

УДК 532.525

**РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ
В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СОПЛЕ ЛАВАЛЯ С УЧЕТОМ КОАГУЛЯЦИИ
И ДРОБЛЕНИЯ ЧАСТИЦ**

Ю. Ф. КИСАРОВ, А. М. ЛИПАНОВ

(Москва)

Исследования закономерностей изменения параметров гетерогенного потока в сопле Лавала проводились в одномерном приближении [1, 2] или для потока, содержащего частицы одного размера [3-5].

В данной работе рассмотрен метод расчета параметров двухфазного потока в дозвуковой и сверхзвуковой частях осесимметричного сопла Лавала с учетом коагуляции и дробления частиц. Приводятся некоторые результаты расчетов.

В работе [1] приведена система уравнений, описывающих одномерное движение двухфазной смеси в сопле Лавала с учетом взаимодействия частиц различных размеров.

Для осесимметричного потока аналогичная система уравнений для газовой и конденсированной фаз в координатах $x, \xi = y/R(x)$ (x, y — цилиндрические координаты, $R(x)$ — уравнение контура сопла) имеет следующий вид:

$$(1) \quad \frac{\partial a}{\partial x} + C \frac{\partial a}{\partial \xi} + \Gamma + \Phi = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial b}{\partial x} + D \frac{\partial d}{\partial \xi} + L + M = 0$$

Здесь $a = \{v_r, v_x, p, \rho\}$

$$C = R^{-1} \begin{pmatrix} \frac{v_r}{v_x} - \xi \frac{dR}{dx} & 0 & \frac{1}{\rho v_x} & 0 \\ \frac{c^2}{c^2 - v_x^2} & -\frac{v_r v_x}{c^2 - v_x^2} - \xi \frac{dR}{dx} & \frac{v_r}{\rho (c^2 - v_x^2)} & 0 \\ -\frac{\rho v_x c^2}{c^2 - v_x^2} & \frac{\rho c^2 v_r}{c^2 - v_x^2} & -\frac{v_r v_x}{c^2 - v_x^2} - \xi \frac{dR}{dx} & 0 \\ -\frac{\rho v_x}{c^2 - v_x^2} & \frac{\rho v_r}{c^2 - v_x^2} & -\frac{v}{v_x (c^2 - v_x^2)} & \frac{v_r}{v_x} - \xi \frac{dR}{dx} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \frac{v_r}{\xi R (c^2 - v_x^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ c^2 \\ -\rho v_x c^2 \\ -\rho v_x \end{pmatrix}, \quad \Phi = \frac{1}{c^2 - v_x^2} \begin{pmatrix} \frac{b}{v_x} (c^2 - v_x^2) \\ f \\ \rho - a v_x \\ \rho c^2 a - f v_x \\ \rho a - f / v_x \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} u_r \\ u_x \\ e \\ \xi \rho_c u_x R^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \beta / u_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta / u_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta / u_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} u_r \\ u_x \\ e \\ \xi \rho_c \beta R^2 \end{pmatrix}$$

$$\beta = R^{-1} \left(u_r - u_x \xi \frac{dR}{dx} \right)$$

$$L = -\frac{1}{m u_x} \begin{pmatrix} F_r \\ F_x \\ F u - \pi d^2 \alpha (T - T_g) \end{pmatrix}$$

$$M = -\begin{pmatrix} \frac{B_r - u_r A}{n u_x} \\ \frac{B_x - u_x A}{n u_x} \\ \frac{C - e A}{n u_x} \\ \xi R^2 m A \end{pmatrix}$$

