

О ВТОРИЧНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

А. А. НЕПОМНЯЩИЙ

(Пермь)

Стационарное плоскопараллельное движение в вертикальном слое между изотермическими плоскостями, нагретыми до разной температуры, при малых и умеренных значениях числа Прандтля неустойчиво по отношению к монотонно нарастающим возмущениям [1]. Результаты численных экспериментов, произведенных методом сеток [2, 3], свидетельствуют о том, что эта неустойчивость приводит к развитию стационарных вторичных движений; вторичные движения исследовались также в [4] посредством усреднения исходных уравнений. В настоящей работе рассматриваются плоские и трехмерные стационарные пространственно-периодические вторичные движения вблизи порога их возникновения. Используются методы теории ветвления, применявшиеся ранее для исследования изотермических течений [5-8]. Определены области «мягкой» и «жесткой» неустойчивости плоскопараллельного движения и область устойчивости вторичных движений. Приведены результаты расчета основных характеристик вторичных движений.

1. Рассмотрим бесконечный вертикальный слой несжимаемой жидкости с плотностью ρ , коэффициентом теплового расширения β , кинематической вязкостью ν и температуропроводностью χ . Твердые границы слоя $x = \pm d$ поддерживаются при постоянных температурах $\mp \Theta$. В качестве единиц длины, скорости, времени, давления и температуры выберем соответственно d , ν/d , d^2/ν , $\rho\nu^2/d^2$ и Θ . Полагая движение плоским, запишем уравнения для функции тока Ψ и температуры T

$$(1.1) \quad \Delta^2 \Psi - G \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = \frac{D(\Psi, \Delta \Psi)}{D(z, x)}, \quad \frac{1}{P} \Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D(\Psi, T)}{D(z, x)}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{D(f, g)}{D(z, x)} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z}$$

где $G = g\beta\Theta d^3/\nu^2$ — число Грасгофа, $P = \nu/\chi$ — число Прандтля; ось Oz направлена вертикально вверх. Граничные условия на вертикальных стенках

$$(1.2) \quad x = \pm 1, \quad T = \mp 1, \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

(принимается условие замкнутости потока). Кроме того, предполагается ограниченность функций Ψ, T при $z \rightarrow \pm \infty$.

Система (1.1) с граничными условиями (1.2) обладает решением

$$(1.3) \quad \Psi = \Psi_0 = -1/24 G (1-x^2)^2, \quad T = T_0 = -x$$

описывающим стационарное плоскопараллельное конвективное движение с кубическим профилем скорости

$$v_x = 0, \quad v_z = G v_0(x), \quad v_0(x) = -1/6 x(1-x^2)$$

С ростом числа Грасгофа движение (1.3) становится неустойчивым, причем при $P < 12$ неустойчивость вызывается монотонно нарастающими

возмущениями [1]; при этом развиваются стационарные вторичные движения [2-4].

Рассмотрим движение, отличное от плоскопараллельного. Для отклонений $\Psi' = \Psi - \Psi_0$, $T' = T - T_0$ имеем уравнение

$$(1.4) \quad \left(A + GB - \frac{\partial}{\partial t} C \right) U = \frac{1}{2} D(U, U)$$

$$U = \begin{pmatrix} \Psi' \\ T' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{P} \Delta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -v_0 \frac{\partial}{\partial z} \Delta + v_0'' \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -v_0 \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

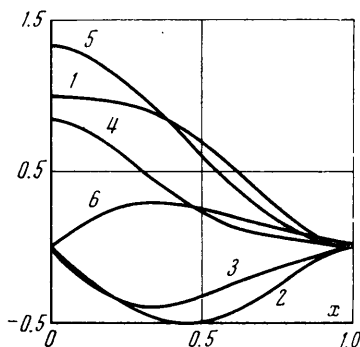
$$D(U_1, U_2) = \begin{pmatrix} \frac{D(\Psi_1', \Delta \Psi_2')}{D(z, x)} + \frac{D(\Psi_2', \Delta \Psi_1')}{D(z, x)} \\ \frac{D(\Psi_1', T_2')}{D(z, x)} + \frac{D(\Psi_2', T_1')}{D(z, x)} \end{pmatrix}$$

