УДК 532.5 : 622.244.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СФЕРИЧЕСКО-РАДИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

Г. Д. ЛИХОВОЛ

(Нижневартовск)

Рассматривается решение задачи о притоке газа в замкнутый баллон опробователя пластов на каротажном кабеле в бесконечном недеформируемом пласте для центрально-симметричной модели фильтрационного потока. Решение получено методом конечных разностей.

1. Пусть в однородном бесконечном недеформируемом пласте с первоначальным пластовым давлением P_0 с момента времени $t=0$ через полусферический сток радиуса r_c из пласта в замкнутый баллон опробователя объемом V отбирается идеальный газ. Найдем пространственно-временное распределение давления в пласте для изотермического и адиабатического режимов фильтрации газа и сжатия его в баллоне.

Примем центрально-симметричную модель фильтрационного потока и ограничим пласт – возьмем контур питания не на бесконечности, а на расстоянии $50\,r_c$ от центра поверхности стока. Сформулируем в безразмерном виде соответствующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial\Phi^S}{\partial\tau}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\Phi^S\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)\qquad(1\leqslant\rho\leqslant50,\ \ 0\leqslant\tau\leqslant10\,000)$$

$$\Phi(\rho)=1\qquad(\tau=0)$$

$$\rho^2\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=A\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\quad(\rho=1),\qquad\Phi=1\quad(\rho=50),\quad\tau>0$$

$$\Phi=\frac{P}{P_0},\quad \rho=\frac{r}{r_c},\quad S=\frac{c_v}{c_p},\quad \tau=\frac{kP_0t}{m\mu r_c^2},\quad A=\frac{SV}{2\pi r_c^3 m}$$

Будем искать $\Phi(\rho,\tau)$ для $S=0.8$, $A=1000$ (адиабатический режим) и S $A=1250$ (изотермический режим).

2. Сделав замену переменных, придем к задаче

$$\frac{\partial U}{\partial\tau'}=\frac{(10x)^4}{S}U^{1/(S+1)}\frac{\partial^2U}{\partial x^2},\qquad 0.02\leqslant x\leqslant1,\quad 0\leqslant\tau'\leqslant1$$

$$\tau'=0,\qquad U(x)=1$$

$$\tau'>0,\quad U^{1/(S+1)}\frac{\partial U}{\partial x}=-10^{-4}A\frac{\partial U}{\partial\tau'},\quad x=1,\ U=1,\ x=0.02$$

$$x=\rho^{-1},\quad \tau'=10^{-4}\tau,\quad U=\Phi^{S+1}$$

При численном решении задачи применим конечно-разностный метод. Введем сетку, равномерную по пространству и неравномерную по времени

$$x_i=x_0+ih,\quad i=0,1,\ldots,20;\quad \tau_n'=\sum_{k=0}^{n-1}l_k,\quad n=1,2,\ldots$$

Определим на ней сеточную функцию $y_{i,n}=y(x_i,\tau_n')$, аппроксимирующую $U(x,\tau')$ исходной задачи. Воспользуемся неявной разностной схемой с опережением, которая имеет вид

$$\frac{y_{i,n+1}-y_{i,n}}{l_n}=\frac{a_i(y_{i,n+1})}{h^2}(y_{i+1,n+1}-2y_{i,n+1}+y_{i-1,n+1}),\quad i=1,2,\ldots,19$$

$$a_i(y_{i,n+1})=\frac{(10x_i)^4}{S}y_{i,n+1}^{1/(S+1)}$$

Граничные условия

$$f(y_{0,n+1})\frac{y_{1,n+1}-y_{0,n+1}}{h}=-A\frac{y_{0,n+1}-y_{0,n}}{l_n},\quad y_{20,n+1}=1$$

$$f(y_{0,n+1})=y_{0,n+1}^{1/(S+1)}$$

Начальное условие

$$y_{i,0}=1,\qquad i=0,1,\ldots,20$$

Применяя метод энергетических оценок [1], можно показать, что эта разностная схема абсолютно устойчива и имеет погрешность аппроксимации $O(l_m+h^2)$, где $l_m=\max\limits_k l_k$.