m — масса частицы, $v_r, v_x, u_r(m), u_x(m)$ — осевая и радиальная компоненты вектора скорости для газа и частиц соответственно, p, ρ, T_g — давление, плотность и температура, $n(m)dm$ — число частиц конденсированной фазы, содержащихся в единице объема с массой в интервале $m \div m+dm$; $\rho_c(m)dm = mn(m)dm$ — плотность частиц с массой в интервале $m \div m+dm$, $e(m) = [u_x^2(m) + u_r^2(m)]/2 + c_c T$ — энергия частиц массы m , c_c — теплоемкость частиц, $F(m) = \rho c_x (v-u(m))/v-u(m) \pi d^2(m)/8$ — вектор силы, действующей со стороны газа на частицу массы m , $d(m)$ — диаметр частицы массы m , $d(m), c_x(m)$ — коэффициенты теплоотдачи и сопротивления частиц массы m , c — скорость звука в чистом газе,

$$a = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} F_x(m) n(m) dm, \quad b = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} F_r(m) n(m) dm$$

$$f = (\kappa - 1) \rho \left[\frac{A_x + A_r - g}{\rho} - a v_x - b v_r \right]$$

κ — показатель адиабаты,

$$A_x = \int_0^{\infty} F_x u_x n(m) dm, \quad A_r = \int_0^{\infty} F_r u_r n(m) dm, \quad g = \pi \int_0^{\infty} \alpha d^2 (T - T_g) n(m) dm$$

$$A(m) = -n(m) \int_0^{\infty} K(m, m_1) n(m_1) dm_1 + \int_0^{m/2} K(m_1, m - m_1) n(m_1) n(m - m_1) dm_1 +$$

$$+ \delta(We) \int_0^m K(2m - m_1, m_1) n(m_1) n(2m - m_1) dm_1$$

$$K(m, m_1) = \pi [d(m) + d(m_1)]^2 |u(m) - u(m_1)|/4$$

В выражении для $A(m)$ первый член описывает исчезновение частиц массы m за счет столкновения с частицами других размеров, второй член — увеличение числа частиц массы m за счет столкновения частиц с массами m_1 и $m - m_1$, третий член — увеличение частиц массы m из-за возможного дробления частиц массы $2m$. Члены $B_x(m), B_r(m), C(m)$, описывающие влияние взаимодействия частиц на изменение импульса и энергии частиц массы m , имеют вид, аналогичный $A(m)$.

В систему уравнений (1), (2) не входят члены, описывающие процесс дробления частиц потоком газа, так как этот процесс происходит скачкообразно и, следовательно, не может быть описан дифференциальными уравнениями.

Учет дробления частиц осуществляется в процессе численного решения задачи. Предполагается, что после достижения частицами массы m критического числа We они дробятся на две равные части.

Граничные условия для параметров газовой фазы на входе в сопло берутся такими же, как и в работе [6]. Распределение частиц на входе в сопло считается равномерным, а скорости и температура частиц всех размеров равны соответствующим параметрам газовой фазы.

На оси сопла имеет место условие симметрии, т. е. $v_r = u_r = 0$.

На контуре сопла нормальная составляющая скорости движения газа равна нулю. Аналогичное условие для частиц на контуре сопла не выполняется, т. е. допускается осаждение частиц на поверхности сопла.

Для решения системы уравнений (1) в области $x > x_0, 0 \leq \xi \leq 1$ (x_0 — некоторое сечение в сверхзвуковой части сопла) введем сетку с узлами $(x_i, \xi_j) i=0, 1, 2, \dots, j=0, 1, \dots, M$ и заменим производные по x и ξ разностными отношениями

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)_j^{i+1} = a_j^{i+1} - a_j^i, \quad \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)_j^{i+1/2} = s [\gamma_1 a_{j-1} + \gamma_2 a_j + \gamma_3 a_{j+1}]^i +$$

$$+ (1-s) [\gamma_1 a_{j-1} + \gamma_2 a_j + \gamma_3 a_{j+1}]^{i+1}$$

$$\gamma_1 = \frac{\xi_j - \xi_{i+1}}{(\xi_{j-1} - \xi_j)(\xi_{j-1} - \xi_{j+1})}, \quad \gamma_2 = \frac{2\xi_j - \xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{(\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1})}$$

$$\gamma_3 = \frac{\xi_j - \xi_{j+1}}{(\xi_{j+1} - \xi_{j-1})(\xi_{j+1} - \xi_j)}$$

