

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ НАГРУЗКИ ПРИ ДИФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

В. Н. ЛЯХОВ

(Москва)

Целью работы является анализ нелинейного процесса отражения плоской ударной волны от цилиндра или сферы. В отличие от [1], где использован метод С. К. Годунова первого порядка точности, решение проводится с помощью явной разностной схемы второго порядка точности [2, 3]. Приведены кривые распределения давления по поверхности и дано сравнение с результатами экспериментов и теории регулярно-го (I) и маховского (II) отражений [4], предполагающей прямолинейность скачков и перпендикулярность маховской волны к поверхности отражения. Приводится формула, описывающая максимальное давление отражения на поверхности тела. Результаты расчетов дополняют известные сведения об особенностях процесса отражения, полученные экспериментально и теоретически.

1. При дифракции ударной волны можно выделить в потоке область A с доминирующим влиянием процесса отражения и течение перед телом (область B), в которой главную роль играют параметры спутного потока, обтекающего тело. Схема отражения в области A зависит от угла S , который образован фронтом волны и касательной к поверхности в точке пересечения линии фронта с контуром тела. В случае криволинейной поверхности неизвестна величина критического угла S_* , определяющего регулярное ($S < S_*$, положение i_1 на фиг. 1 [5]) или маховское ($S > S_*$, положение i_2) взаимодействие. При отражении от плоскости теория I дает точное значение критического угла S_I , а из теории II следует, что в диапазоне углов $S_{II} \leq S \leq 90^\circ$ существует решение для трехударной конфигурации, возникающей при нерегулярном отражении. Угол S_{II} соответствует стационарной маховской конфигурации, причём $S_{II} < S_I$. При отражении от клина ударной волны с числом Маха фронта $M_\Phi \sim 1.05-2.4$ экспериментально получено [6], что $S_* \sim S_I + 2^\circ$, а в численном решении [7] ($M_\Phi = 3$) регулярное отражение наблюдалось при $S \leq S_I$, маховское — при $S \geq S_I + 2^\circ$. Подобная информация отсутствует для криволинейной геометрии тела, поэтому представляется интерес оценка аналогичного диапазона для величины угла S_* .

Не полностью решен вопрос и о величине давления отражения на криволинейной поверхности. В работе [7] получено, что при регулярном взаимодействии максимальное давление p_m в области A достигается в точке отражения волны и величина p_m близка к значению давления отражения P_I , определенного по теории I, из которой следует, что зависимость $P_I(S)$ немонотонна. При углах S , близких к критическому, для несильных волн возможно $P_I \geq P_0$, где $P_0 = P_I(0)$ — величина давления на стенке после нормального отражения от нее волны [4]. Решение с такой же возрастающей ветвью $p_m(S)$ получено в работе [7]. При нерегулярном отражении давление сначала повышается во фронте маховской волны до значения, близкого к величине P_{II} (теория II), затем, для определенных значений M_Φ , происходит дополнительный подъем до максимального давления p_m в районе точки пересечения линии контактного разрыва с поверхностью клина (эксперимент [8, 9], решение [7, 10]). На фиг. 1 штрихпунктиром изображена траектория точки пересечения невозмущенного фронта с отраженной и маховской волнами, между которыми расположен контактный разрыв, отделяющий области с различной энтропией. Для слабых волн давление в области A максимально на фронте маховской волны $p_m \sim P_{II}$. Далее по поверхности в области B величина давления выходит на уровень, определяемый процессом обтекания. В работах [7, 9, 10] объясняется и оценивается величина дополнительного подъема давления до p_m .

В диапазоне углов $90^\circ < S < 180^\circ$ маховская волна изгибается и по нормали подходит к поверхности тела (положение i_3 , фиг. 1). Через некоторое время после взаимодействия устанавливается стационарное обтекание, определяемое числом Маха $M_2 = U_2/a_2$ спутного потока 2 (индекс 2 относится к параметрам за ударной волной). При значениях $M_2 > 1$ образуется отходящая волна, изображенная на фиг. 1 пунктиром.

Перечисленные особенности процесса отражения являются предметом изучения в данной работе.