Полученная система уравнений нелинейна относительно $y_{i,n+1}$, поэтому для ее решения применен следующий итерационный процесс:

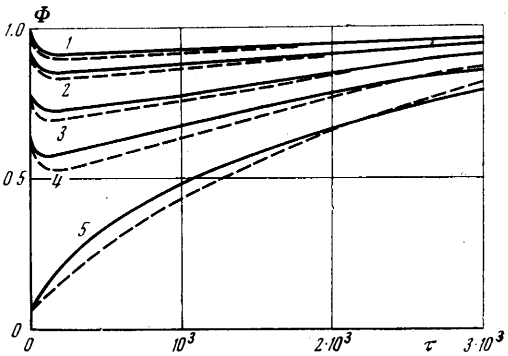
$$\frac{\overset{(N+1)}{y_{i,n+1}}-y_{i,n}}{l_n}=\frac{a_i(\overset{(N)}{y_{i,n+1}})}{h^2}(\overset{(N+1)}{y_{i+1,n+1}}-2\overset{(N+1)}{y_{i,n+1}}+\overset{(N+1)}{y_{i-1,n+1}}),\quad i=1,2,\ldots,19$$

$$f(\overset{(N)}{y_{0,n+1}})\frac{\overset{(N+1)}{y_{1,n+1}}-\overset{(N+1)}{y_{0,n+1}}}{h}=-A\frac{\overset{(N+1)}{y_{0,n+1}}-y_{0,n}}{l_n},\qquad \overset{(N+1)}{y_{20,n+1}}=1$$

где N – номер итерации. В качестве нулевого приближения принималась функция $y_{i,n}$ предыдущего временного слоя $\overset{0}{y_{i,n+1}}=y_{i,n}$.

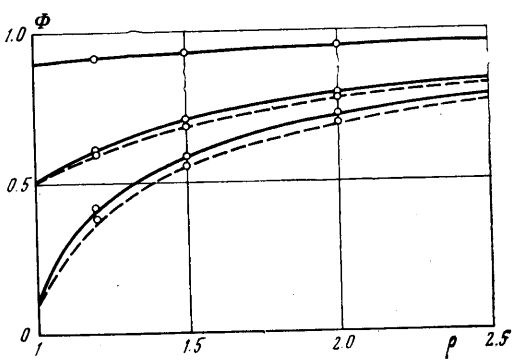
Данная система линейных алгебраических уравнений решалась методом прогонки [1]. При расчетах был принят шаг $h=0.049$. Шаг по времени переменный: сначала $l=10^{-2}$, затем шаг увеличивается в 10 раз через каждые 10 временных слоев. В качестве контроля вычислений проверялся баланс массы. Решение реализовано на ЭЦВМ БЭМС-4.

3. Результаты расчетов проведены на фиг. 1 и 2. На фиг. 1 пунктирные линии соответствуют $S=0.8$, сплошные – $S=1$, парам кривых *1–5* соответствуют $\rho=5.102$, 3.401, 2.041, 1.458, 1.020. Видно, что давление в пласте сначала быстро снижается, а затем возрастает по мере заполнения баллона газом. Нарастание давления вначале идет быстрее для изотермического режима, а затем для адиабатического. Соответствующие кривые давления на стоке (в баллоне) опробователя $\Phi_c(\tau)=\Phi(1,\tau)$ пересекаются между собой при $\Phi_c\approx0.6$.



Фиг. 1

Значительное снижение давления в пласте при опробовании имеет место лишь вблизи стока. На фиг. 2 (пунктирные кривые $S=0.8$, сплошные $S=1$) сопоставлены депрессионные воронки изотермического и адиабатического режимов для одинаковых значений текущего давления в баллоне ($\Phi_c=0.1$, 0.5 и 0.9). Во всех случаях воронка изотермического режима круче, однако с ростом Φ_c расхождение уменьшается и для $\Phi_c=0.9$ наблюдается лишь в третьем десятичном знаке.



