Здесь $\langle \Delta p_{1\rho j}\rangle = [K_0 h_2 (p_K - \langle p_{1\rho j}\rangle)](\mu q)^{-1}$, ρ, $j=1, 2$; $K_0 = 1\partial$; p_K – постоянное контурное давление, $\langle p_{i\rho j}\rangle$ – среднее давление.

Результаты вычислений, проведенных по этим формулам, приведены в таблице, из которой видно, что улучшение проницаемости верхнего пласта в 2.5 и 5 раз приводит к снижению безразмерного перепада давления соответственно на 20 и 40%. Степень несовершенства скважин в пределах рассмотренного примера относительно

δ_1	$\langle \Delta p_{11}\rangle = \langle \Delta p_{121}\rangle$			$\langle \Delta p_{112}\rangle = \langle \Delta p_{122}\rangle$		
	в, м					
	1	5	10	1	5	10
0.2	14.81	13.38	12.36	8.65	8.07	7.67
0.5	11.85	10.70	9.90	6.92	6.46	6.13
1	8.89	8.03	7.42	5.19	4.84	4.60

мало сказывается на их забойном давлении. Например, при увеличении степени вскрытитя скважин в 5 раз (1 и 5 *м*) безразмерный перепад давления для скважин первой зоны независимо от δ_1 уменьшается на 10%, а для второй зоны – на 6.6%. Если степень вскрытия увеличить в 10 раз (1 и 10 *м*), то уменьшение перепада давлений равно соответственно 16.6 и 11.4%.

Поступила 15 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисов Ю. П., Воинов В. В., Рябинина З. К.* Влияние неоднородности пластов на разработку нефтяных месторождений. М., «Недра», 1970.
2. *Крылов А. П., Белаш П. М., Борисов Ю. П., Бучин А. Н., Воинов В. В., Глоговский М. М., Максимов М. И., Николаевский Н. М.* Проектирование разработки нефтяных месторождений. М., Гостоптехиздат, 1962.
3. *Мухарский Э. Д., Лысенко В. Д.* Проектирование разработки нефтяных месторождений платформенного типа. М., «Недра», 1972.
4. *Гринберг Г. А.* О решении уравнений математической физики с частично или полностью разделяющимися переменными. Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе, М., Изд-во АН СССР, 1950.

УДК 532.546

ОБ АНИЗОТРОПИИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЫ

М. Л. КАЧАНОВ

(Ленинград)

Трещиноватые среды, в частности горные породы, обычно анизотропны в отношении фильтрационных свойств. Ж. Феррандон [1] установил тензорный характер проницаемости пористой среды и сформулировал обобщенный закон Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} K \cdot \nabla p$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость фильтрации, μ – коэффициент динамической вязкости, ∇p – градиент давления; точка обозначает свертывание по одному индексу. Двухвалентный симметричный тензор K получил название тензора проницаемости. Подразумевается, что величины, входящие в обобщенный закон Дарси, являются средними по некоторому «элементарному объему».

В работах [2, 3] введен тензор плотности трещин T_α, описывающий осредненную по некоторому объему геометрию трещиноватости. В настоящей заметке показывается, что тензор T_α может быть эффективно использован в задачах анизотропной фильтрации. Тензор K, характеризующий анизотропию фильтрационных свойств, выражается через T_α. Устанавливается структура этой связи и вид тензора K.

1. Как показано в [2, 3], геометрия трещиноватости в теле, содержащем N трещин, полностью описывается δ-образным полем двухвалентного симметричного тензора

$$T_\alpha' = \sum_{i=1}^{N} b_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \delta(S_i)$$

где b_i и $\mathbf{n}_i$ – раскрытие трещины и орт нормали к срединной ее поверхности (величины, вообще говоря, изменяющиеся вдоль каждой из трещин), $\delta(S_i)$ – функция, сосредоточенная на поверхности S_i, i – номер трещины.

Средняя по объему величина

$$\langle T_\alpha' \rangle_v = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{S_i(v)} b\mathbf{nn}\, dS \equiv T_\alpha$$

была названа тензором плотности трещин.

Тензор T_α является чисто геометрическим параметром, который при описании процессов фильтрации следует несколько модифицировать с учетом гидродинамических законов. Дело в том, что скорость фильтрации $\mathbf{v}$ обычно определяется как сумма скоростей фильтрации $\mathbf{v}_i$, обусловленных отдельными трещинами

$$\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i = \sum_i b_i \mathbf{u}_i \tag{1.1}$$

Здесь истинная скорость жидкости $\mathbf{u}_i$, в соответствии с формулой Буссинеска, пропорциональна b_i^2. Видно, что вклад, вносимый i-й трещиной в фильтрационный поток, пропорционален кубу ее раскрытия b_i. С учетом этого модифицируем тензор плотности трещин T_α, определив его как среднее по объему от тензорного поля

$$T_\alpha'' = \sum_i b_i^3 \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \delta(S_i)$$

(которое, как и поле T_α, полностью характеризует геометрию трещиноватости). Получим

$$T_\alpha \equiv \langle T_\alpha'' \rangle_v = \frac{1}{v} \sum_i \int\limits_{S_i(v)} b^3 \mathbf{nn}\, dS \tag{1.2}$$

Это двухвалентный симметричный тензор, дающий осредненное по некоторому объему описание трещиноватости, причем вклад, вносимый i-й трещиной в среднее, пропорционален b_i^3. В важном случае слоистой трещиноватости (одна система параллельных плоских трещин) диада $\mathbf{nn}$ выносится из-под знаков интегрирования и суммирования

$$T_\alpha = \alpha \mathbf{ee} \tag{1.3}$$

($\mathbf{e}$ – орт-нормали к трещинам). В случае «хаотической» («бессистемной») трещиноватости тензор T_α – шаровой.

