

ЗАДАЧА О ПОРШНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЛН РЕКОМБИНАЦИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. БАРМИН, А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

(Москва)

Рассмотрена задача о выдвигании плоского поршня из полупространства, занятого однородным магнитным полем, параллельным поршню, и газом, проводимость которого σ зависит от температуры T , причем $\sigma=0$ при $T < T^*$.

Будет разыскиваться решение задачи при больших значениях времени, когда характерный линейный размер можно считать достаточно большим, так что в расширяющихся или неограниченных областях, где проводимость отлична от нуля и не стремится к нулю с течением времени, в уравнениях можно полагать $\sigma=\infty$.

Главным образом будем интересоваться решениями, содержащими фронты рекомбинации [1, 2]. Примеры подобных решений рассматривались в [1]. В этой работе было предположено, что могут существовать расширяющиеся области, в которых проводимость отлична от нуля и падает со временем. При этом джоулева диссипация поддерживает, несмотря на расширение газа, нужную температуру, которая остается близкой к T^* , причем $T - T^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Такие течения, которые были названы изотермическими, использовались там для построения решения задачи о поршне.

Ниже будет показано, что изотермические течения неустойчивы, и возмущения (которые не являются изотермическими) вырастают до конечных размеров за конечное время. Можно предположить, что развитие неустойчивости приводит к шнурованию, т. е. к образованию узких по сравнению с характерным линейным размером задачи слоев разогретого газа, через которые течет конечный ток. Протекание тока через такой слой вызовет дальнейшее разогревание газа, так что по прошествии некоторого времени проводимость возрастает, а ширина этого слоя может только увеличиться за счет теплопроводности. Вследствие этого собственное электрическое поле E' в таком слое можно будет считать равным нулю. Так как токовый слой не движется относительно газа, то в автомоделной задаче его можно считать расположенным на поршне.

Будут задаваться значения скорости поршня и магнитного поля на поршне. На плоскости этих переменных указаны автомоделные решения, которые могут установиться при больших значениях времени и соответствуют различным областям на этой плоскости. Существует область, в которой автомоделное решение не существует, и области, где оно двузначно.

1. Направим ось x по нормали к поршню и пусть при $t=0$ область $x > 0$ занята проводящим газом с постоянными плотностью $\rho = \rho_0$ и температурой $T = T_0 > T^*$. Будем считать, что магнитное поле направлено по оси y , а электрическое поле — по оси z . В момент времени $t=0$ поршень приобретает скорость V , которая затем остается постоянной. Так как поршень непроводящий, будем задавать на нем значение магнитного поля H_p , которое также будем считать не зависящим от времени. Так как при больших значениях времени в непрерывных течениях можно пренебрегать всеми диссипативными процессами, то задача становится автомоделной и все величины будут зависеть только от x/t . Условия на некоторых поверхностях разрыва могут зависеть от отношений диссипативных коэффициентов [2]. Для определенности эти соотношения будем брать в виде, соответствующем случаю, когда магнитная вязкость много больше остальных диссипативных коэффициентов.

Предположим для упрощения выражений для изменения величин, из которых состоит решение, что величины $T_0 - T^* = \Delta_0 T$, V , $H_0 - H_p = \Delta_0 H$

малые и что решение задачи может быть линеаризовано по этим параметрам (индекс 0 обозначает начальное состояние). Тогда шириной простых волн можно пренебрегать, а ударные волны будут отличаться от простых только знаком изменения плотности. Отметим, что в нелинейном случае, когда разность $T_0 - T^*$ не мала, все заключения о том, из каких волн может состоять решение задачи и о порядке их исследования, остаются в силе. Исключение составляют волны с изменением знака магнитного поля (см. п. 5), которые могут присутствовать в нелинейном решении.

Рассмотрим, какие волны может содержать решение задачи.