Фиг. 2

Результаты полученного численного решения были сопоставлены с результатами решения этой же задачи методом интегральных соотношений [2]. Совпадение оказалось очень хорошим – расхождение не превышает 4%. На фиг. 2 результаты аналитического решения показаны точками. Сказанное позволяет сделать выводы о достоверности полученного численного решения и о достаточности ограничения области интегрирования в пласте на расстоянии $50\,r_c$ при интегрировании уравнений фильтрации конечно-разностным методом.

Автор благодарит А. Ф. Клементьева и А. И. Николаева за помощь в решении задачи и проведении расчетов.

Поступила 16 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
2. *Исякаев В. А., Лиховол Г. Д.* О сферическо-радиальной фильтрации жидкости и газа при отборе с переменным дебитом. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 9.

УДК 532.516.5

ТОЛЩИНА ПЛЕНКИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ

М. А. ГАЛАХОВ

(Москва)

Предложен метод определения толщины пленки в тяжелонагруженном эллиптическом упругогидродинамическом контакте. Метод заключается в интегрировании уравнения Рейнольдса по области, занятой пленкой, с использованием граничного условия на выходе и в последующем решении обыкновенного дифференциального уравнения для интеграла от приведенного давления. Для определения толщины пленки достаточно знать только интеграл от приведенного давления по линии постоянного зазора.

Получена новая формула для толщины пленки в эллиптическом упругогидродинамическом контакте, т. е. для общего случая тяжелонагруженного герцева контакта при наличии смазки.

Толщина пленки в значительной степени определяет работоспособность смазанного контакта и энергетические потери в нем. Однако до настоящего времени нет достаточно обоснованного и эффективного метода определения толщины пленки в эллиптическом контакте. Для эллиптического контакта имеется лишь несколько результатов. В работе [1] дано частное решение уравнения Рейнольдса для жестких тел и жидкости постоянной вязкости. Это решение занижает действительную толщину пленки в тяжелонагруженном контакте на 1–2 порядка.

Для тяжелонагруженного кругового контакта в [2] дано частное решение уравнения Рейнольдса во внешности круга контакта. Форма поверхностей принимается такой же, как в сухом контакте [3]. Решение не удовлетворяет граничным условиям на выходе, а для определения толщины пленки приходится привлекать дополнительное, ниоткуда не следующее условие. В [4] дано численное решение уравнения Рейнольдса в области входа, что позволяет определить толщину пленки в произвольном эллиптическом контакте. Результаты [5] основаны на гипотезе Винклера со специально выбираемой постоянной и поэтому являются чисто приближенными.

Общие недостатки работ [2, 4] связаны с тем, что не удается использовать условие на выходе и получить корректно поставленную задачу, как в одномерном случае. Кроме того, формула, полученная в [2], дает нулевую толщину пленки при стремлении эксцентриситета эллипса к единице, что указывает на неправильный учет растекания. Предлагаемая в данной работе формула справедлива для всех значений эксцентриситета.

1. Рассмотрим стационарное качение двух упругих тел, сжатых силой P. Поместим начало координат в точку контакта, ось z' направим по общей нормали в точке контакта, ось x' – по направлению качения. Пусть в этой системе координат приведенные радиусы кривизны в плоскостях $x'z'$ и $y'z'$ равны R_x и R_y, скорости поверхностей равны u_1 и u_2, a и b – большая и малая полуоси контактного эллипса. Тогда $R=2R_xR_y/(R_x+R_y)$, $\beta=R_x/R_y$, $a=\mu(3PR/2E')^{1/3}$, $b=\nu(3PR/2E')^{1/3}$, $E'=E/(1-m^2)$, где E – модуль Юнга для обоих тел, m – коэффициент Пуассона. Пусть вязкость смазки определяется формулой $\eta=\eta_0 \exp(\alpha p')$, где p' – давление. Обозначим через p_0' мак-