

ний [2]. Совпадение оказалось очень хорошим – расхождение не превышает 4%. На фиг. 2 результаты аналитического решения показаны точками. Сказанное позволяет сделать выводы о достоверности полученного численного решения и о достаточности ограничения области интегрирования в пласте на расстоянии 50  $r_c$  при интегрировании уравнений фильтрации конечно-разностным методом.

Автор благодарит А. Ф. Клементьева и А. И. Николаева за помощь в решении задачи и проведении расчетов.

Поступила 16 XII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
2. Исякаев В. А., Лиховол Г. Д. О сферическо-радиальной фильтрации жидкости и газа при отборе с переменным дебитом. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 9.

УДК 532.516.5

### ТОЛЩИНА ПЛЕНКИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ

М. А. ГАЛАХОВ

(Москва)

Предложен метод определения толщины пленки в тяжело нагруженном эллиптическом упругогидродиническом контакте. Метод заключается в интегрировании уравнения Рейнольдса по области, занятой пленкой, с использованием граничного условия на выходе и в последующем решении обыкновенного дифференциального уравнения для интеграла от приведенного давления. Для определения толщины пленки достаточно знать только интеграл от приведенного давления по линии постоянно-го зазора.

Получена новая формула для толщины пленки в эллиптическом упругогидродиническом контакте, т. е. для общего случая тяжело нагруженного герцева контакта при наличии смазки.

Толщина пленки в значительной степени определяет работоспособность смазанного контакта и энергетические потери в нем. Однако до настоящего времени нет достаточно обоснованного и эффективного метода определения толщины пленки в эллиптическом контакте. Для эллиптического контакта имеется лишь несколько результатов. В работе [1] дано частное решение уравнения Рейнольдса для жестких тел и жидкости постоянной вязкости. Это решение занижает действительную толщину пленки в тяжело нагруженном контакте на 1–2 порядка.

Для тяжело нагруженного кругового контакта в [2] дано частное решение уравнения Рейнольдса во внешности круга контакта. Форма поверхностей принимается такой же, как в сухом контакте [3]. Решение не удовлетворяет граничным условиям на выходе, а для определения толщины пленки придется привлекать дополнительное, нигде не следующее условие. В [4] дано численное решение уравнения Рейнольдса в области входа, что позволяет определить толщину пленки в произвольном эллиптическом контакте. Результаты [5] основаны на гипотезе Винклера со специально выбираемой постоянной и поэтому являются чисто приближенными.

Общие недостатки работ [2, 4] связаны с тем, что не удается использовать условие на выходе и получить корректно поставленную задачу, как в одномерном случае. Кроме того, формула, полученная в [2], дает нулевую толщину пленки при стремлении эксцентриситета эллипса к единице, что указывает на неправильный учет растекания. Предлагаемая в данной работе формула справедлива для всех значений эксцентриситета.

1. Рассмотрим стационарное качение двух упругих тел, сжатых силой  $P$ . Поместим начало координат в точку контакта, ось  $z'$  направим по общей нормали в точке контакта, ось  $x'$  – по направлению качения. Пусть в этой системе координат приведенные радиусы кривизны в плоскостях  $x'z'$  и  $y'z'$  равны  $R_x$  и  $R_y$ , скорости поверхностей равны  $u_1$  и  $u_2$ ,  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси контактного эллипса. Тогда  $R = 2R_x R_y / (R_x + R_y)$ ,  $\beta = R_x / R_y$ ,  $a = \mu (3PR/2E')^{1/2}$ ,  $b = \nu (3PR/2E')^{1/2}$ ,  $E' = E/(1-m^2)$ , где  $E$  – модуль Юнга для обоих тел,  $m$  – коэффициент Пуассона. Пусть вязкость смазки определяется формулой  $\eta = \eta_0 \exp(\alpha p')$ , где  $p'$  – давление. Обозначим через  $p_0'$  мак-