Здесь $0 \leq s \leq 1$. Система уравнений (1) перейдет в систему разностных уравнений

$$(3) \quad [(1-s)\Delta x C_j \gamma_{j-1} a_{j-1} + (E + (1-s)\Delta x C_j \gamma_j) a_j + (1-s)\Delta x C_j \gamma_{j+1} a_{j+1}]^{i+1} = \Phi_j^{i+1},$$

$$j=1, \dots, M-1$$

$$\Phi_j^{i+1} = a_j^i - s \Delta x C_j (\gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_j a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1})^i -$$

$$- s \Delta x (\Gamma_j + \Phi_j)^i - (1-s) \Delta x (\Gamma_j + \Phi_j)^{i+1}$$

Здесь E — единичная матрица.

Для определения компонент вектора a на оси сопла $j=0$ разностные уравнения запишем в виде уравнений

$$(4) \quad a_0^{i+1} = a_0^i - s \Delta x [2\Gamma + \Phi]_0^i - (1-s) \Delta x [2\Gamma + \Phi]_0^{i+1}$$

которые получаются из системы (1) с учетом условий симметрии при $j=0$ и замены

$$\text{производной} \quad \left(\frac{\partial v_r}{\partial \xi} \right)_0 = \left(\frac{v_r}{\xi} \right)_0 \quad \text{отношением} \quad (\partial v_r / \partial \xi)_0 = v_{r1} / \xi_1.$$

Используя условие $v_r = v_x dR/dx$ при $\xi=1$, можно записать

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\rho v_x} (A_x + A_r - g), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi}{v_x \kappa p} f$$

$$H = \frac{v_x^2 + v_r^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho}, \quad \phi = \frac{p^{1/\kappa}}{\rho}$$

Таким образом, для расчета параметров на контуре сопла ($j=M$) имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения и одну конечную связь. Недостающая четвертая связь получается из уравнения неразрывности, в котором производные по ξ определяются из следующих соотношений:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)_M = \gamma_1 a_{M-2} + \gamma_2 a_{M-1} + \gamma_3 a_M$$

$$\gamma_1 = \frac{1 - \xi_{M-1}}{(\xi_{M-2} - \xi_{M-1})(\xi_{M-2} - 1)}, \quad \gamma_2 = \frac{1 - \xi_{M-2}}{(\xi_{M-1} - \xi_{M-2})(\xi_{M-1} - 1)},$$

$$\gamma_3 = \frac{(1 - \xi_{M-2}) + (1 - \xi_{M-1})}{(1 - \xi_{M-2})(1 - \xi_{M-1})}$$

Для решения системы разностных уравнений (3), (4) и уравнений (5), записанных в разностном виде, применялась матричная прогонка с итерациями нелинейных членов.

Была принята следующая последовательность операций. Из уравнений (4) определялись параметры при $j=0$, т. е. a_0^{i+1} , затем прогоночные коэффициенты

$$P_1 = -[\gamma_{21} \Delta x C_1 + E]^{-1} \gamma_{31} \Delta x C_1, \quad g_1 = [\gamma_{21} \Delta x C_1 + E]^{-1} (\Phi_1 - \gamma_{11} \Delta x C_1 a_0)$$

$$P_j = -[\gamma_{1j} \Delta x C_j P_{j-1} + \gamma_{2j} \Delta x C_j + E]^{-1} \gamma_{3j} \Delta x C_j$$

$$g_j = [\gamma_{1j} \Delta x C_j P_{j-1} + \gamma_{2j} \Delta x C_j + E]^{-1} [\Phi_j - \gamma_{1j} \Delta x C_j g_{j-1}], \quad j=2, \dots, M-1$$

Зная P и g в точках $(M-1)$ и $(M-2)$ и используя уравнения (5), а также уравнение неразрывности, можно определить компоненты вектора a при $j=M$, а затем

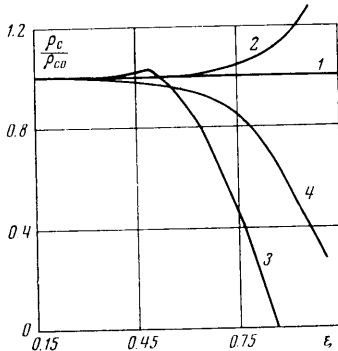
по соотношениям $a_j^{i+1} = P_j^{i+1} a_{j+1}^{i+1} + g_j^{i+1}$ определить компоненты вектора a и в других точках слоя $(i+1)$.

