

ФОРМИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ  
ТЕПЛОПРОВОДНОГО ВЯЗКОГО ГАЗА

А. И. ИГОШИН

(Москва)

Рассматривается развитие одномерных течений в вязком теплопроводном газе на примерах двух течений: 1 — течения, возникающего при распаде разрыва давления в покоящемся газе (течение в ударной трубе); 2 — течения, возникающего при приложении постоянного теплового потока на поверхности раздела твердого тела и газа.

Для таких течений малоизученной является начальная стадия процесса вплоть до времен, когда в области течения выделяются нетеплопроводные зоны, описываемые уравнениями Эйлера, и диссипативные зоны типа ударной волны и пограничного слоя, которые могут быть рассмотрены с помощью асимптотических методов [1-3]. При исследовании начальной стадии необходимо решение полной системы уравнений Навье — Стокса.

В настоящей работе рассмотрение начальной стадии формирования течений проводится на основе численного решения задач 1 и 2. Изучается влияние числа Прандтля и коэффициента вязкости на поведение газа.

1. Рассматривается система уравнений Навье — Стокса совместно с уравнением состояния совершенного газа

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial \vartheta} &= \frac{x}{\vartheta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{8}{3\vartheta} \frac{\partial}{\partial x} \rho \mu \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial p}{\partial x} \\
 \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} &= \frac{x}{\vartheta} \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2\rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} \\
 (1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= \frac{x}{\vartheta} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{8}{3} \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \rho \mu \frac{\partial T}{\partial x} - 2\rho T(\gamma-1) \frac{\partial u}{\partial x} + \\
 &+ \frac{8\rho\mu}{3} \frac{\gamma-1}{R\vartheta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad \left( Pr = \frac{4\mu c_p}{3\lambda} \right) \\
 p &= R\rho T
 \end{aligned}$$

В качестве независимых переменных в (1.1) взяты

$$(1.2) \quad \vartheta = \sqrt{t}, \quad x = \frac{1}{\vartheta} \int_{x_B^*(t)}^{x_B} \rho dx_B$$

Все величины в (1.1), (1.2) отнесены к значениям при  $x = +\infty$  по формулам:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{T_+}{T_+^\circ}, \quad \rho = \frac{\rho_+}{\rho_+^\circ}, \quad p = \frac{p_+}{p_+^\circ}, \quad u = \frac{u_+}{\sqrt{R_+^\circ T_+^\circ}} \\
 t &= \frac{t_+ p_+^\circ}{\mu_+^\circ}, \quad x = \frac{x_+}{\sqrt{\rho_+^\circ \mu_+^\circ}}, \quad R = \frac{R_+}{R_+^\circ}
 \end{aligned}$$

Здесь плюс обозначает размерные величины, параметры на бесконечности помечены градусом.

В (1.1), (1.2) кроме традиционных обозначений введены следующие:  $x_E$  — эйлерова координата,  $x_E^*(t)$  — эйлерова координата линии отмеченных частиц (в задаче 1  $x_E^*(t)$  — контактная поверхность, в задаче 2 — поверхность раздела стенки и газа).

В начальный момент в задаче 1 задаются профили давления и плотности в виде ступенчатых функций с разрывом в точке  $x=0$ , температура считается постоянной и равной  $T_+^0$ . В задаче 2 параметры газа при  $t=0$  и  $x>0$  предполагаются постоянными. Газ в начальный момент в обоих задачах считается покоящимся.

На линии  $x=0$  в задаче 1 температура считается непрерывной [4], кроме того, из законов сохранения на контактной поверхности имеем

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u_- = u_+, \quad p_- - \frac{4}{3} \frac{\rho_- \mu_-}{\phi} \frac{\partial u_-}{\partial x} &= p_+ - \frac{4}{3} \frac{\rho_+ \mu_+}{\phi} \frac{\partial u_+}{\partial x} \\ T_- = T_+, \quad \frac{c_p \rho_- \mu_-}{\Gamma_-} \frac{\partial T_-}{\partial x} &= \frac{c_p \rho_+ \mu_+}{\Gamma_+} \frac{\partial T_+}{\partial x} \end{aligned}$$

Здесь минус обозначает параметры газа при  $x=-0$ , а плюс — при  $x=+0$ .