Граничные условия для компонент функции U однородны

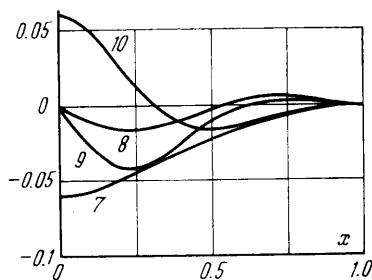
$$(1.5) \quad x = \pm 1, \quad \Psi' = \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = T' = 0$$

В дальнейшем для краткости граничные условия выписываться не будут.

В данном разделе рассматриваются малые стационарные пространственно-периодические решения задачи (1.4) с периодом $2\pi/k$, отвечающие от решения $U=0$, соответствующего плоскопараллельному движению.



Фиг. 1



Фиг. 2

нию. Используется метод малого параметра, примененный ранее в ряде работ [5-9] для исследования нелинейной устойчивости стационарных движений и расчета вторичных течений в изотермическом случае.

Для записи уравнений будем обозначать через A_m , B_m , C_m операторы A , B , C , в которых $\partial/\partial z$ заменяется на imk , а через D_{ml} — билинейный опе-

ратор D , в котором $\partial/\partial z$ заменяется на imk , если действует на первую функцию, и на ilk , если на вторую. Решение будем искать в виде

$$(1.6) \quad U = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U^{(n)}, \quad G = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n G^{(n)}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(G)$ — вещественный малый параметр (амплитуда периодической компоненты). Подставим разложения (1.6) в (1.4) и потребуем выполнения равенств в каждом порядке по ε .

В первом порядке получим однородное уравнение

$$(A + G^{(0)}B)U^{(1)} = 0$$

совпадающее с уравнением для нейтральных возмущений плоскопараллельного движения. Оно определяет нейтральную кривую $G^{(0)}(k)$ и нейтральное возмущение

$$(1.7) \quad U^{(1)} = u_1^{(1)}(x) \exp ikz + \\ + u_{-1}^{(1)}(x) \exp(-ikz), \quad u_{-1}^{(1)} = \bar{u}_1^{(1)}$$

где функция $u_1^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$(1.8) \quad (A_1 + G^{(0)}B_1)u_1^{(1)} = 0$$

$$u_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)}(x) \\ \vartheta_1^{(1)}(x) \end{pmatrix}$$

Уравнение (1.8) представляет собой частный случай задачи для определения декрементов затухания $\lambda(k, G)$ нормальных возмущений u плоскопараллельного движения, исследованной в [1, 10]; эта задача имеет вид

$$(A_1 + GB_1 + \lambda C_1)u = 0$$

Отметим следующее свойство функций $u_1^{(1)}(x)$, вытекающее из нечетности профилей скорости и температуры основного движения: $\text{Re } \Phi_1^{(1)}$ и $\text{Im } \vartheta_1^{(1)}$ четны по x , а $\text{Im } \Phi_1^{(1)}$ и $\text{Re } \vartheta_1^{(1)}$ нечетны [1].

В следующих порядках по ε получаем линейные неоднородные уравнения

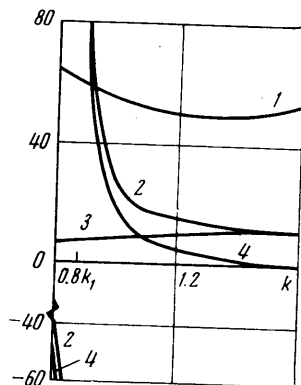
$$(A + G^{(0)}B)U^{(n)} = \sum_{m=1}^{n-1} \left[-G^{(n-m)}U^{(m)} + \frac{1}{2}D(U^{(n-m)}, U^{(m)}) \right]$$

решения которых имеют вид

$$U^{(n)} = \sum_{m=-n}^n u_m^{(n)}(x) \exp imkz$$

Величина $G^{(n)}$ при $n \geq 1$ определяется из условия разрешимости уравнения для $u_1^{(n+1)}$, состоящего в ортогональности правой части уравнения решению u_1^c однородной задачи, сопряженной с (1.8). Скалярное произведение (u_1, u_2) определяем следующим образом:

$$(u_1, u_2) = \int_{-1}^1 dx (\Phi_1 \Phi_2 + \bar{\vartheta}_1 \vartheta_2)$$



Фиг. 3

Функции $u_1^{(n+1)}$ при $n > 0$ определены с точностью до произвольного решения однородного уравнения $\text{const} \cdot u_1^{(1)}$; эта неопределенность может быть устранена наложением условия $(u_1^{(1)}, u_1^{(n+1)}) = 0$.

