МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1975

УДК 533.6.011.8

К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕКОНДЕНСАЦИИ В БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

В. М. ЖДАНОВ, Л. Н. ШУЛЕПОВ

(Москва)

Строгое решение задачи о переконденсации между двумя поверхностями при произвольных числах Кнудсена возможно лишь на основе последовательного кинетического рассмотрения. Для однокомпонентного случая эта задача решалась в [1] с использованием в кинетическом уравнении БГК-модели интеграла столкновений. В [2] с той же целью применялся метод моментов для «максвелловских» молекул. Случай бинарной смеси, в которой одна из компонент является неконденсирующимся газом, рассматривался в [3, 4]. При этом в [3] использовалась однорелаксационная круковская модель для каждой из компонент, не отражающая многих свойств точного интеграла столкновений. Более строгая модель (интеграл столкновений в форме Гамеля) применялась в работе [4]. При этом записывалась система интегральных уравнений для гидродинамических величин и рассматривалось ее численное решение в некоторых специфически частных случаях.

В настоящей работе задача о переконденсации в бинарной смеси рассматривается методом моментов для «максвелловских» молекул. Для случая малой относительной разности температур поверхностей получены аналитические выражения для скоростей переноса массы и потоков тепла, позволяющие выявить основные особенности процесса переконденсации в бинарной смеси.

Рассмотрим процесс испарения-конденсации в системе, образованной двумя плоскими бесконечными параллельными пластинами A и B из одного и того же материала, нагретыми до разных температур $(T_A > T_B)$. Пространство между ними заполнено бинарной газовой смесью, состоящей либо из паров веществ, входящих в состав материала пластин, либо из пара и неконденсирующегося газа.

Состояние двухкомпонентной газовой смеси описывается функцией распределения $f_\alpha(v, x)$, удовлетворяющей кинетическому уравнению вида [5]

$$
\begin{gathered}
v_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} = I_{\alpha\alpha} + I_{\alpha\beta} \\
I_{\alpha\alpha} = \int (f_\alpha' f_{\alpha 1}' - f_\alpha f_{\alpha 1}) g_{\alpha\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}(g_{\alpha\alpha}, \chi) \sin\chi \, d\chi \, d\varepsilon \, dv_1 \\
I_{\alpha\beta} = \int (f_\alpha' f_\beta' - f_\alpha f_\beta) g_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}, \chi) \sin\chi \, d\chi \, d\varepsilon \, dv_\beta \\
(\alpha, \ \beta = 1, \ 2 \ \alpha \neq \beta)
\end{gathered} \tag{1}
$$

Для решения задачи используется метод моментов [5, 6], при этом функция распределения аппроксимируется двусторонним максвелловским распределением

$$
f_\alpha = \begin{cases} f_\alpha^+ = n_{\alpha 1}(x) \left(\dfrac{m_\alpha}{2\pi T_{\alpha 1}(x)} \right)^{3/2} \exp\left(-\dfrac{m_\alpha v^2}{2T_{\alpha 1}(x)} \right), & v_x > 0 \\ f_\alpha^- = n_{\alpha 2}(x) \left(\dfrac{m_\alpha}{2\pi T_{\alpha 2}(x)} \right)^{3/2} \exp\left(-\dfrac{m_\alpha v^2}{2T_{\alpha 2}(x)} \right), & v_x < 0 \end{cases} \tag{2}
$$

Неизвестные функции $n_{\alpha_1}(x)$, $n_{\alpha_2}(x)$, $T_{\alpha_1}(x)$, $T_{\alpha_2}(x)$ определяются из системы моментных уравнений

$$\frac{d}{dx}\int v_x\psi_\alpha(\mathbf{v})f_\alpha(\mathbf{v},x)d\mathbf{v}=\int\psi_\alpha(\mathbf{v})I_{\alpha\alpha}d\mathbf{v}+\int\psi_\alpha(\mathbf{v})I_{\alpha\beta}d\mathbf{v}$$

где в качестве $\psi_\alpha(\mathbf{v})$ выбраны величины m_α, $m_\alpha v_x$, ${}^1/{}_2 m_\alpha v^2$ и ${}^1/{}_2 m_\alpha v_x v^2$.