Для определения параметров конденсированной фазы применялась разностная схема, аналогичная предложенной авторами [3].

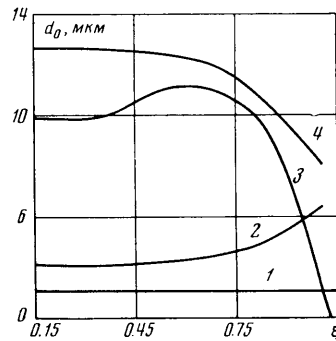
Выполненные расчеты показали, что предложенная схема обеспечивает выполнение законов сохранения с точностью не менее 0.25%.

Приведенные выше соотношения позволяют найти решение в области $x > x_0$, если известны параметры в сечении $x = x_0$. Для их определения необходимо решать систему уравнений (1), (2) в дозвуковой и трансзвуковой частях сопла. Для этого был применен метод последовательных приближений.

На первом этапе методом установления по времени [6] решается система уравнений газовой динамики без учета влияния частиц на параметры газовой фазы. При известных параметрах газовой фазы решается система уравнений (2) и одновременно определяются и заминаются компоненты вектора Φ . На последующих этапах система уравнений газовой динамики решается уже с учетом влияния частиц на параметры газовой фазы. Как показали результаты расчетов, для сходимости описанного выше процесса достаточно трех приближений.



Фиг. 1



Фиг. 2

В качестве примера было рассчитано течение в сопле, контур дозвуковой части которого состоял из цилиндрического участка $R(x)=2$ (все размеры отнесены к радиусу критического сечения сопла), который окружностью радиуса 0.5 сопрягался с коническим участком с углом раствора $\alpha=45^\circ$. Трансзвуковая часть состояла из двух дуг окружности радиуса 0.5 со стороны дозвуковой части и радиуса 0.1 со стороны сверхзвуковой части сопла. Контур сверхзвуковой части описывался полиномом третьей степени и имел на входе угол $\theta_1=28^\circ$ и на выходе угол $\theta_2=15^\circ$, длину $x=10.5$ и степень расширения $r_a=5.2$.

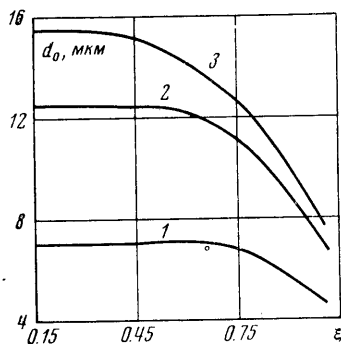
Расчеты были выполнены для сопла с диаметром критического сечения $d_* = 200$ мм.

На фиг. 1 и 2 представлены распределения концентрации и среднемассового размера частиц d_0 в различных сечениях сопла, кривым 1-4 соответствуют значения $x=-2, -1.5, 0.5, 10.5$. Весовая доля частиц в смеси для данного случая составила $z=0.3$, а давление на входе в сопло $p=35$ кг/см². Для удобства графического изображения на фиг. 1 приводится отношение концентрации частиц в потоке к концентрации их на оси сопла.

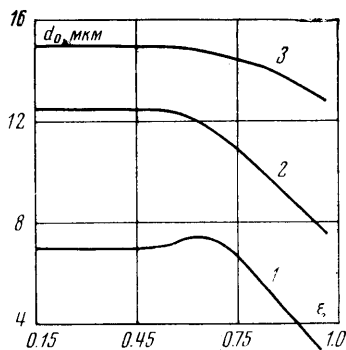
На входе в сопло ($x=-2$) задается равномерное по сечению распределение частиц.