Нетрудно установить по индукции: 1) $\text{Re } \varphi_m^{(n)}, \text{Im } \vartheta_m^{(n)}$ четны по x , $\text{Im } \varphi_m^{(n)}, \text{Re } \vartheta_m^{(n)}$ нечетны; 2) все величины $G^{(n)}$ вещественны; этот результат подтверждает предположение о стационарности вторичного движения, развивающегося в результате монотонной неустойчивости основного движения; 3) $G^{(n)} = 0$ при n нечетном, т. е. $G = G(\varepsilon^2)$ (замена $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ означает просто сдвиг начала отсчета по z на полпериода); 4) $u_m^{(n)} = 0$, если m и n разной четности.

Наибольший интерес представляет величина $G^{(2)}$: если $G^{(2)} > 0$, имеет место «мягкий» тип неустойчивости, если $G^{(2)} < 0$ — «жесткий» тип. Эта величина вычисляется по формулам

$$(1.9) \quad G^{(2)} = d/b, \quad b = (u_1^c, B_1 u_1^{(1)}), \quad d = d_0 + d_2$$

$$d_0 = (u_1^c, D_{0,1}(u_0^{(2)}, u_1^{(1)})), \quad d_2 = (u_1^c, D_{2,-1}(u_2^{(2)}, u_{-1}^{(1)}))$$

2. Величина $G^{(2)}$ для различных значений k и P определялась численно. Функции $u_m^{(n)}$ ($m, n \leq 2$) были получены в виде степенных рядов по координате x

$$u_m^{(n)} = \sum_s u_{m,s}^{(n)} x^s$$

Так, для получения решения $u_1^{(1)}$ и величины $G^{(0)}(k)$ строились 6 линейно независимых решений уравнения (1.8) с различными значениями начальных коэффициентов разложения ($0 \leq s \leq 3$ для $\varphi_1^{(1)}$ и $0 \leq s \leq 1$ для $\vartheta_1^{(1)}$). Остальные коэффициенты определялись с помощью рекуррентных формул, получаемых из (1.8). Условие выполнения граничных условий приводит к однородной линейной системе уравнений для начальных коэффициентов. При $G = G^{(0)}(k)$ детерминант этой системы обращается в нуль, и значения начальных коэффициентов определяются с точностью до общего нормировочного множителя; неопределенность устраняется выбором $\varphi_1^{(1)}(0) = 1$. Аналогично вычислялись функции $u_2^{(2)}$. Для $u_0^{(2)}$ коэффициенты разложения вычислялись непосредственно, за исключением величин $\varphi_{0,0}^{(2)}, \vartheta_{0,1}^{(2)}$ и $\varphi_{0,2}^{(2)}$ опреде-

ляемых из условия выполнения граничных условий. Уравнение для $u_1^{(3)}$ приводится к неоднородной линейной системе алгебраических уравнений для начальных коэффициентов с детерминантом, равным нулю. Величина $G^{(2)}$ может быть определена непосредственно из условия разрешимости этой системы без использования формул (1.9).

Типичные результаты расчетов представлены на фиг. 1–5. На фиг. 1–2 приведены графики функций $u_{(m)}^{(n)}$ для $k=1.4, P=0.8$ (линиям 1–10 соответствуют

функции $\text{Re } \varphi_1^{(1)}, \text{Im } \varphi_1^{(1)}, 10\text{Re } \vartheta_1^{(1)}, 10\text{Im } \vartheta_1^{(1)}, \varphi_0^{(2)}, 10\vartheta_0^{(2)}, \text{Re } \varphi_2^{(2)}, \text{Im } \varphi_2^{(2)}, 10\text{Re } \vartheta_2^{(2)}, 10\text{Im } \vartheta_2^{(2)}$).