В принципе функция распределения может быть аппроксимирована с помощью большего числа параметров. При этом соответственно возрастает число моментных уравнений. Однако сравнение результатов четырехмоментного приближения данной работы и шестимоментного приближения работы [2] на примере однокомпонентной системы показывает, что при определении таких величин, как скорость переконденсации, поправка не превышает нескольких процентов. Поэтому ниже для простоты рассматривается четырехмоментное приближение.

Вычисление правых частей уравнений моментов для газовых смесей рассматривалось в ряде работ [7, 8]. Соответствующие выражения заметно упрощаются для модели максвелловских молекул, поскольку при этом $g_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta},\chi)$ не зависит от $g_{\alpha\beta}$. Явный вид выражений для этого случая можно взять из работы [8].

Далее рассматривается медленная переконденсация в смеси, когда задача допускает линеаризацию по малым параметрам, соответствующим малой относительной разнице температур пластин и равновесных плотностей пара у пластин $n_{\alpha A}(T_A)$ и $n_{\alpha B}(T_B)$. Положим

$$n_{\alpha1}=n_{\alpha0}(1+\nu_{\alpha1}),\qquad n_{\alpha2}=n_{\alpha0}(1+\nu_{\alpha2})$$
$$T_{\alpha1}=T_0(1+\tau_{\alpha1}),\qquad T_{\alpha2}=T_0(1+\tau_{\alpha2})$$
$$T_0={}^1/{}_2(T_A+T_B),\qquad n_{\alpha0}={}^1/{}_2(n_{\alpha A}+n_{\alpha B})$$

Тогда система моментных уравнений после линеаризации приобретает вид

$$\frac{d}{dx}\left(\nu_{-\alpha}+\frac{1}{2}\tau_{-\alpha}\right)=0,\quad \frac{d}{dx}(\nu_{+\alpha}+\tau_{+\alpha})=\frac{2x_\beta}{D_{\alpha\beta}}(u_\beta-u_\alpha)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\nu_{-\alpha}+\frac{3}{2}\tau_{-\alpha}\right)=\frac{3x_\beta T_0}{m_0 v_{\alpha T}D_{\alpha\beta}}(\tau_{+\beta}-\tau_{+\alpha})$$

(3)
$$\frac{d}{dx}(\nu_{+\alpha}+2\tau_{+\alpha})=\frac{2x_\beta}{D_{\alpha\beta}}(u_\beta-u_\alpha)+\frac{n_0{}^2}{n_{\alpha0}}[b_{\alpha\alpha}(u_\alpha-v_{\alpha T}\tau_{-\alpha})+$$
$$+b_{\alpha\beta}(u_\beta-v_{\beta T}\tau_{-\beta})]$$

(4)
$$u_\alpha={}^1/{}_4 v_{\alpha T}(\nu_{-\alpha}+{}^1/{}_2\tau_{-\alpha}),\qquad \nu_{\pm\alpha}=\nu_{\alpha1}\pm\nu_{\alpha2}$$
$$\tau_{\pm\alpha}=\tau_{\alpha1}\pm\tau_{\alpha2},\qquad v_{\alpha T}=(8T_0/\pi m_\alpha)^{1/2},\qquad m_0=m_\alpha+m_\beta$$
$$\mu_{\alpha\beta}=\frac{m_\alpha m_\beta}{m_0},\quad x_\alpha=\frac{n_{\alpha0}}{n_0},\quad n_0=n_{\alpha0}+n_{\beta0}$$
$$D_{\alpha\beta}=\frac{T_0}{n_0\mu_{\alpha\beta}\gamma^{(1)}_{\alpha\beta}},\quad \gamma^{(l)}_{\alpha\beta}=2\pi\int_0^\pi g_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta},\chi)\,(1-\cos^l\chi)\sin\chi d\chi$$