В задаче 2 считается, что в момент  $t=0$  на поверхности раздела твердого тела и газа прикладывается постоянный тепловой поток  $q_w$ .

Система (1.4) решалась численно с помощью полуэвневной схемы, в которой все производные по  $x$ , кроме производной от давления в уравнении движения, расписывались на верхнем слое по времени. Производные по  $\phi$  аппроксимировались с порядком  $O(\tau)$ , производные по  $x$  — с порядком  $O(h^2)$ , где  $\tau$  и  $h$  — шаги сетки. Аналогичная схема, но в эйлеровых координатах, использовалась в [5]. Введение независимых переменных  $\phi$  и  $x$  по формулам (1.2) позволяет выделить особую линию  $x=0$ , на которой в начальный момент существует разрыв функций, что дает возможность численного рассмотрения начальной стадии формирования течений без предварительного начального сглаживания начальных разрывов.

Отметим, что при фиксированных шагах сетки счет в координатах  $x$  и  $\phi$  более экономичен, чем при использовании эйлеровых координат из-за наличия связей  $\Delta x_E = h\sqrt{\tau}/\rho$ ,  $\Delta t = 2\tau\sqrt{\tau}$ .

Число пространственных точек сетки, приходящихся на формирующийся пограничный слой, растущий по закону  $\sqrt{t}$ , будет примерно постоянным.

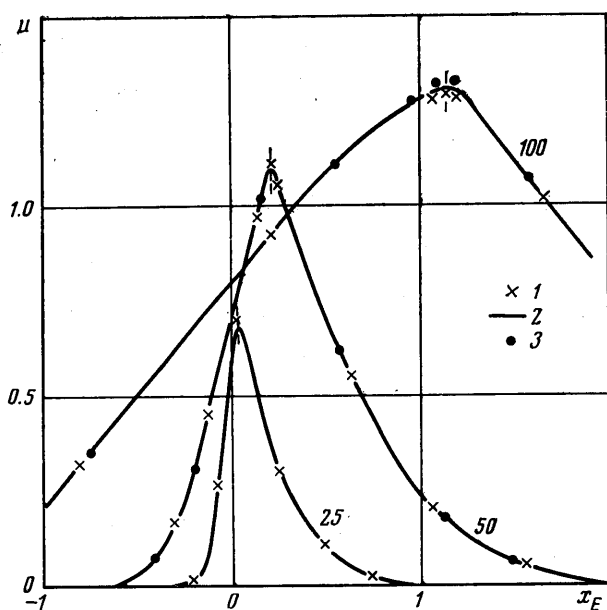
Разностные аналоги уравнений количества движения, непрерывности и энергии на каждом слое по времени решаются последовательно с помощью метода прогонки. Получающиеся решения имеют осциллирующий характер, для подавления осцилляций проводилось неявное сглаживание по формуле

$$f_i = \varepsilon f_{i-1}^0 + (1-2\varepsilon) f_i^0 + \varepsilon f_{i+1}^0$$

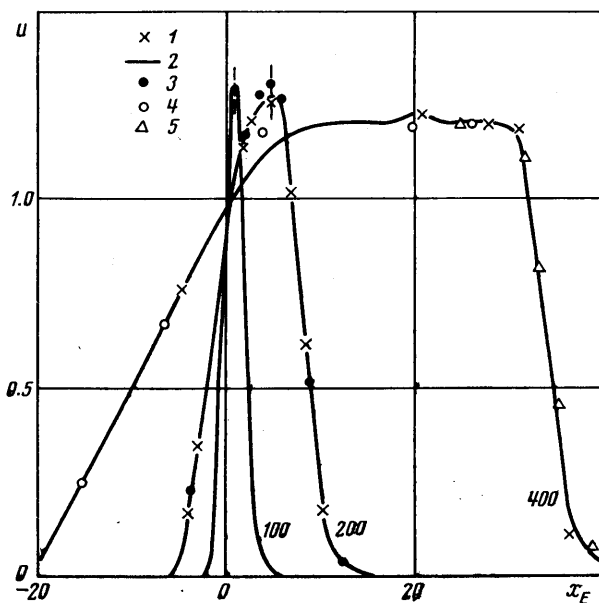
Здесь  $\varepsilon$  — коэффициент сглаживания. Сглаженные величины на каждом слое по времени находились из решения систем алгебраических уравнений методом прогонки. Величина  $\varepsilon$  определялась путем численного эксперимента и сравнения результатов с имеющимися асимптотическими решениями [3, 6, 7] (как правило,  $\varepsilon=0.001$ ). При увеличении или уменьшении  $\varepsilon$  на порядок расхождение результатов оказывалось меньше 1%, осцилляции же во всех трех случаях подавлялись.