1. *Магнитогидродинамическая волна (простая или ударная)*. В этой волне изменения величин связаны соотношениями [3]

$$(1.1) \quad \Delta u = \frac{a_+}{\gamma-1} \frac{\Delta \Theta}{\Theta_0}, \quad \Delta H = \frac{H_0}{\gamma-1} \frac{\Delta \Theta}{\Theta_0}, \quad \Delta \rho = \rho_0 (\gamma-1) \frac{\Delta \Theta}{\Theta_0}, \quad \Theta = RT$$

$$a_+^2 = a_0^2 + a_A^2 = \gamma p_0 / \rho_0 + H_0^2 / 4\pi \rho_0 \quad (\Delta A = A - A_0)$$

2. *Волна рекомбинации*. На этой волне выполняются законы сохранения, а согласно дополнительному условию за ней $T = T^*$. Отсюда следуют соотношения:

$$(1.2) \quad \Delta u = \frac{W}{\gamma-1} \frac{\Delta \Theta^*}{\Theta_0},$$

$$\Delta H = \frac{1}{\gamma-1} \frac{W^2 - a_0^2}{a_A^2} \frac{\Delta \Theta^*}{\Theta_0}, \quad \Delta \Theta^* = \Theta^* - \Theta_0$$

Здесь W — скорость волны.

Условия эволюционности фронта рекомбинации накладывают одно из ограничений на его скорость

$$(1.3) \quad 0 < W \leq a_0, \quad a_+ \leq W$$

В этих неравенствах a_0 должно вычисляться по состоянию за фронтом рекомбинации, а a_+ — по состоянию перед ним. В случае выполнения первых неравенств (1.3) волну будем называть медленной, а при выполнении второго неравенства — быстрой.

Зависимость $\Delta u(W)$ и $\Delta H(W)$ при заданном $\Delta \Theta^*$ изображена на фиг. 1 (кривые 1 и 2). Пунктиром обозначены части кривых, соответствующие неэволюционным фронтам. Графики кончаются в точке W_m , при $W > W_m$ волна рекомбинации не существует, так как при заданных потоках массы импульса и энергии температура не может стать равной Θ^* или меньше.

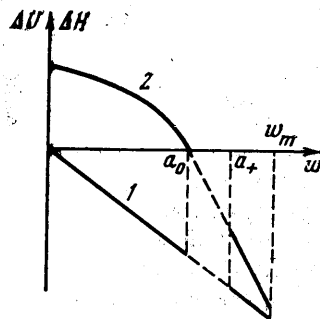
Нетрудно вычислить изменение в волне собственного электрического поля в частице

$$c \Delta E = \frac{\Delta \Theta^*}{\Theta_0 (\gamma-1)} \frac{a_+^2 - W^2}{a_A^2}$$

Так как перед волной E' равно нулю, а $\Delta \Theta^* < 0$, то за быстрой волной рекомбинации $E' > 0$, за медленной $E' < 0$.

3. *Газодинамическая волна*. В ней магнитное поле не меняется. Приращение скорости Δu в ней является свободным параметром и отрицательно в волне разрежения. В силу этого собственное электрическое поле в частице при прохождении через волну разрежения убывает ($\Delta c E' = H_0 \Delta u < 0$).

4. *Фронты ионизации* [4]. В рассматриваемом случае существует только быстрая ударная волна ионизации, на которой дополнительным соотношением является непрерывность магнитного поля: $\Delta H = 0$. В силу этого



Фиг. 1

изменение гидродинамических параметров происходит как в газодинамической ударной волне, при этом собственное электрическое поле в частице растет, обращаясь в нуль за волной, т. е. перед волной $E' < 0$. Фронт ионизации распространяется со сверхзвуковой скоростью, поэтому он мог бы следовать только за быстрой волной рекомбинации, за которой $E' > 0$. Поэтому фронт ионизации не может присутствовать в решении задачи.