симальное герцевское давление, через  $h'(x', y')$  – толщину пленки,  $h_0' = h'(0, 0)$ . Введем безразмерные переменные по формулам

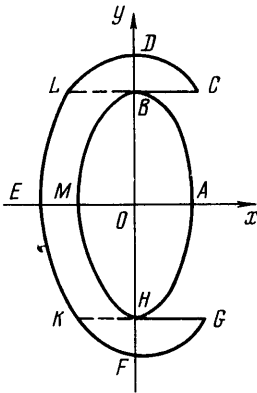
$$\begin{aligned} h &= h'/h_0', \quad x = x'/b, \quad y = y'/b, \quad p = p'/p_0' \\ V &= 22\mu\nu^{-2}(1+\beta)^2 UW^{-1/3}, \quad H_0 = 2h_0'R_x b^{-2} \\ Q &= \alpha p_0', \quad U = \eta_0(u_1 + u_2)/2E'R, \quad W = P/(E'R^2) \\ \Pi &= [1 - \exp(-Qp)]/Q \end{aligned}$$

В этих обозначениях уравнения упругогидродинамической теории смазки имеют вид

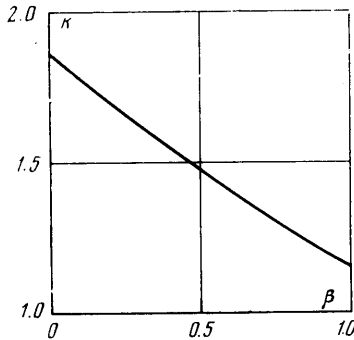
$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) = VH_0^{-2} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$(1.2) \quad H_0 h = x^2 + \beta y^2 + \frac{2(1+\beta)}{\pi^2 \mu \nu^2} \iint \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + C$$

2. Будем предполагать, что  $Q \gg 1$  и  $H_0(h-1) \ll 1$  при  $p \gg 1/Q$ . В пользу этого предположения можно привести следующие доводы: 1) при  $Q \gg 1$  левая часть (1.1) очень мала и  $h$  практически не зависит от  $x$ ; 2) эксперимент [4, 5] показывает, что в центральной части области контакта  $h$  мало зависит от  $y$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

В силу сделанных предположений область больших давлений близка к эллипсу, а распределение давления к герцевскому. Толщина пленки  $h$  вне эллипса контакта получается из (1.2) подстановкой герцевского распределения давления и, согласно [4], дается формулой

$$(2.1) \quad h = 1 + \frac{1+\beta}{\mu \pi \nu^2 H_0} \left[ I_2(u) x^2 + \frac{1}{\gamma^2} I_3(u) y^2 - I_1(u) \right]$$

$$I_1(u) = \int_0^u \frac{d\psi}{\sqrt{(1+\psi)(1+\psi/\gamma^2)\psi}}, \quad I_2(u) = \int_0^u \frac{d\psi}{\sqrt{(1+\psi)^3(1+\psi/\gamma^2)\psi}}$$

$$I_3(u) = \int_0^u \frac{d\psi}{\sqrt{(1+\psi/\gamma^2)^3(1+\psi)\psi}}$$

где  $\gamma = a/b$ ,  $u$  – положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{1+u} + \frac{y^2}{\gamma^2+u} = 1$$

На границе области  $\Omega$ , занятой пленкой

$$(2.2) \quad \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial n} = 0 \quad \left( \Pi \rightarrow 0, \frac{\partial \Pi}{\partial n} \rightarrow 0 \right)$$

в зависимости от того, является ли точка границы конечной или бесконечной,  $n$  — внешняя нормаль. Постулируем форму области  $\Omega$ , достаточно близкую к полученной в эксперименте [4, 6]. Область  $\Omega_h = ABCDEKFGH$  изображена на фиг. 1, линия  $L_1 = CDLEKFG$  есть линия уровня  $h$ ,  $\Omega = \Omega_\infty$ .

