

Во-вторых, для скользящих углов атаки направление квазизеркального максимума индикатрисы отражения не может приближаться к поверхности при уменьшении  $\beta$  из-за взаимной экранировки поверхностных атомов [8]. Например, по экспериментальным данным [4] при изменении  $\beta$  от 30 до 20° направление квазизеркального максимума остается одним и тем же и образует с поверхностью угол 30°. Примем в качестве приближения, что это направление квазизеркального максимума сохраняется для других  $\beta$  в интервале от 0 до 30°.

Тогда с учетом этих двух эффектов в области скользящих углов атаки получаем приближенную зависимость

$$(6) \quad c_x(\beta) \approx 2[1 - 0.9r(\beta) \cos(30^\circ + \beta)] \quad (0 \leq \beta \leq 30^\circ)$$

Подставив (3) в (6), получаем зависимость  $c_x(\beta)$ , изображенную пунктиром на фиг. 2 для  $0 \leq \beta \leq 30^\circ$ . Из сопоставления пунктирных кривых с соответствующими участками штрихпунктирной кривой следует, что рассчитанные по (2) значения  $c_x$  являются завышенными для углов падения вблизи нормали к поверхности и заниженными для скользящих углов.

В качестве примера, показывающего важность учета влияния рассеянных частиц на аэродинамические характеристики, вычислим коэффициент сопротивления сферы.

$$(7) \quad c_x = \int_0^{\pi/2} c_x(\theta) \sin 2\theta \, d\theta$$

Здесь  $c_x(\theta)$  — зависимость коэффициента сопротивления элемента поверхности сферы от угла падения  $\theta = \pi/2 - \beta$ . Подставляя в (7) данные фиг. 2, получаем, что в приближении диффузной схемы коэффициент  $c_x$  для сферы изменяется от 2.37 (при  $\alpha_e = 0.8$ ) до 2.0 (при  $\alpha_e = 1.0$ ), тогда как по квазизеркальной схеме  $c_x \approx 1.8$ .

Поступила 5 VII 1974.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cook G. E. Satellite drag coefficients. Planet Space Sci., 1965, vol. 13, № 10.
2. Мое К. Recent experimental evidence bearing on satellite drag coefficients. AIAA Journal, 1968, vol. 6, № 7. (Русск. перевод: Последние экспериментальные данные по коэффициентам сопротивления искусственных спутников. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 7).
3. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа. М., «Наука», 1965.
4. Варакин Г. К., Фарафонов В. Г. О применении диффузной схемы отражения при обтекании поверхности свободномолекулярным потоком со скоростью 10 км/сек. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
5. Doughty R. O., Schaltzle W. J. Experimental determination of momentum accommodation coefficients at velocities up to and exceeding earth escape velocity. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 2. N. Y.—L., Acad. Press, 1969.
6. Knechtel E. D., Pitt W. C. Experimental momentum accommodation on metal surfaces of ions near and above earth-satellite speeds. In: Rarefied gas dynamics, vol. 2. N. Y.—L., Acad. Press, 1969.
7. Груич Д. Д., Ермаков Г. Е., Арифов У. А. Исследование вторичной ионной эмиссии с W и Mo в зависимости от угла падения медленных щелочных ионов. В кн. Взаимодействие газа с поверхностью твердого тела. Новосибирск, Ин-т теорет. и прикл. механ. СО АН СССР, 1971.
8. Арифов У. Взаимодействие атомных частиц с поверхностью твердого тела. М., «Наука», 1968.

УДК 536.252:

#### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВИБРАЦИОННЫХ СИЛ

Г. С. МАРКМАН

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается влияние модуляции поля силы тяжести на устойчивость равновесия горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу. Жидкость ограничена сверху и снизу полубесконечными твердыми массивами. Теплопроводность верхнего-

массива бесконечна, нижнего — равна нулю. Численно исследованы зависимости критического числа Рэлея от частоты и амплитуды модуляции силы тяжести.

Случай двух идеально теплопроводных массивов разобран в работах [1-4]. Результаты исследования соответствующей стационарной задачи изложены в [5].