5. *Разрывы с временной ионизацией* [5]. В этих разрывах меняется магнитное поле, а перед и за ними газ непроводящий. Скорость газа относительно таких разрывов может быть либо сверхзвуковая впереди и дозвуковая сзади (сверхзвуковая волна), либо дозвуковая с обеих сторон (дозвуковая волна). Дополнительным соотношением является условие $T = T^*$, которое для сверхзвуковой волны выполняется за волной, а для дозвуковой волны как перед, так и за волной. Из структуры волны можно заключить, что если перед волной собственное электрическое поле в частице $E' > 0$, то в такой волне магнитное поле меняет знак и, таким образом, изменение магнитного поля не является малым. Если $E' < 0$, то дозвуковая волна с временной ионизацией невозможна.

Волна с временной ионизацией должна следовать за волной рекомбинации. Действительно, как следует из дальнейшего, единственной движущейся по непроводящему газу волной является газодинамическая волна. Но газодинамическая волна не может идти перед сверхзвуковой волной с временной ионизацией из-за соотношений между скоростями их распространения. Перед дозвуковой волной с временной ионизацией газодинамическая волна не может идти, так как за ней температура отличается от T^* .

Так как за быстрой волной рекомбинации $E' > 0$, то в рассматриваемом случае, согласно предыдущему, малого изменения магнитного поля волны с временной ионизацией быть не может. За медленной волной рекомбинации $E' < 0$, поэтому дозвуковая волна с временной ионизацией отсутствует, а сверхзвуковая не может следовать за медленной волной рекомбинации вследствие соотношения между скоростями их распространения.

6. *Изотермические волны разрежения*. Как было упомянуто выше, в работе [1] была предложена модель процесса расширения газа, сопровождающегося стремлением к нулю проводимости среды. Были указаны решения в виде простых волн. В автомодельном случае в этих решениях все величины, входящие в уравнения, и в частности скорость, плотность, магнитное поле и собственное электрическое поле в частице, зависят от x/t . Температура остается всюду близкой к T^* , для чего необходимо, чтобы Джоулева диссипация, равная $\sigma(T)E'^2$, компенсировала бы падение температуры, которое вызвано расширением. Так как дивергенция скорости на характеристике простой волны падает со временем как $1/t$, то и $\sigma(T)$ также ведет себя как $1/t$. Магнитное число Рейнольдса, вычисленное по ширине волны как линейному размеру, остается постоянным во времени.

Покажем, что такое течение неустойчиво. Даже если предполагать, что величина начальных возмущений температуры и других величин на первой характеристике простой волны уменьшается со временем, но так что величина $\Delta\sigma/\sigma$ ($\Delta\sigma$ возмущение проводимости) не стремится при этом к нулю, то возмущения на последней характеристике простой волны будут неограниченно расти со временем.

Рассмотрим возмущения, длина волн которых достаточно мала по сравнению с шириной простой волны, так что можно считать магнитное число Рейнольдса, вычисленное по длине волны, малым и можно пренебречь изменениями величин в простой волне возмущения. Вместе с тем длину волны будем считать достаточно большой, чтобы пренебречь эффектами теплопроводности и вязкости. Тогда для энтропийных волн можно считать возмущение магнитного поля, давления и E' рав-

ными нулю. При этом уравнение притока тепла для частицы газа примет вид

$$(1.4) \quad \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \frac{d \ln T}{dt} = \frac{dp}{dt} + \sigma(T) E'^2$$

В этом уравнении p, E' должны быть взяты из автомодельного решения и будут считаться известными функциями t/t_0 , где t_0 — время прихода первой характеристики простой волны к рассматриваемой частице. Заменой переменных приведем уравнение (1.4) к виду

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= t_0 \sigma(\phi) - f(\tau) \\ \tau &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \int_p \frac{E'^2}{p} d \frac{t}{t_0}, \quad f(\tau) = - \frac{1}{E'^2} \frac{dp}{dt} \quad \phi = \ln T \end{aligned}$$

В простой волне τ монотонно растет от первой характеристики к последней, изменяясь в конечных пределах.