Вследствие разности радиальных составляющих скоростей газа и частиц увеличивается их концентрация и интенсивность роста на периферии дозвуковой части сопла ($x=-1.5$). По той же причине на периферии трансзвуковой части сопла ($x=0.5$) образуется зона, содержащая только частицы малых размеров в небольшой концентрации. Ширина этой зоны тем больше, чем интенсивнее происходит рост частиц в дозвуковой части сопла. В сверхзвуковой части сопла рост частиц практически прекращается и происходит выравнивание распределений концентраций и среднемассового размера частиц по сечению сопла ($x=10.5$).

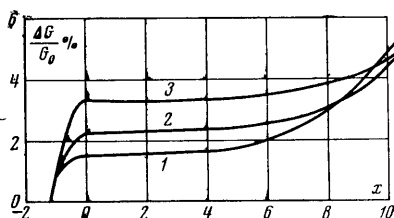
Влияние изменения весового содержания z частиц в смеси на распределение среднемассового размера частиц d_0 в выходном сечении сопла представлено на фиг. 3. На фиг. 4 представлено изменение доли частиц $\Delta G/G_0 = G - G_0/G_0$, осаждающихся на поверхность сопла по его длине при различных z , где G_0 и G - расходы частиц в начальном и текущем сечениях сопла, кривым 1-3 соответствуют $z=0.2, 0.3, 0.4$. Аналогичные зависимости для различных давлений на входе в сопло представлены на фиг. 5 и 6, кривым 1-3 соответствуют значения $p=17, 35, 70$. Как видно из этих фигур, увеличение весового содержания конденсированной фазы в смеси и давления на входе в сопло приводит к более интенсивному росту частиц и более значительному осаждению их на поверхность дозвуковой части сопла. В то же время более интенсивный рост частиц при больших z приводит к увеличению зоны с низкой концентрацией частиц в трансзвуковой части и на выходе из сопла и к уменьшению интенсивности осаждения на поверхность сверхзвуковой части сопла. Увеличение давления сказывается не только на увеличении интенсивности роста частиц, но и на увеличении силы, действующей со стороны газа на частицу. Зависимость интенсивности осаждения частиц на поверхность сверхзвуковой части сопла от давления имеет немонотонный характер.



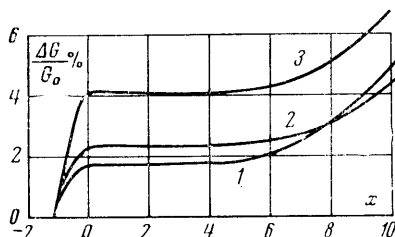
Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4



Фиг. 6

Приведенные результаты иллюстрируют взаимовлияние двумерных эффектов и взаимодействия частиц разных размеров, что необходимо учитывать при выборе оптимального профиля сопла.

В заключение авторы выражают признательность А. Н. Крайко и М. Я. Иванову, предоставившим программу расчета смешанного течения газа, которая была положена в основу методики определения параметров двухфазного потока в дозвуковой и трансзвуковой частях сопла.

Поступила 10 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин С. Д., Тишин А. П., Хайрутдинов Р. И. Неравновесное двухфазное течение в сопле Лавалья с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
2. Бабуха Г. Л., Стернин Л. Е., Шрайбер А. А. Расчет двухфазных потерь в соплах при наличии коагуляции и дробления капель конденсата. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
3. Верецака Л. П., Крайко А. Н., Стернин Л. Е. Метод характеристик для расчета сверхзвуковых течений газа с инородными частицами в плоских и осесимметричных соплах. ВЦ АН СССР, 1969.
4. Дритов Г. В., Тишин А. П. Расчет неравновесного течения газа с частицами конденсата в сопле Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
5. Комзолов В. Н., Маслов Б. Н., Пирумов У. Г. Исследование траектории частиц в соплах Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
6. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.