где $\nu_{\pm\alpha}$ и $\tau_{\pm\alpha}$ — новые переменные, u_α — макроскопическая скорость α-компоненты, $D_{\alpha\beta}$ — коэффициент взаимной диффузии. Коэффициенты $b_{\alpha\alpha}$ и $b_{\alpha\beta}$ совпадают с соответствующими коэффициентами работы [7], фигурирующими в уравнениях для определения парциальных потоков тепла компонент смеси. При этом $b_{\alpha\beta}=-{}^1/_4 L_{\alpha\beta}^{11}$, $b_{\alpha\alpha}=-{}^1/_4 L_{\alpha\alpha}^{11}$, где L^{11} — элемент определителей, через которые выражаются теплопроводность и термодиффузия многокомпонентной смеси [10].

Для принятой здесь модели максвелловских молекул имеем

$$b_{\alpha\alpha}=\frac{1}{5}x_\alpha^2\frac{m_\alpha}{T_0}\gamma_{\alpha\alpha}^{(2)}+\frac{2}{5}x_\alpha x_\beta\frac{1}{T_0}\frac{m_\alpha}{m_0^3}[(3m_\alpha^2 m_\beta+m_\beta^3)\gamma_{\alpha\beta}^{(1)}+$$
$$+2m_\alpha m_\beta^2\gamma_{\alpha\beta}^{(2)}]$$
$$b_{\alpha\beta}=-\frac{4}{5}x_\alpha x_\beta\frac{1}{T_0}\frac{m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_0^3}[2\gamma_{\alpha\beta}^{(1)}-\gamma_{\alpha\beta}^{(2)}]\qquad(\alpha\neq\beta)$$

Из первого уравнения системы (3) и определения (4) следует, что макроскопическая скорость u_α является одной из постоянных интегрирования. Интегрируя второе уравнение системы (3), получаем

$$\nu_{+\alpha}+\tau_{+\alpha}=2\frac{x_\beta}{D_{\alpha\beta}}(u_\beta-u_\alpha)x+C_{1\alpha}\tag{5}$$

Исключая из двух последних уравнений системы (3) $\nu_{+\alpha}$ и $\nu_{-\alpha}$ с помощью (4) и (5), приходим к системе четырех уравнений для определения $\tau_{\pm\alpha}$ ($\alpha=1, 2$, $\beta\neq\alpha$). Решение этой системы дает

$$\tau_{+\alpha}=C_3x+C_4+(-1)^\alpha B\lambda_\beta[C_5\exp(ax)+C_6\exp(-ax)]\tag{6}$$
$$v_\alpha\tau_{-\alpha}=u_\alpha-C_3\frac{\lambda_\alpha}{n_{0\alpha}}-(-1)^\alpha\frac{3x_\beta}{m_0D_{\alpha\beta}}a[C_5\exp(ax)-C_6\exp(-ax)]$$
$$B=\Delta\frac{3n_0T_0}{m_0D_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta},\quad \lambda_\alpha=\frac{x_\alpha}{\Delta}(x_\alpha b_{\beta\beta}-x_\beta b_{\alpha\beta})$$
$$\Delta=b_{\alpha\alpha}b_{\beta\beta}-b_{\alpha\beta}b_{\beta\alpha},\qquad a^2=B\lambda$$

При этом $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ совпадает с коэффициентом теплопроводности двухкомпонентной смеси максвелловских молекул.