2. Решение задачи строится в сферической системе координат с введением переменной $N=1-R/r$, где r — радиальная координата, $R=R(S, t)$ — функция, описывающая поверхность тела, в общем случае зависящая от угловой координаты S и времени t (фиг. 1). Преобразование вдоль r облегчает задание произвольной формы поверхности $R(S, t)$ и увеличивает точность решения, сгущая сетку около тела.

Система уравнений газовой динамики невязкого и нетеплопроводного движения в переменных S и N имеет следующий вид:

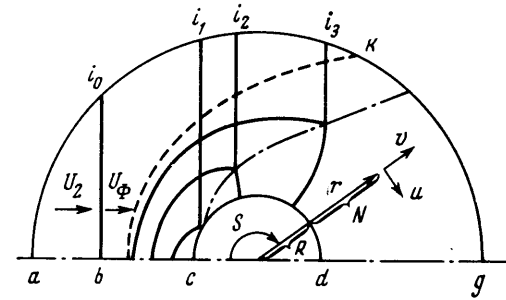
$$(2.1) \quad \frac{\partial \mathbf{f}r}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial S} + (1-N) \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial N} - \frac{1}{R} \left(R_s \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial N} + R_t \frac{\partial \mathbf{f}r}{\partial N} \right) \right] + \mathbf{C} = 0$$

$$\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \rho(h+v) \\ \rho u(h+2v) \\ \rho v(h+v-u^2/v) \\ (e+p)(h+v) \end{vmatrix}$$

$$R_s = \partial R / \partial S, \quad R_t = \partial R / \partial t, \quad h = \omega(v + u/\operatorname{tg} S).$$

Здесь $\omega=0$ или $\omega=1$ соответственно для цилиндрической или сферической геометрии, p и ρ — давление и плотность, отнесенные к P_1 и ρ_1 . Индексом 1 помечены параметры невозмущенной среды перед ударной волной. Проекции вектора скорости u и v на координаты S и N отнесены к $\sqrt{P_1/\rho_1}$. Система уравнений (2.1) замыкается выражением для полной удельной энергии идеального газа $e = p/(\gamma-1) + \rho(u^2+v^2)/2$.

Симметрия задачи позволяет рассматривать пространство $0^\circ \leq S \leq 180^\circ$. Внешняя граница akg располагается на конечном, достаточно большом расстоянии от тела.