На фиг. 3 изображены графики величин $G^{(0)}(k)$ (линия 1 — $G^{(0)} \cdot 10^{-1}$),

$$G^{(2)}(k), G_0^{(2)}(k) = d_0(k)/b(k) \text{ и } G_2^{(2)}(k) = d_2(k)/b(k)$$

для $P=0$ (линии 2–4).

Результаты расчета нейтральной кривой $G^{(0)}(k)$ согласуются с данными, полученными ранее с помощью методов Бубнова — Галеркина и Рунге — Кутты [1, 6]. «Жесткое» возбуждение ($G^{(2)} < 0$) имеет место для возмущений с $k < k_1$, где k_1 определяется равенством $G^{(0)}(k_1) = G^{(0)}(2k_1)$.

Этот результат естественен, так как при наложении возмущения с $k < k_1$ нелинейные члены в уравнении (1.4) генерируют возмущение с волновым числом $2k$, попадающим в интервал неустойчивости. При $k > k_1$ и, в частности, в точке минимума нейтральной кривой $k = k_c$ (при изменении значений P величина k_c изменяется в пределах $1.35 < k_c < 1.42$) $G^{(2)} > 0$ и отвечающее решение лежит в надкритической области.

На фиг. 4 изображена зависимость от P величин $G^{(2)}$, $G_0^{(2)}$ и $G_2^{(2)}$ для $k = 1.4$ (линии 1–3). Для данного значения k , лежащего вблизи минимума нейтральной кривой для всех P , отношение $G_2^{(2)}/G_0^{(2)} < 0.2$, что дает оценку точности методов, ограничивающихся учетом изменения средних профилей скорости и температуры для вторичного движения [4]. На фиг. 5 приведены графики величин

$$A = (\max \Psi(0, z) - \min \Psi(0, z))^2 / (G - G^{(0)})$$

$$B = (\langle \Psi(0, z) \rangle - \Psi_0(0)) / (G - G^{(0)})$$

$$C = \left(\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}(0, z) \right\rangle - \frac{dT_0}{dx}(0) \right) / (G - G^{(0)})$$

$$D = \left(\left\langle \frac{dT}{dx}(1, z) \right\rangle - \frac{dT_0}{dx}(1) \right) / (G - G^{(0)})$$

в пределе $G \rightarrow G^{(0)}$ для $k = 1.4$ (линиям 1–4 соответствуют величины A , $B \cdot 10^2$, $C \cdot 10^3$ и $D \cdot 10^3$); знак $\langle \rangle$ обозначает усреднение по z . Отметим, что при $P \rightarrow 0$ $C = O(P^2)$, $D = O(P^2)$; $P \rightarrow \infty$ $G^{(2)} = O(P)$, $A = O(P^{-1})$.

3. До сих пор задача рассматривалась в плоской постановке. Плоскопараллельное движение (1.3), однако, неустойчиво также по отношению к возмущениям вида $u(x) \exp(ik_z z + ik_y y)$, что может приводить к развитию трехмерных вторичных движений. Как показано в [4], знание нейтральной кривой $G^{(0)}(k)$ для плоских возмущений при любой ориентации слоя позволяет восстановить вид всей нейтральной поверхности $G^{(0)}(k)$, $k = (k_y, k_z)$. Подобное соответствие ниже проводится в нелинейной постановке для конвективных движений в форме валов с осями, наклоненными к горизонтали.