Найдем ограничение, которое нужно наложить на величину возмущений на первой характеристике простой волны, чтобы величина возмущений на последней характеристике не росла со временем.

Для оценки роста величины возмущения проводимости введем в уравнение (1.5) новую переменную $\varphi = t_0 \sigma(\phi)$. Как будет показано, возмущения φ пропорциональны $\Delta\sigma$. Из (1.5) имеем

$$(1.6) \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\sigma\sigma'}{\sigma} \varphi(\varphi - f) \equiv F(\varphi, t_0)$$

Так как должен существовать

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\phi} (\sigma\sigma')^{-1} d\sigma = \theta - \theta^*$$

то $\phi\sigma' < C_1/\sigma$, где C_1 — любая положительная постоянная. Следовательно, $\sigma\phi\sigma' \rightarrow 0$ при любом заданном ϕ и $t_0 \rightarrow \infty$. Для любого фиксированного интервала значений φ , не содержащего $\varphi = 0$, можно написать мажорирующее уравнение, правая часть которого удовлетворяет неравенствам

$$(1.7) \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = C(t_0) (\varphi - f) \equiv \Phi(\varphi, t_0)$$

$$(1.8) \quad \Phi(\varphi) < F(\varphi) \quad (\varphi > f), \quad \Phi(\varphi) > F(\varphi) \quad (\varphi < f)$$

Из предыдущего следует, что $C'(t_0)$ можно выбирать так, что $C(t_0) \rightarrow \infty$ при $t_0 \rightarrow \infty$. Около изоклины $\varphi = f(\tau)$ уравнений (1.6) и (1.7) можно выделить полосу шириной 2ε , в которую при уменьшении τ входят интегральные кривые этих уравнений. Для этого достаточно взять $\varepsilon = \max_{\tau} f_{\tau}'/C(t_0)$. При этом $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t_0 \rightarrow \infty$. Выделим некоторые

решения $\varphi_0(\tau)$ и $\varphi_1(\tau)$ уравнений (1.6) и (1.7) соответственно, лежащие в этой полосе при всех рассматриваемых τ . Решение $\varphi_0(\tau)$ будем считать невозмущенным и устойчивость его будем рассматривать. Для $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1$ получим

$$(1.9) \quad \frac{d\Delta\varphi}{d\tau} = C(t_0)\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = A e^{C(t_0)\tau}$$

Если задаться на последней характеристике величиной $\Delta\varphi$, то при уменьшении τ на $\Delta\tau = C^{-1}(t_0) \ln(\Delta\varphi/\varepsilon)$ величина $|\Delta\varphi|$ становится меньше ε . При этом очевидно, что решение уравнения (1.7) будет отличаться от $\varphi_0(\tau)$ на величину меньше 3ε . В силу неравенств (1.8) решение точного уравнения (1.6) будет отличаться от $\varphi_0(\tau)$ на 3ε при меньшем $|\Delta\tau|$. При выбранном ранее ε величина $\Delta\tau$ стремится к нулю с ростом t_0 , как $C^{-1}(t_0) \ln C(t_0)$.

Таким образом, если требовать ограниченности возмущений φ на последней характеристике, то на первой характеристике необходимо, чтобы возмущения φ стремились к нулю при $t \rightarrow \infty$ по крайней мере, как $1/C(t_0)$. Если же величина возмущений φ на первой характеристике не стремится к нулю, то возмущения будут расти очень быстро с увеличением τ .

Исключим t_0 из выражения для φ . Из определения φ имеем

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{\sigma(\varphi_0)} \approx \frac{f(\tau)}{\sigma(\varphi_0)}, \quad \varphi = t_0 \Delta\sigma \approx \frac{f(\tau)\Delta\sigma}{\sigma(\varphi_0)}$$

Так как $f(\tau)$ конечно, возмущения $\Delta\varphi$ пропорциональны $\Delta\sigma/\sigma$.