3. Проинтегрируем (1.1) по  $\Omega_h$

$$(3.1) \quad \int_{L_1} h^3 \frac{\partial \Pi}{\partial n} ds = 2VH_0^{-2} \left( \int_A^B h dy - \int_E^L h dy \right) = 2VH_0^{-2} \gamma(1-h)$$

Перепишем это уравнение в переменных  $g$  и  $\theta$ , введенных по формулам  $g = (h-1)^{1/2}$ ,  $\theta_x = -g_y$ ,  $\theta_y = g_x$ . Тогда

$$(3.2) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial n} = \frac{\partial \Pi}{\partial g} \sqrt{g_x^2 + g_y^2}, \quad ds = \frac{d\theta}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}$$

$$(1+g^{3/2}) \frac{\partial}{\partial g} \int_{L_1} \Pi d\theta = -2VH_0^{-2} \gamma g^{1/2}$$

При  $g=0$  полагаем  $\Pi = Q^{-1}$  в силу того, что  $Q \gg 1$ . Тогда после интегрирования по  $g$

$$\int_{VMH} d\theta = 2\gamma VQH_0 \int_0^\infty g^{1/2} (1+g^{3/2})^{-3} dg$$

Можно показать, что  $\theta_\varphi = 2gu\sqrt{1+u}\sqrt{\gamma^2+u}$ , где  $\varphi$  определяется заменой  $x = \sqrt{1+u} \cos \varphi$ ,  $y = \sqrt{\gamma^2+u} \sin \varphi$ .

Для вычисления  $g_u$  воспользуемся асимптотическим выражением для  $g$ , полученным из (2.1) при  $u \rightarrow 0$

$$g = \left[ \frac{4}{3} \frac{1+\beta}{\mu\lambda v^2 H_0} \left( \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\gamma^2} \right) \right]^{1/2} u$$

Получим, что

$$\int_{VMH} d\theta = 4\gamma \left( \frac{4}{3} \frac{1+\beta}{\mu\lambda v^2 H_0} \right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \left( \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\gamma^2} \right)^{1/2} d\varphi$$

Теперь, если обозначить  $VQ = S$ , имеем  $H_0 = f(\beta) S^{1/4}$  или в физических переменных

$$\frac{h}{R_y} = k(\beta) \left( \frac{\eta_0 \alpha v}{R_y} \right)^{1/4} \left( \frac{p_0}{E'} \right)^{-1/4}$$

где  $v = 1/2(u_1 + u_2)$ , а график  $k(\beta)$  представлен на фиг. 2. С точностью 5%  $k(\beta) = 1.82 - 0.68\beta$ . Расчет по формуле (3.4) для типичного в теории опор качения набора параметров дает отличие в 25% от результата [4]. Большое отличие связано с тем, что численные расчеты [4] основаны на не вполне корректном решении [2].

Автор благодарит К. И. Запфарова за помощь в работе.

Поступила 6 VII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Гидродинамическая теория смазки при качении. Ж. техн. физ., 1955, т. 25, вып. 4.
2. Archard J. F., Cowking E. W. Elastohydrodynamic Lubrication at Point Contacts. Proc. Inst. Mech. Engrs, 1965, 1966, vol. 180, pt 3B.
3. Грубин А. Н. Основы гидродинамической теории смазки тяжело нагруженных цилиндрических поверхностей. Тр. ЦНИИТМАШ, 1949, кн. 30.
4. Чжэн. Численное определение толщины упругогидродинамической пленки при эллиптическом контакте. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1970, т. 92, № 1.
5. Коднир Д. С. Контактного гидродинамическая теория смазки. Куйбышев, Куйбышевск. изд-во, 1963.
6. Tallian T. E. Elastohydrodynamic Hertzian Contacts. Mech. Engrg, 1971, vol. 93, No. 11.