Шаг по  $\phi$  в расчетах задачи 1 брался равным 0.01, в задаче 2 — 0.05. Шаг по  $x$  равнялся как 0.1, так и 0.5, при этом результаты расчетов с различными шагами практически совпадали. При указанных шагах сетки разностная схема была устойчивой во всех рассмотренных примерах.

2. Для рассмотрения задачи 1 были проведены расчеты для начального перепада давления в диапазоне  $1 \div 100$ . На фиг. 1—4 приводятся профили скорости газа, давления и температуры для различных слоев по времени при начальном перепаде давления, равном 17 (номера слоев по  $\phi$  указаны на фигурах).



Фиг. 1



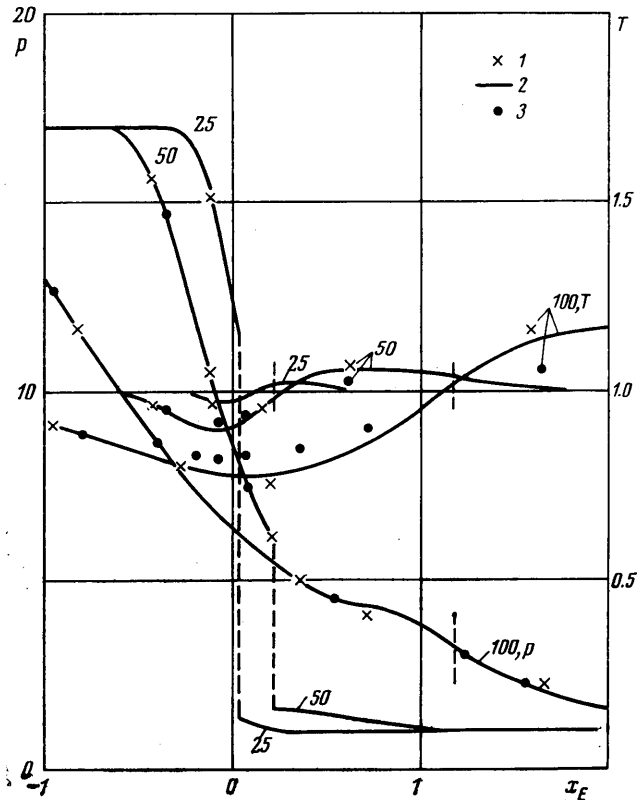
Фиг. 2

Считалось, что  $\mu=T$ ,  $R=1$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $P_r=0.4 \div 1.4$  (обозначения 1, 2, 3 соответствуют числам Прандтля 1.4, 1.0, 0.4).

На приведенных фигурах контактная поверхность отмечена вертикальным пунктиром, справа от нее формируется ударная волна, а слева — волна разрежения. Видно, что при достаточно малых временах ( $t < 1$ ) на контакт-

ной поверхности существует разрыв плотности и давления, аналогичный результат при  $t \rightarrow 0$  получен в [6] путем разложения уравнений Навье — Стокса в ряд по времени.