Пусть k – волновой вектор трехмерного вторичного движения. Запишем уравнения для трехмерных отклонений (v, T, p) от плоскопараллельного движения

$$(3.1) \quad \begin{aligned} -\nabla p + \Delta v + G T \gamma - G v_0 \frac{\partial v}{\partial z} - G v_0' v_x \gamma &= (v \nabla) v \\ \frac{1}{P} \Delta T - G v_0 \frac{\partial T}{\partial z} + v_x &= v \nabla T, \quad \operatorname{div} v = 0 \end{aligned}$$

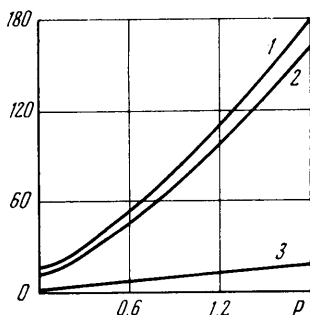
γ – единичный вектор оси Oz . Перейдя от координат x, y, z к прямоугольным координатам x, Y, Z , где $OZ \parallel k$, и учитывая, что все функции, входящие в уравнение, не зависят от Y , убеждаемся в том, что Y – компонента скорости не входит в уравнения, определяющие остальные компоненты скорости (включая уравнение непрерывности). Для движения в плоскости x, Z можно ввести функцию тока; задача приводится к виду (1.4) с заменой G на $G \cos \beta$, где β – угол между вектором k и осью Oz . Таким образом, для трехмерных движений могут быть применены результаты, полученные для плоских движений; требуется лишь пересчет по формулам

$$G^{(n)}(k) = G^{(n)}(k) / \cos \beta$$

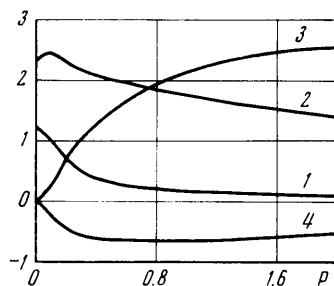
Отметим, что подобный пересчет может быть произведен также и для наклонного слоя, однако в этом случае следует применять более общие преобразования [1].

4. Перейдем к исследованию устойчивости вторичных движений. Вторичные движения с малой амплитудой периодической составляющей не-

устойчивы, если их волновой вектор $\mathbf{k}$ не близок к $\mathbf{k}_c$ ($\mathbf{k}_c$ — вектор с компонентами $k_z = k_c$, $k_y = 0$). Действительно, нетрудно показать, что переход от плоскопараллельного к вторичному движению с волновым вектором $\mathbf{k}$, периодическая составляющая которого имеет порядок ε , приводит к изменению значений декрементов затухания возмущений на величину порядка ε^2 . Исключение составляют возмущения с волновыми векторами $\mathbf{q} \pm \mathbf{k}/2$ в случае, когда декременты их затухания для плоскопараллельного движения равны; для таких возмущений изменение значений декрементов порядка ε . Отсюда ясно, что для стабилизации вторичного движения



Фиг. 4



Фиг. 5

уже при значениях амплитуды периодической составляющей порядка ε необходимо, чтобы наибольший по величине инкремент нарастания для возмущений плоскопараллельного движения при $G = G^{(0)}$ имел порядок ε^2 . В дальнейшем будут рассматриваться вторичные движения с $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_c| = O(\varepsilon)$, для которых это условие выполняется. В этом случае для исследования устойчивости можно применить метод амплитудных уравнений [11-12].

Рассмотрим сначала плоскую задачу. Будем считать функции $U^{(n)}$ в разложении (1.6) зависящими не только от x и $z = z_0$, но также от переменных $z^n = \varepsilon^n z$, $t_n = \varepsilon^n t$. При этом произведем в (1.4) замену

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \sum_n \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_n \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}$$

Подстановка (4.1) в (1.4) приводит к разложению для оператора A

$$A \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = A \left(\frac{\partial}{\partial z_0} \right) + \sum_{mn} \varepsilon^{mn} \frac{1}{m!} A^{(m)} \left(\frac{\partial}{\partial z_0} \right) \frac{\partial^m}{\partial z_n^m}$$

$$A^{(m)}(\alpha) = \frac{d^m A(\alpha)}{d\alpha^m}$$

и аналогичным разложениям для остальных операторов.

Уравнение первого порядка по ε при этом сохраняет вид (1.8); его решение есть

$$U^{(1)} = a u_{+1}^{(1)}(x) \exp i k z_0 + \bar{a} u_{-1}^{(1)}(x) \exp (-i k z_0)$$

где $a = a(z_1, z_2, \dots; t_1, t_2, \dots)$. В дальнейшем положим $k = k_c$ (легко видеть, что при $k - k_c = O(\varepsilon)$ изменение k эквивалентно изменению величины a) и $G^{(0)} = G_c = G^{(0)}(k_c)$.