Пусть горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости толщиной  $h$ , граничащий сверху и снизу с полубесконечными твердыми массивами, находится в периодически меняющемся поле силы тяжести. Ускорение силы тяжести периодически изменяется во времени по закону

$$(1) \quad f = g(1 + \eta \sin \Omega t), \quad g, \eta = \text{const}$$

Температура верхней границы слоя фиксирована, на нижней границе задан тепловой поток. Поведение малых возмущений относительного равновесия описывается уравнениями [5] и граничными условиями, которые имеют вид

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\sqrt{p}} v = -\nabla P + \Delta v + R \cdot \gamma (1 + \eta \sin \omega t) \theta$$

$$\sqrt{p} \frac{-\partial \theta}{\partial t} + \sqrt{p} \sigma \theta = (v) + \Delta \theta, \quad \text{div } v = 0$$

$$(3) \quad v = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0, \quad z = 1$$

Здесь  $p = \Phi/\chi$  и  $R = g\beta ah^4/\nu\chi$  — числа Прандтля и Рэлея,  $\omega = h^2/\sqrt{\nu\chi}$  — безразмерная частота,  $\sigma$  — комплексный декремент затухания,  $\gamma$  — единичный вектор оси  $z$ , направленный вертикально вверх.

При переходе числа Рэлея через критическое значение  $R_*$  равновесное состояние теряет устойчивость, при этом один из декрементов имеет вещественную часть  $\sigma_r$ , равную нулю, а остальные декременты имеют отрицательные вещественные части.

Возможны три основные формы потери устойчивости:

1) при значении числа Рэлея, равном критическому, мнимая часть  $\sigma_i$  декремента затухания равна нулю (или  $2\pi k/T$ ,  $k=1, 2, \dots$ ). Нейтральное возмущение при этом периодически по времени с тем же периодом  $T=2\pi/\omega$ , что и поле силы тяжести. Это утверждение служит аналогом принципа смены устойчивости для стационарных задач;

2) при  $R=R_*$  мнимая часть  $\sigma_i$  равна  $\pi(2k-1)/T$  ( $k=2, 3, \dots$ ). Нейтральное возмущение имеет период  $2T$ . Эта форма потери устойчивости не имеет аналога в стационарном случае;

3) при  $R=R_*$  мнимая часть  $\sigma_i$  отлична от нуля и  $\pi k/T$ . В этом случае должен возникать условно-периодический режим (в стационарной задаче — автоколебание).

Ниже рассматриваются первые две формы потери устойчивости. Обнаружить потерю устойчивости третьего типа не удалось (см. также [6-8]). По-видимому, для горизонтального слоя характерны только первые два типа конвективной неустойчивости.

В системе (2) полагаем  $\sigma=0$  и разыскиваем значения  $R$ , которым соответствуют периодические решения с периодом  $T$  или  $2T$ .

Исключая из уравнений (2) давление  $P$  и горизонтальные компоненты скорости  $v_x, v_y$ , а также отделяя переменные  $x, y$  заменой

$$(4) \quad (v_z, \theta) = (u(z, t), \theta(z, t)) \exp i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)$$

для функций  $u(z, t)$  и  $\theta(z, t)$  получим уравнения и краевые условия

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{p}} L \frac{\partial u}{\partial t} = L^2 u - R\alpha^2 (1 + \eta \sin \omega t) \theta$$

$$\sqrt{p} \frac{-\partial \theta}{\partial t} = u + L\theta, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

$$(6) \quad u = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (z=0)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad (z=1)$$

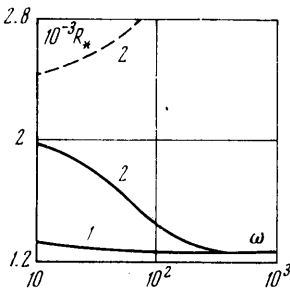
Для приближенного определения критических значений числа Рэлея, которым соответствуют периодические решения задачи (5), (6) с периодами  $T$  и  $2T$ , использован метод Л. В. Канторовича. Решение  $(u, \theta)$  разыскивалось в виде

$$(7) \quad u = \sum_{k=1}^N a_k(t) \psi_k(z), \quad \theta = \sum_{k=1}^N a_{N+k}(t) \varphi_k(z)$$