Определение восьми постоянных интегрирования требует задания соответствующего числа граничных условий. Предполагая, что рассеяние молекул стенкой носит диффузный характер, введем коэффициенты конденсации $\beta_{\alpha A}$ и $\beta_{\alpha B}$ соответственно на горячей ($x=0$) и холодной ($x=l$) пластинах. Тогда граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned}&\nu_{+\alpha}(0)+\nu_{-\alpha}(0)=-8\frac{u_\alpha}{v_{\alpha T}}\frac{1-\beta_{\alpha A}}{\beta_{\alpha A}}+\frac{n_{\alpha A}-n_{\alpha B}}{n_{\alpha 0}}\\&\nu_{+\alpha}(l)-\nu_{-\alpha}(l)=8\frac{u_\alpha}{v_{\alpha T}}\frac{1-\beta_{\alpha B}}{\beta_{\alpha B}}-\frac{n_{\alpha A}-n_{\alpha B}}{n_{\alpha 0}}\\&\tau_{+\alpha}(0)+\tau_{-\alpha}(0)=\frac{T_A-T_B}{T_0},\quad \tau_{+\alpha}(l)-\tau_{-\alpha}(l)=-\frac{T_A-T_B}{T_0}\end{aligned}\tag{7}$$

Используя решения (5), (6) и граничные условия (7), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения u_α

$$x_\beta\frac{l}{D_{\alpha\beta}}(u_\alpha-u_\beta)+4\frac{u_\alpha}{v_{\alpha T}}\frac{1-\beta_\alpha}{\beta_\alpha}-\frac{1}{2}\frac{T_\alpha(0)-T_\alpha(l)}{T_0}=\frac{n_{\alpha A}-n_{\alpha B}}{n_{\alpha 0}}+\tag{8}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{T_A-T_B}{T_0}$$

Здесь введен приведенный коэффициент конденсации

$$\beta_\alpha=\beta_{\alpha A}\beta_{\alpha B}[\beta_{\alpha A}+\beta_{\alpha B}]^{-1}$$

Разность температур компоненты α у поверхности горячей и холодной пластин определяется соотношением

$$\frac{T_\alpha(0)-T_\alpha(l)}{T_0}=A_\alpha(j_{\alpha 0},j_{\beta 0})\frac{T_A-T_B}{T_0}-A_\alpha(j_\alpha,j_\beta)$$

(9) $$j_\alpha=n_{\alpha 0}u_\alpha,\qquad j_{\alpha 0}=n_{\alpha 0}v_{\alpha T}$$

$$A_\alpha(j_\alpha,j_\beta)=\frac{(\lambda_\beta/\lambda)(\lambda_\beta j_\alpha/\lambda-\lambda_\alpha j_\beta/\lambda)+R_\alpha(j_\alpha,j_\beta)}{\lambda_\alpha^2 j_{\beta 0}/\lambda^2+\lambda_\beta^2 j_{\alpha 0}/\lambda^2+\Omega\operatorname{cth}al/2+R_\alpha(j_{\alpha 0},j_{\beta 0})}$$

(10) $$R_\alpha(j_\alpha,j_\beta)=\frac{4}{15}\frac{x_\beta}{\mathrm{Kn}_\beta}\left(j_\alpha+\Omega\frac{j_\alpha+j_\beta}{j_{\beta 0}}\operatorname{cth}\frac{al}{2}\right)$$

$$\Omega=\frac{3n_0T_0}{m_0D_{\alpha\beta}}\frac{x_\alpha x_\beta}{a},\qquad \mathrm{Kn}_\beta=\frac{8}{15}\frac{\lambda}{n_0 l v_{\alpha T}}$$

Совместное решение уравнений (8), (9) позволяет определить макроскопические скорости переноса каждой из компонент в плоском зазоре.