Во всех проведенных расчетах профиль скорости газа, достигнув максимальной высоты, затем уменьшаясь по высоте, стремится к профилю, даваемому элементарной теорией ударной трубы, не учитывающей эффекты диссипации [7]. Расчет по элементарной теории, проведенный для времени,



Фиг. 3

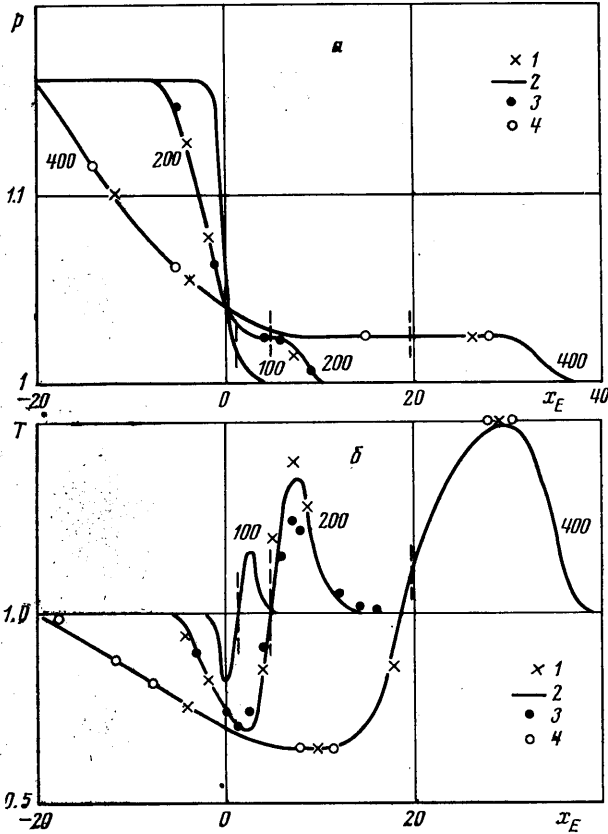
соответствующего слою 400, показан на фиг. 2, 4 цифрой 4. При достаточно больших временах (для начального перепада давления, равного 17 —  $t > 16$ ) значение скорости газа в области между ударной волной и волной разрежения близко к постоянному, как это следует и из элементарной теории ударной трубы. Вблизи контактной поверхности  $x=0$  имеется подрастание скорости газа, вызванное диссипативными процессами, что находится в соответствии с [2, 3].

Сравнение формирующейся ударной волны с имеющимися точными решениями стационарных уравнений Навье — Стокса [8, 9] показывает, что стационарная структура ударной волны в приведенном примере образуется при  $t \sim 16$ , когда ударная волна проходит несколько десятков длин свободного пробега молекул (длина свободного пробега определяется по параметрам газа при  $x = +\infty$ ). В проведенных расчетах получено уменьшение ширины ударной волны и увеличение ее крутизны с увеличением числа Рг, что соответствует результатам теории стационарной структуры ударной

волны [9, 10]. Решение Беккера для структуры ударной волны при  $Pr=1$  показано на фиг. 2 цифрой 5.

В рассматриваемой задаче область течения соизмерима с длиной свободного пробега молекул, возможность использования в этом случае уравнений Навье — Стокса для описания течения газа была показана на основе имеющихся экспериментальных и теоретических данных в [10].

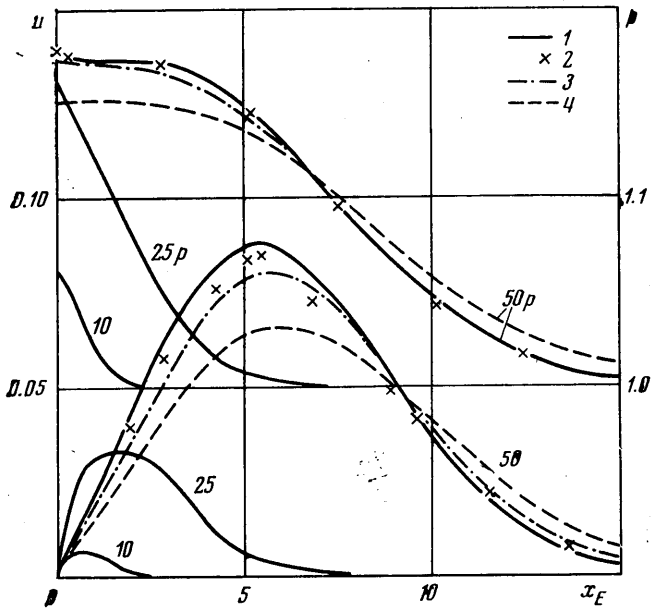
При рассмотрении задачи 2 величина теплового потока  $q_w=0\div 8$ ,  $\gamma=1.1\div 1.6$ ,  $Pr=0.5\div 1.0$ . Использовалась степенная зависимость коэффициента вязкости от температуры ( $\mu=T^n$ , где  $n=1/2, 1, 2$ ).