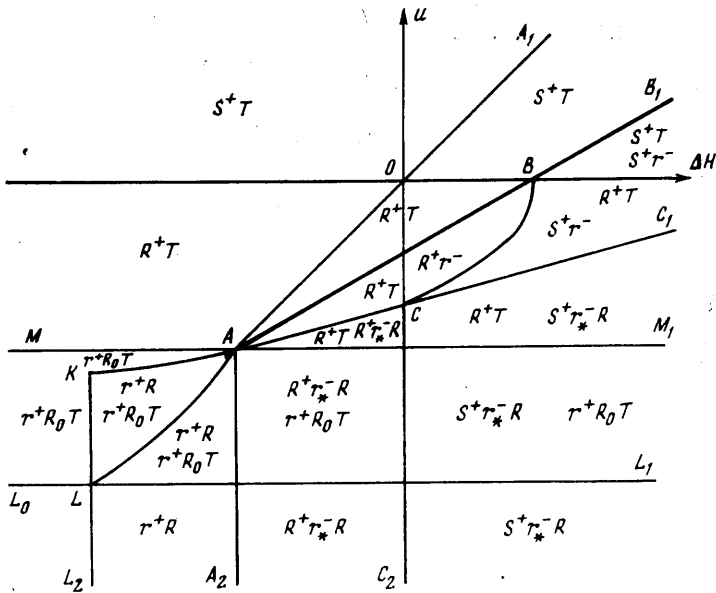
В силу доказанной выше неустойчивости будем считать, что изотермические течения не могут присутствовать в решении задачи.

7. *Токовый слой.* Согласно сказанному выше, будем считать его расположенным на поршне, E' в нем равным нулю, а изменение магнитного поля произвольным.

Таким образом, в решение задачи могут входить МГД волна, волна рекомбинации, газодинамическая волна разрежения и токовый слой.

2. Используя перечисленные свойства элементов решения, перейдем аналогично [6] к построению решения поставленной выше задачи о поршне при различных значениях скорости поршня и магнитного поля на нем.

Рассмотрим плоскость $u\Delta H$ (фиг. 2). Невозмущенному состоянию перед поршнем соответствует начало координат. Если по этому состоянию рас-



Фиг. 2

пространяется МГД волна разрежения или ударная, то состоянию за ней соответствует некоторая точка отрезков прямой OA или OA_1 . Точке A соответствует МГД волна разрежения, за которой $T=T^*$. Если $u > u(A)$, то для любых u и ΔH существует решение задачи, состоящее из МГД волны ударной или разрежения и токового слоя, прилегающего к поршню. На фиг. 2 в областях, где существуют указанные решения, поставлены символы S^+T и R^+T (S^+ и R^+ обозначают соответственно МГД ударную волну и волну разрежения, T — токовый слой).

За МГД волной может следовать медленная волна рекомбинации. Если интенсивность МГД волны равна нулю, то из графиков фиг. 1, выражающих изменение величин в волнах рекомбинации, следует, что состояниям за фронтом рекомбинации соответствуют точки кривой BC . Точка B соот-

ветствует фронту рекомбинации, скорость которого равна нулю, точка C — фронту рекомбинации, за которым скорость равна a_0 (будем говорить в этом случае, что эта — волна рекомбинации Жуге).

Пользуясь равенствами (1.1) и (1.2), найдем координаты точек A , B и C .

$$A: \quad \Delta u = \frac{a_+ \Delta \Theta^*}{\gamma - 1 \Theta_0}, \quad \Delta H = H_0 \frac{\Delta \Theta^*}{(\gamma - 1) \Theta_0};$$

$$B: \quad u = 0, \quad \Delta H = - \frac{\gamma H_0 \Delta \Theta^*}{\gamma - 1 a_A^2}$$

$$C: \quad u = \frac{a_0 \Delta \Theta^*}{\gamma - 1 \Theta_0}, \quad \Delta H = 0$$

Из этих выражений следует, что $u(C) > u(A)$ и что наклон прямой AB больше наклона прямой AC . Любой точке угла B_1AC_1 соответствует решение, состоящее из МГД волны и медленной волны рекомбинации, которую будем обозначать r^- . Линия BC разделяет решения S^+r^- и R^+r^- . Таким образом, в углу B_1AC_1 существуют два решения, одно из которых содержит токовый слой, а второе — медленную волну рекомбинации. На линии AB , эти решения совпадают.