Рассмотрим выражение для потока энергии в смеси газов

(11) $$q=\sum_{\alpha=1,2}\int\frac{m_\alpha v^2}{2}v_x f_\alpha\,dv=\frac{1}{2}T_0\sum_\alpha j_{\alpha 0}(\nu_{-\alpha}+{}^3/_2\tau_{-\alpha})$$

которое с учетом определения (4) можно представить в виде

$$q=2T_0\sum_\alpha(j_\alpha+{}^1/_4 j_{\alpha 0}\tau_{-\alpha})$$

Используя решение (6) и граничные условия (7), получаем для q выражение

(12) $$q=\sum_\alpha\left(\frac{5}{2}T_0 j_\alpha+\lambda_\alpha\frac{T_\alpha(0)-T_\alpha(l)}{l}\right)$$

где разность температур компонент у стенок определяется соотношением (9).

Рассмотрим сначала вытекающие из (8)—(10) выражения для переконденсации в однокомпонентной системе. Переходя к случаю $x_1\to 0$ (или $x_2\to 0$), имеем

$$\frac{T(0)-T(l)}{T_0}=\frac{4}{4+15\mathrm{Kn}}\left[\frac{T_A-T_B}{T_0}-\frac{u}{v_T}\right]$$

(13) $$\frac{u}{v_T}\left[\frac{1-\beta}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{1}{4+15\mathrm{Kn}}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{n_A-n_B}{n_0}+\frac{1}{2}\frac{8+15\mathrm{Kn}}{4+15\mathrm{Kn}}\frac{T_A-T_B}{T_0}\right]$$

$$q=\frac{5}{2}T_0n_0u+\lambda\frac{T(0)-T(l)}{l}$$

Здесь число Кнудсена введено обычным способом [9]

$$\mathrm{Kn}=\frac{\mu}{ln_0}\sqrt{\frac{\pi}{2mT_0}},\qquad \mu=\frac{4}{15}m\lambda$$

Если $\mathrm{Kn}\gg1$, выражения (13) соответствуют известным результатам [1, 2]

$$u=\frac{v_T}{4}\frac{\beta}{1-\beta}\left[\frac{n_A-n_B}{n_0}+\frac{1}{2}\frac{T_A-T_B}{T_0}\right]$$

$$q=2T_0n_0u+\frac{1}{2}T_0n_0v_T\frac{T_A-T_B}{T_0} \tag{14}$$

Для случая $\mathrm{Kn}\ll1$

$$u=\frac{2\beta}{8-7\beta}v_T\left[\frac{n_A-n_B}{n_0}+\frac{T_A-T_B}{T_0}\right]$$

$$q=\left(\frac{5}{2}n_0T_0-\frac{\lambda}{v_T}\frac{T_0}{l}\right)u+\lambda\frac{T_A-T_B}{l} \tag{15}$$

При этом значение u (15) для $\beta_A=\beta_B=1$ ($\beta={}^1/_2$) отличается от результата, полученного в шестимоментном приближении в [2] на 6.5%.

Если рассматривается случай двух испаряющихся газов, то в пределе $\mathrm{Kn}_\alpha\gg1$ из (8)–(10) следуют выражения для потоков независимо испаряющихся компонент, определенные выражениями (14) с соответствующими индексами компонент. Для малых чисел Кнудсена выражения для скорости переконденсации α-компоненты записываются в виде

$$\frac{u_\alpha}{v_{\alpha T}}\left[x_\alpha\frac{8-7\beta_\alpha}{2\beta_\alpha}+x_\beta\frac{8-7\beta_\beta}{2\beta_\beta}\frac{v_{\alpha T}}{v_{\beta T}}-\frac{1}{2}x_\alpha x_\beta\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(1-\sqrt{m_\beta/m_\alpha})^2}{x_\alpha\sqrt{m_\beta/m_\alpha}+x_\beta(1+j_{\alpha0}/\Omega)}\right]=\frac{n_A-n_B}{n_0}+\frac{T_A-T_B}{T_0} \tag{16}$$

$$n_A=n_{1A}+n_{2A},\qquad n_0=n_{10}+n_{20}$$

В случае, когда одна из компонент в избытке ($x_2\simeq1$), скорость ее переконденсации u_2 определяется выражением, характерным для переноса в однокомпонентной системе

$$u_2=\frac{2\beta_2}{8-7\beta_2}v_{2T}\left[\frac{n_{2A}-n_{2B}}{n_{20}}+\frac{T_A-T_B}{T_0}\right] \tag{17}$$