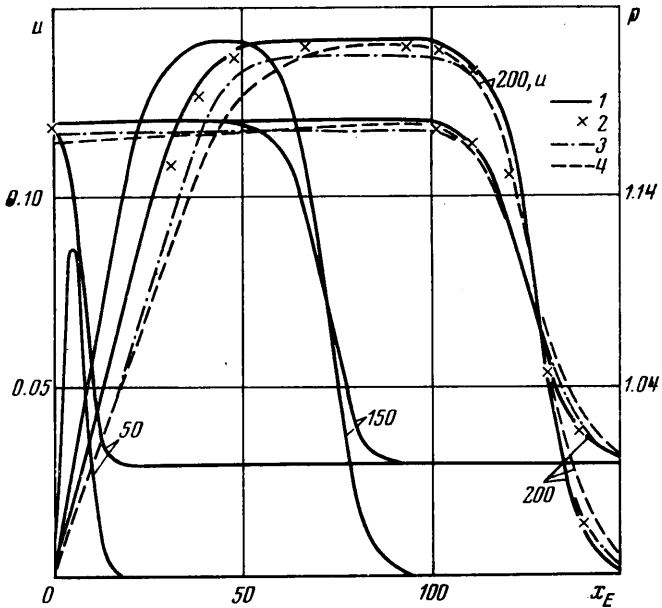
Фиг. 4

На фиг. 5, 6 приведены численные расчеты для случая  $q_w=0.56$ ,  $\gamma=1.4$ . Здесь 1 соответствует  $\mu=T^{1/2}$ ,  $Pr=1$ ; 2 —  $\mu=T$ ,  $Pr=1$ ; 3 —  $\mu=T^2$ ,  $Pr=1$ ; 4 —  $\mu=T$ ,  $Pr=0.5$ . Видно, что при  $t>30$ , когда область течения занимает  $\sim 50$  длин свободного пробега молекул, образуется стационарная структура ударной волны. За ударной волной формируется область постоянных параметров, граничащая слева с зоной пристеночного пограничного слоя. Значения параметров газа за ударной волной уже при  $t\geq 30$  близки к результатам, полученным из асимптотического решения [2].

Анализ решения показывает, что уменьшение числа  $Pr$  приводит к увеличению ширины ударной волны и пограничного слоя, при этом значения параметров газа за ударной волной для различных величин числа  $Pr$  различаются незначительно ( $<1.5\%$ ). Увеличение  $n$  в законе вязкости приводит к уменьшению температуры газа вблизи стенки за счет увеличения



Фиг. 5



Фиг. 6

отвода тепла в газ; влияние  $n$  на структуру ударной волны, как это видно из фигур, оказывается очень слабым.

В заключение автор благодарит Ю. А. Демьянова за научное руководство и всестороннюю помощь при выполнении работы.

Поступила 25 VII 1974

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Goldsworthy F. A.* The structure of a contact region, with application to the reflection of a shock from a heat - conducting wall. *Fluid Mech.*, 1959, vol. 5.
2. *Демьянов Ю. А.* О влиянии теплопроводности на формирование течений газа. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1967, № 2.
3. *Clarke J. F.* The reflection of a plane shock wave from a heat - conducting wall. *Proc. Roy. Soc.*, 1967, A 299, No. 1457.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* *Механика сплошных сред*. М., Гостехтеоретиздат, 1954.
5. *Полежаев В. И.* Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье - Стокса для сжимаемого газа. *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1966, № 6.
6. *Демьянов Ю. А., Куреев В. Т.* К анализу одномерных нестационарных течений газа с учетом теплопроводности и вязкости. *Изв. АН СССР, Механика*, 1965, № 2.
7. *Ударные трубы*. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Becker R.* Stosswelle und Detonation. *Z. Phys.*, 1922, Bd. 8, N 5.
9. *Bernard J. J.* Thickness of a steady shock wave. *J. Aeronaut. Sci.*, 1951, vol. 18, No. 3.
10. *Основы газовой динамики*. М., Изд-во иностр. лит., 1963.