Из уравнений второго порядка находим

$$U^{(2)} = 2 \operatorname{Re} \left(-i \frac{\partial u}{\partial k} \frac{\partial a}{\partial z_1} \exp i k_c z_0 + u_2^{(2)} a^2 \exp 2 i k_c z_0 \right) + u_0^{(2)} |a|^2$$

$$G^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial t_1} = 0$$

где $u(k, G)$ — решение задачи (1.9); производная по k взята при $k=k_c$, $G=G_c$. Для вывода последних двух соотношений используются условия разрешимости уравнений для $u_1^{(2)}$, $\partial u / \partial k$ и $\partial u / \partial G$ в точке (k_c, G_c) , а также требование ограниченности a при $t_1 \rightarrow \pm \infty$.

В третьем порядке уравнение для $u_1^{(3)}$ имеет вид

$$(A_1 + G_c B_1) u_1^{(3)} + \frac{1}{2} (A_1^{(2)} + G_c B_1^{(2)}) u_1^{(1)} \frac{\partial^2 a}{\partial z_1^2} +$$

$$+ (A_1^{(1)} + G_c B_1^{(1)}) u_1^{(1)} \frac{\partial a}{\partial z_2} + G^{(2)} B_1 u_1^{(1)} a +$$

$$+ C_1 u_1^{(1)} \frac{\partial a}{\partial t_2} = [D_{0,1}(u_0^{(2)} u_1^{(1)}) + D_{2,-1}(u_2^{(2)} u_{-1}^{(1)})] |a|^2 a$$

Используя соотношения, получаемые из условия существования решения уравнения для $\partial^2 u / \partial k^2$ и $\partial u / \partial G$, и выбирая ε таким образом, чтобы для стационарного движения с волновым числом $k=k_c$ выполнялось равенство $a=1$, приведем условие разрешимости уравнения для $u_1^{(2)}$ к виду

$$(4.2) \quad \frac{\partial a}{\partial t_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2} \frac{\partial^2 a}{\partial z_1^2} - G^{(2)} \frac{\partial \lambda}{\partial G} a (1 - |a|^2)$$

производные от λ по k и G взяты в точке (k_c, G_c) ; $G^{(2)}$ определяется по формуле (1.10).

Аналогичное уравнение может быть выведено для трехмерной задачи. Функция a при этом предполагается зависящей также от переменных $y_1 = \varepsilon y$, $y_2 = \varepsilon^2 y$, ... Опуская детали вывода, вполне подобного приведенному выше, запишем окончательный результат

$$(4.3) \quad \frac{\partial a}{\partial t_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_z^2} \frac{\partial^2 a}{\partial z_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_y^2} \frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2} - G^{(2)} \frac{\partial \lambda}{\partial G} a (1 - |a|^2)$$

Отметим, что для трехмерных возмущений в течении Пуазейля не удастся построить замкнутого уравнения для функции a [13], так как в уравнение входит функция $p_0^{(1)}(y_1, z_1, \dots)$, характеризующая медленное изменение давления вдоль слоя. В рассматриваемой задаче из условия замкнутости потока можно вывести равенство $p_0^{(1)} = 0$.

Введем преобразование масштаба (учитываем, что $\partial \lambda / \partial G < 0$, а $G^{(2)}$, $\partial^2 \lambda / \partial k_y^2$, $\partial^2 \lambda / \partial k_z^2 > 0$)

$$T = -G^{(2)} \frac{\partial \lambda}{\partial G} t_2, \quad Z = \left(-2G^{(2)} \frac{\partial \lambda}{\partial G} / \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_z^2} \right)^{1/2} z_1$$

$$Y = \left(-2G^{(2)} \frac{\partial \lambda}{\partial G} / \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_y^2} \right)^{1/2} y_1$$

уравнение (4.3) принимает вид

$$(4.4) \quad \frac{\partial a}{\partial T} = \Delta a + a(1 - |a|^2), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}.$$