При этом выражение для u_1, используя общие соотношения (8), (9), можно записать с учетом линейных по числу Кнудсена членов в виде

$$u_1=u_2\left[1-\frac{D_{12}}{lv_{1T}}\left(\frac{8-7\beta_1}{2\beta_1}-\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{m_2/m_1}}{1+j_{10}/\Omega}\right)\right]+$$

$$+\frac{D_{12}}{l}\left[\frac{n_{1A}-n_{1B}}{n_{10}}+\frac{T_A-T_B}{T_0}\right] \tag{18}$$

Как видно, скорость переконденсации компоненты, присутствующей в малом количестве, определяется в основном ее конвективным переносом вместе с паром избыточной компоненты (с поправками порядка числа Кнудсена) и ее диффузионным переносом в паре избыточной компоненты.

Рассмотрим теперь процесс переконденсации, когда одна из компонент является неконденсирующимся газом. Выражение для u_1 следует в этом случае из уравнений (8)—(10), если положить в них $u_2=0$. Для $\mathrm{Kn}\ll 1$ приходим к результату

$$(19)\qquad u_1\left(x_2\frac{l}{D_{12}}+\frac{8-7\beta_1}{2\beta_1 v_{1T}}\right)=\frac{n_{1A}-n_{1B}}{n_{10}}+\frac{T_A-T_B}{T_0}$$

Как видно, скорость переконденсации первой компоненты зависит в этом случае от величины, представляющей собой сумму двух сопротивлений, соответствующих диффузионному переносу и чистому испарению. Если β_1 не мало (заметная скорость испарения), то скорость переконденсации лимитируется диффузионным переносом пара, т. е.

$$(20)\qquad u_1=\frac{n_0}{n_{20}}\frac{D_{12}}{l}\left[\frac{n_{1A}-n_{1B}}{n_{10}}+\frac{T_A-T_B}{T_0}\right]$$

Заметим, что пренебрежение вторым членом в скобках по сравнению с первым (в силу условия $\mathrm{Kn}\ll 1$ оказывается неоправданным, если $x_2\ll 1$, т. е. неконденсирующаяся компонента должна присутствовать в достаточном количестве. Для малых скоростей испарения ($\beta_1\ll 1$) влияние диффузионного сопротивления оказывается несущественным, если $\beta_1\ll\mathrm{Kn}$. В этом случае выражение для скорости совпадает с (15). Этот же результат получается, если $x_2\to 0$.

Авторы благодарят Р. Я. Кучерова за полезные обсуждения.

Поступила 10 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э., Цулая Т. С.* Кинетическая теория переконденсации при малой разности температур. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 11.
2. *Лабунцов Д. А.* Анализ процессов испарения и конденсации. Теплофизика высоких температур, 1967, т. 5, № 4.
3. *Mouratova T. M.* Analyse cinetique de la condensation-evaporation dans un systeme binaire vapeur-gas. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1973, vol. 16, No. 7.
4. *Макашев Н. К.* Сильная переконденсация в одно- и двухкомпонентном разреженном газе при произвольном значении числа Кнудсена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
5. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
6. *Liu C. Y., Lee L.* Kinetic theory description of place compressible Couette flow.— In: Rarefied Gas Dynamics. New York — London, Acad. Press, 1961.
7. *Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А.* Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 3.
8. *Rush D. J., Wilkins D. R., Katra J. A., McCandless R. J.* An improved formalism for the analysis of transport phenomena in gaseous mixtures and plasmas. IEEE Conf. Record Thermionic Conversion Specialist Conf. Carmel, California, 1969.
9. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М., «Мир», 1973.
10. *Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.