2. Будем считать, что единственной причиной проницаемости среды является трещиноватость, т. е. межзеренная (поровая) проницаемость равна нулю. (Последняя носит изотропный характер и учитывается простым суммированием с анизотропной трещинной проницаемостью [4].) Тогда, очевидно, тензор K должен быть функцией тензора T_α

$$K = K(T_\alpha) \tag{2.1}$$

Конкретизируем эту функцию.

Легко видеть, что (2.1) есть изотропная тензорная функция. Действительно по определению [5] это означает, что

$$K(A \cdot T_\alpha \cdot A^*) = A \cdot K(T_\alpha) \cdot A^* \tag{2.2}$$

где A – тензор, задающий произвольное линейное ортогональное преобразование, A^* – тензор, сопряженный к A. Механический смысл равенства (2.2) состоит в том, что при «поворотах» и «зеркальных отражениях» системы трещин соответствующее преобразование испытывает и фильтрационный поток (изотропия пространств в отношении гидродинамических свойств). Поэтому, используя теорему Гамильтона — Кэли, функцию (2.1) можно представить в виде

$$K=a_1I+a_2T_\alpha+a_3T_\alpha\cdot T_\alpha \tag{2.3}$$

где скалярные коэффициенты a_i — функции инвариантов тензора T_α, I — единичный тензор. Видно, что тензоры K и T_α соосны.

Далее, поскольку скорость фильтрации $\mathbf{v}$ определяется по формуле (1.1), т. е. суммированием скоростей фильтрации, соответствующих каждой из трещин, то при разбиении (произвольным образом) трещиноватости, имеющейся в элементарном объеме, на несколько групп трещин будем иметь

$$T_\alpha=T_\alpha^{(1)}+T_\alpha^{(2)}+\ldots,\quad K=K(T_\alpha)=K(T_\alpha^{(1)})+K(T_\alpha^{(2)})+\ldots$$

Отсюда следует, что функция $K(T_\alpha)$ — линейная и однородная, т. е. формула (2.3) приводится к виду

$$K=c_i(\operatorname{sp}T_\alpha)I+c_2T_\alpha \tag{2.4}$$

Здесь c_i — константы, не зависящие от трещиноватости и имеющие гидродинамическую природу (на их расшифровке не будем останавливаться).

По условию поровой фильтрации нет, поэтому направление фильтрации в трещине не имеет составляющей, нормальной к ее берегам. В случае слоистой трещиноватости (1.3) это приводит к равенству

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}=\mathbf{e}\cdot K\cdot\nabla p=0$$

которое должно выполняться при любых градиентах давления ∇p. Подставляя сюда (1.3) и (2.4), получаем $c_1=-c_2$.

Таким образом, тензор проницаемости имеет следующую структуру:

$$K=c[(\operatorname{sp}T_\alpha)I-T_\alpha] \tag{2.5}$$

$$K=c[(\alpha_2+\alpha_3)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+(\alpha_1+\alpha_3)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3] \quad \text{(в главных осях)} \tag{2.6}$$

где α_1, α_2, α_3 — главные значения тензора T_α.

Соотношения (2.5), (2.6) выражают тензор проницаемости через тензор плотности трещин. Они верны для трещиноватости произвольного вида и позволяют вычислить анизотропию фильтрационных свойств, если известны параметры трещиноватости.

Для среды со слоистой трещиноватостью (ось x_1 нормальна трещинам) $\alpha_2=\alpha_3=0$ и $K=-c\alpha_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$, откуда видно, что проницаемость среды во всех направлениях, параллельных трещинам, одинакова.

В случае «хаотической» трещиноватости $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$, тензор K — шаровой и фильтрация носит изотропный характер.

Отметим, что в случае плоских, сгруппированных в системы параллельных друг другу трещин формулы, выражающие тензор проницаемости через параметры трещиноватости, были даны в работе [4]. Эти формулы могут быть получены из (2.5) как частный случай, если учесть, что для плоских трещин орт нормали $\mathbf{n}$ к трещине постоянен вдоль каждой из трещин, и диады $\mathbf{nn}$ могут быть вынесены из-под знаков интегралов в (1.2).

Поступила 15 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ferrandon J.* Les lois de l'écoulement de filtration. Génie Civil, 1948, т. 125, № 24.
2. *Вакуленко А. А., Качанов М. Л.* Континуальная теория среды с трещинами. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 4.
3. *Качанов М. Л.* Деформируемость среды с трещинами. Изв. Всес. НИИ гидротехники, 1972, т. 99.
4. *Ромм Е. С., Позиненко Б. В.* О проницаемости анизотропных трещиноватых горных пород. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 2.
5. *Вакуленко А. А.* Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1972.