Стационарные решения этого уравнения вида

$$(4.5) \quad a = r \exp(iK_z Z + iK_y Y), \quad r = \sqrt{1 - |\mathbf{K}|^2}, \quad |\mathbf{K}| < 1$$

соответствуют периодическим вторичным движениям с компонентами волнового вектора

$$k_z = k_c + K_z \left(-2 \frac{\partial \lambda}{\partial G} / \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_z^2} \right)^{1/2} (G - G_c)^{1/2}$$

$$k_y = K_y \left(-2 \frac{\partial \lambda}{\partial G} / \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_y^2} \right)^{1/2} (G - G_c)^{1/2}$$

Исследуем устойчивость решений (4.5). Рассмотрим сначала плоские вторичные движения

$$a(Z) = \sqrt{1 - K^2} \exp iKZ$$

Для бесконечно малых возмущений $b(Y, Z, T)$, наложенных на решение $a(Z)$, получаем уравнение

$$(4.6) \quad \frac{\partial b}{\partial T} = \Delta b + b - 2|a|^2 b - a^2 \bar{b}$$

Решения этого уравнения следует искать в виде

$$(4.7) \quad b = b_1 \exp[i(K + L_z)Z + iL_y Y - \lambda T] + \\ + \bar{b}_2 \exp[i(K - L_z)Z - iL_y Y - \bar{\lambda} T]$$

Наличие периодической составляющей движения приводит к «взаимодействию» возмущений с волновыми векторами $\mathbf{K} \pm \mathbf{L}$ и расщеплению спектра декрементов. Подставляя (4.7) в (4.6), находим из условия разрешимости системы для b_1, b_2 уравнение

$$(4.8) \quad \lambda^2 + 2(-1 + K^2 + L^2)\lambda + 2L^2(1 - K^2) - 4K^2 L_z^2 + L^4 = 0$$

$$L^2 = L_z^2 + L_y^2$$

Отсюда видно, что, как и для плоскопараллельного движения, наиболее опасными для плоского вторичного движения являются плоские возмущения. Условие устойчивости движений имеет вид $K^2 < 1/3$, что согласуется с результатом [14], полученным для плоской задачи.

Аналогичный критерий устойчивости может быть выведен для трехмерных вторичных движений. Условие устойчивости имеет вид

$$(4.9) \quad |\mathbf{K}|^2 = K_y^2 + K_z^2 < 1/3$$

или

$$G - G_c > 3(G^{(0)}(k) - G_c)$$

Таким образом, в трехмерном случае при $G > G_c$ существует двухпараметрическое семейство устойчивых вторичных движений.

Автор выражает благодарность Г. З. Гершуни за предоставление темы и руководство, Е. М. Жуховицкому и Е. Л. Тарунину за ценное обсуждение.

Поступила 25 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 5.

3. Тарунин Е. Л. О вторичных стационарных конвективных течениях в вертикальном слое. В сб. Гидродинамика, вып. 4. Пермь, 1972. Уч. зап. Пермск. ун-та, № 293.
 4. Gotoh K., Ikeda N. Secondary convection in a fluid between parallel vertical plates of different temperatures. J. Phys. Soc. Japan., 1972, vol. 33, No. 6.
 5. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
 6. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
 7. Reynolds W. C., Potter M. C. Finite-amplitude instability of parallel shear flows. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 3.
 8. Pekeris C. L., Shkoller B. Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude. J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt 3.
 9. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, отвечающих от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
 10. Бирюх Р. В., Рудаков Р. Н. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. В сб. Гидродинамика, вып. 5. Пермь, 1974. Уч. зап. Пермск. ун-та, № 316.
 11. Newell A. C., Whitehead J. A. Finite bandwidth, finite amplitude convection. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 2.
 12. Stewartson K., Stuart J. T. A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, pt 3.
 13. Davey A., Hocking L. M., Stewartson K. On the nonlinear evolution of three-dimensional disturbances in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1974, vol. 63, pt 3.
 14. Eckhaus W. Studies in non-linear stability theory. Berlin, Springer, 1965.
-