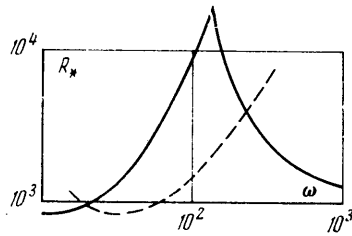
В качестве базисных функций  $\psi_k(z)$  были выбраны полиномы  $z^{k+2}(1-z)^2$ , функции  $\varphi_k(z)$  определялись из задачи

$$(8) \quad L\varphi_k(z) = -\psi_k(z), \quad \frac{\partial \varphi(0)}{\partial z} = 0, \quad \varphi(1) = 0$$

Подставляя разложения (7) в уравнения (5), умножая эти уравнения на  $\psi_k(z)$ ,  $\varphi_k(z)$  соответственно и интегрируя по  $z$  от 0 до 1, после обращения матриц в левую



Фиг. 1



Фиг. 2

части получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами для амплитуд и трансцендентное уравнение для определения  $R$

$$(9) \quad \frac{da_k}{dt} = \sum_{n=1}^{2N} b_{kn}(t, R) a_n \quad (k=1, 2, \dots, 2N)$$

$$(10) \quad \det [U(T) \mp I] = 0$$

Здесь  $U(t)$  – фундаментальная матрица решений системы (9),  $I$  – единичная матрица порядка  $2N$ . Знак минус соответствует решениям с периодом  $T$ , знак плюс – решениям удвоенного периода.

Для расчетов использовалась система из 12 базисных функций ( $N=6$ ). Проверочный счет с 20 базисными функциями дал результаты, отличающиеся менее чем на 0.1%. Критическое значение числа Рэлея, вычисленное при  $\eta=0$ , что соответствует отсутствию модуляции, равно 1296 и совпадает с найденным в работе [2]. С ростом частоты ( $\omega \rightarrow \infty$ ) к этому же значению стремится  $R_*(\omega)$  при любой фиксированной амплитуде  $\eta$ .

Расчеты показали, что результаты существенно различаются в зависимости от того, меньше или больше единицы амплитуда  $\eta$  (т. е. сохраняет ли ускорение поля силы тяжести знак во все моменты времени). Так, при  $\eta \leq 1$  критическому значению числа Рэлея соответствуют лишь возмущения с периодом  $T$ , решений другой периодичности система (9) не имеет. Зависимость  $R_*$  от  $\alpha$  (нейтральная кривая) имеет тот же вид, что и в стационарном случае. При  $\eta > 1$  существуют решения с периодами  $T$  и  $2T$ . Нейтральная кривая при этом имеет качественно иную форму: состоит из нескольких «язычков», на каждом из которых достигается свой локальный минимум.

На фиг. 1, 2 представлены результаты расчетов зависимостей минимизированного по  $\alpha$  числа Рэлея от частоты модуляции  $\omega$  для нескольких значений амплитуды. Число Прандтля при этом фиксировано и равно единице. Кривые 1 и 2 на фиг. 1 соответствуют  $\eta=0.5$  и 2. Сплошная линия отвечает решениям с периодом  $T$  (первый тип потери устойчивости), пунктирная – решениям с удвоенным периодом (второй тип потери устойчивости). Результаты, представленные на фиг. 2, получены при

$\eta=10$ . Видно, что при больших амплитудах происходит смена типов потери устойчивости: появляется область частот, в которой возмущениям двойного периода отвечают меньшие числа Рэлея, чем возмущениям с периодом  $T$ .

Поступила 3 VIII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. Gresho P. M., Sani R. L. The effects of gravity modulation on the stability of a heated fluid layer. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, No. 4.
3. Маркман Г. С. О возникновении конвекции, периодической по времени. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
4. Маркман Г. С. О конвективной неустойчивости слоя жидкости в модулированном поле внешних сил. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
6. Юдович В. И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2.
7. Chia Shun Yih, Chin Hsiu Li. Instability of unsteady flows or configurations, pt. 2. Convective instability. J. Fluid Mech., 1972, vol. 54, pt 1.
8. Маркман Г. С. Возникновение конвекции в слое вязкой несжимаемой жидкости при периодическом по времени изменении градиента температуры. Изв. Сев.-Кавк. научн. центра высш. школы, Сер. естеств. н., 1972, вып. 4.
9. Sparrow E. M., Goldstein R. J., Jonsson V. K. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 4.