За медленной волной рекомбинации Жуге (r_*^-) может следовать газодинамическая волна разрежения (R), в которой $\Delta H = 0$. Поэтому состоянию за волной разрежения в таком решении соответствуют точки отрезков вертикальных прямых, начинающиеся на прямой AC_1 , например, решениям r_*^-R отвечает отрезок CC_2 . Таким образом, любой точке угла A_2AC_1 соответствует решение, состоящее из МГД волны, медленной волны рекомбинации Жуге и газодинамической волны разрежения, при этом для $\Delta H > 0$ МГД волна ударная, для $\Delta H < 0$ — волна разрежения. В газодинамической волне возможно разрежение до вакуума. За медленной волной рекомбинации $E' < 0$, а в газодинамической волне разрежения E' убывает, поэтому токовый слой на поршне ($E' = 0$) в решениях с медленной волной рекомбинации отсутствует.

По начальному состоянию может распространяться быстрая волна рекомбинации. Из соотношений (1.2) следует, что состояниям за этой волной отвечают точки кривой AK , при этом точка K соответствует волне рекомбинации максимальной интенсивности. Точке A отвечает серия решений, состоящих из МГД волны разрежения и следующей непосредственно за ней быстрой волны рекомбинации, перед которой $W = a_+$ (волна Жуге). Действительно, полагая в (1.2) $W = a_+$, получим соотношения (1.1), т. е. величины в волне рекомбинации Жуге изменяются так же, как в МГД волне разрежения. Таким образом, за МГД волной разрежения любой интенсивности может следовать быстрая волна рекомбинации Жуге, состояние за которой в силу $\Delta \Theta_1 = \Delta \Theta^*$ будет соответствовать точке A . В нелинейном случае этим решениям будет соответствовать некоторая кривая, связывающая кривые, отвечающие решениям r^+ и R^+ .

За быстрой волной рекомбинации может следовать газодинамическая волна разрежения ($\Delta H = 0$), так что решение r^+R будет иметь место, когда ΔH и u принадлежат области A_2AKL_2 .

Как указывалось выше, за быстрой волной рекомбинации $E' > 0$, а в газодинамической волне разрежения E' убывает, поэтому при любой интенсивности r^+ существует такая волна разрежения R_0 , что за ней $E' = 0$. Решению r^+R_0 соответствует на фиг. 2 линия AL . При наличии этой комбинации на поршне может образоваться токовый слой. Отсюда любой точке полосы

$u(L) < u < u(A)$ отвечает решение с токовым слоем r^+R_0T . При подходе к AL решения r^+R и r^+R_0T совпадают.

Таким образом, на плоскости $u\Delta H$ построены области, соответствующие всем устойчивым типам автомодельных решений задачи о поршне. Однако при этом для значений скорости и магнитного поля на поршне, лежащих в области L_0LL_2 , автомодельное решение не существует. Для остальных пар значений $u\Delta H$ решения построены и отмечены на фиг. 2. При этом в областях B_1AM_1 и M_1AKLL_1 существуют по два автомодельных решения, совпадающих соответственно на линиях AB_1 и AL .

Поступила 1 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Butler D. S. One-dimensional flow in an ionizing gas. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23. No. 1.
2. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле Гидромеханика, 1970, т. 5. Итого науки. М., ВИНТИ АН СССР, 1971.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизирующих газ. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 1.
5. Жилин Ю. Л. Основные соотношения на сильной стационарной ударной волне, вызывающей скачок производительности. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
6. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Изменение скорости газа в ионизирующих ударных волнах. Задача о проводящем поршне. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.