничном слое в окрестности критической точки тела, имеющего в ней разные главные радиусы кривизны (неосесимметричной критической точки). Для этого случая $f(x)=ax$, $c=0$. Еще более общий случай $f(x)=ax^m$, $c=0$ рассмотрен в [18].

Ряд точных решений уравнений трехмерного пограничного слоя на развертывающихся поверхностях найден в задачах, в которых давление зависит только от радиуса. Этим случаям соответствует либо решение {2.2} при $m=0$, либо решение {2.4} при $p_1=0$. Для первого система (3.2) примет вид

$$F_eF_e'-\frac{1}{r}H_e^2=\Phi'(r),\qquad F_eH_e'+\frac{1}{r}F_eH_e=0$$

Если положить $F_e=f(r)\neq0$ и найти общее решение этой системы, то внешний поток окажется потенциальным

$$V_r=f(r),\qquad V_\theta=\frac{b}{r},\qquad p=p_0-\frac{1}{2}\left[f^2(r)+\frac{b^2}{r^2}\right] \tag{4.3}$$

В [19] рассчитан пограничный слой на внутренних стенках кругового конуса (воронки), в вершине которого помещен сток, а на оси – сосредоточенный вихрь. Если начало полярной системы координат расположить в вершине конуса, то внешний поток будет задан формулами (4.3), в которых $f(r)=a/r^2$. (В работе [20] рассмотрена та же задача, а в [21–23] – ее частные случаи, но во всех этих работах найдены приближенные решения.) Исследован [24–26] также пограничный слой на плоскости, нормально к которой расположен вихрь, а по его оси непрерывно и равномерно распределены источники (линейный вихреисточник). В этом случае в формулах (4.3) нужно положить $f(r)=a/r$. Более частную задачу, когда, кроме того, $b=0$ (линейный источник), решил Вийнгаарден (см. [7]).

Наконец, примером решения в спиральной равноугольной системе координат может служить работа [27], в которой использовано одно из таких решений для расчета пограничного слоя на плоской стенке при условии, что линии тока внешнего течения – логарифмические спирали (моделировался пограничный слой на стенке турбины). Приближенное решение [27] соответствует решению (3.1) при потенциальном внешнем потоке

$$V_\lambda=0,\qquad V_\mu=ce^{\lambda-k\zeta},\qquad p=p_0-{}^1/_2V_\mu^2$$

т. е. при $A=-m=k$, $B=1$.

Набор решений получен также в задачах о пограничном слое на осесимметричных телах, вращающихся в жидкости или обтекаемых вращающейся жидкостью. При этом в пограничном слое имеются три проекции скорости, которые зависят от двух переменных, т. е. уравнения пограничного слоя будут с самого начала редуцированы, например задача [28] о пограничном слое на вращающемся полубесконечном круговом цилиндре, который обтекается параллельно его образующим ($U=\mathrm{const}$, $W=0$, $p=\mathrm{const}$). Примеры расчетов пограничного слоя на дисках, вращающихся в безграничном или ограниченном пространствах, можно найти в монографиях [29, 10].

Уместно отметить, что допустимые распределения давления и соответствующие инвариантные решения на поверхностях ненулевой полной кривизны описаны в работе [30].

Поступила 10 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
2. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3.

3. *Каплан В. С.* Условия существования инвариантных решений уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя на развертывающихся поверхностях. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 3.
4. *Каплан В. С.* Структура решений, редуцирующих уравнения пространственного безградиентного пограничного слоя. Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1517.
5. *Гребнев О. К.* Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя в случае несжимаемой жидкости. Тр. Ленингр. воен.-возд. инж. акад., 1965, вып. 473.
6. *Гараев К. Г.* Групповые свойства уравнений нестационарного пространственного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1970, вып. 119.
7. *Wuest W.* Verallgemeinerte ähnliche Lösungen bei dreidimensionalen Grenzschichten. Mitt. a. d. Max–Planck–Inst., 1959, No. 24.
8. *Loos H. G.* A simple laminar boundary layer with secondary flow. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 1.
9. *Каплан В. С., Щеглова В. М.* Трехмерный ламинарный пограничный слой на проницаемой пластине. Инж.-физ. ж., 1969, т. 16, № 3.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
11. *Богданова В. В.* Ламинарный пространственный пограничный слой с продольным и поперечным перепадом давления. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
12. *Струминский В. В.* Теория пространственного пограничного слоя на скользящем крыле. Сборник теоретических работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957.
13. *Cooke J. C.* The boundary layer of a class infinite yawed cylinders. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, vol. 46, pt 4.
14. *Sears W. R.* The boundary layer of yawed cylinders. J. Aeronaut. Sci., 1948, vol. 15, No. 1.
15. *Benenson D.* Three-dimensional flow about yawed cylinders. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 2.
16. *Гребнев О. К.* Пример точного решения уравнений пространственного пограничного слоя. Тр. Ленингр. воен.-возд. инж. акад., 1959, вып. 293.
17. *Howarth L.* The boundary layer in three-dimensional flow, pt 2. Philos. Mag., Ser. 7, 1951, vol. 42, No. 335.
18. *Wilkinson J.* Some examples of three-dimensional effects in boundary layer flow. Aeronaut. Quart., 1954, vol. 5, pt 1.
19. *Garbsch K.* Über die Grenzschicht an der Wand eines Trichters mit innerer Wirbel- und Radialströmung. In: 50 Jahre Grenzschichtforschung. Braunschweig, Friedr. Vieweg, 1955.
20. *Binnie A. M., Harris D. P.* The application of boundary-layer theory to swirling liquid flow through a nozzle. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, vol. 3, pt 1.
21. *Taylor G. I.* The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, vol. 3, pt 2.
22. *Cooke J. C.* On Pohlhausen's method with application to a swirl problem of Taylor. J. Aeronaut. Sci., 1952, vol. 19, No. 7.
23. *Наумова Л. Г.* Пространственный ламинарный пограничный слой на бесконечном круговом секторе. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
24. *Prandtl L.* Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen. In: Festschrift zum 60. Geburtstage von A. Betz. Göttingen, 1945.
25. *Geis Th.* «Ähnliche» dreidimensionale Grenzschichten. J. Ration. Mech. and Analysis, 1956, vol. 5, No. 4.
26. *Струминский В. В.* Трехмерный пограничный слой при двумерном потенциальном потоке на его внешней границе. Тр. ЦАГИ, 1957, вып. 696.
27. *Senoo Y.* Three-dimensional laminar boundary layer in curved channel with acceleration. Trans. ASME, 1958, vol. 80, No. 8.
28. *Howarth L.* Note on the boundary layer on a rotating sphere. Philos. Mag., Ser. 7, 1951, vol. 42, No. 334.
29. *Дорфман Л. А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960.
30. *Каплан В. С.* Инвариантные решения уравнений ламинарного пограничного слоя на поверхностях ненулевой кривизны. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2.