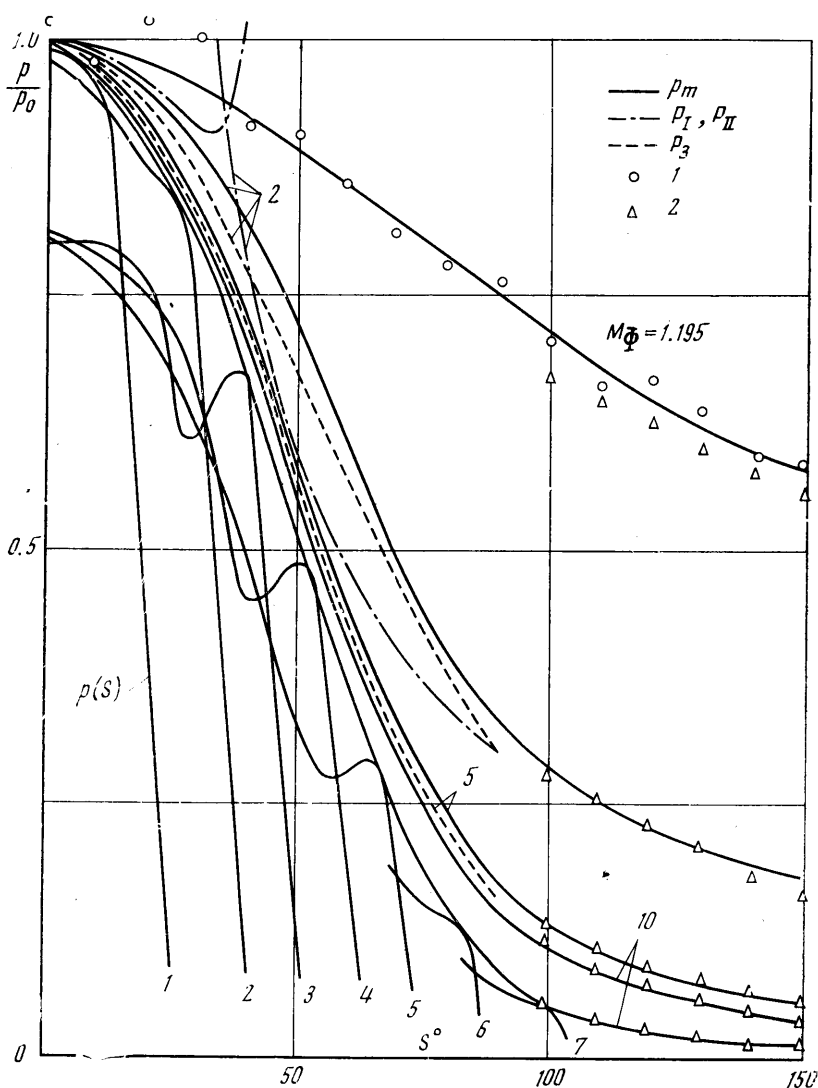


Фиг. 1

В начальный момент времени в области abi_0 задаются параметры за ударной волной ($\mathbf{f}=\mathbf{f}_2$), в остальной области — параметры невозмущенной среды ($\mathbf{f}=\mathbf{f}_1$).

На оси симметрии $(ac, dg)u = \partial \rho / \partial S = \partial v / \partial S = \partial e / \partial S = 0$. Это условие реализуется введением фиктивных узлов сетки вне расчетной области, в которые переносятся значения функций из симметричных относительно оси внутренних точек, причем у нормальной к границе составляющей вектора скорости u меняется знак. Аналогичная процедура зеркального переноса применяется на поверхности тела, причем если поверхность деформируется и перемещается, то перенос параметров производится по нормали к элементу поверхности с учетом его скорости. На внешней границе akg задаются параметры \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 в зависимости от положения фронта волны, перемещающегося со скоростью $U_\Phi = M_\Phi \cdot a_1$. При достижении образующейся головной волной внешней границы по контуру kg задаются условия $\partial \mathbf{f} / \partial N = 0$, на ak остается $\mathbf{f}=\mathbf{f}_2$.

Рассматриваемая краевая задача определяется безразмерными параметрами M_Φ, γ, ω .



Фиг. 2

Интегрирование системы (2.1) осуществляется методом сквозного счета без выделения в поле течения газодинамических разрывов. Последние проявляются в виде узких переходных зон, шириной в 2–3 сеточных интервала с сильными градиентами параметров потока. Вместо искусственной вязкости используется оператор сглаживания [11] с включением диагональных разностей, которые необходимы при косом отражении ударной волны от твердой поверхности. Указанный оператор вносит ошибку третьего порядка малости на гладких решениях, следовательно, порядок аппроксимации уравнений остается вторым. Постоянный коэффициент в операторе сглаживания подбирается таким, чтобы в критической точке для максимального давления выполнялось условие $p_m = P_0$.

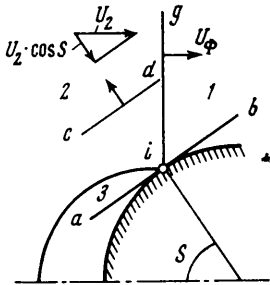
Использование системы уравнений газовой динамики в виде (2.1) позволяет проводить расчеты задачи дифракции ударной волны на телах различной формы, поверхность которых описывается функцией $R(S, t)$

[10, 12]. В настоящей работе приведены примеры расчетов для недеформируемой оболочки при $R(S, t) = r_0 = \text{const}$, выполненные с $\gamma = 1.4$ (кроме одной кривой на фиг. 2).

3. Описанный в п. 1 и [7] характер отражения ударной волны от клина качественно такой же в случае взаимодействия с цилиндром или сферой. При маховском отражении давление сначала повышается от P_1 до $p \sim P_{II}$, затем следует дополнительный подъем до p_m и далее, после небольшого понижения, давление выходит на уровень, определяемый обтеканием тела потоком 2. Однако если в работе [7] удается получить за фронтом маховской волны «полку» для зависимости $p(S)$ со значением, близким к P_{II} , то в настоящих расчетах (фиг. 2, сплошные кривые 1–7, $M_\Phi = 10$, $\gamma = 1.15$) наблюдается непрерывный подъем от P_1 до p_m , обусловленный меньшей точностью решения для сферы или цилиндра.

Высокая точность результатов [7] была достигнута введением автомодельных переменных $\xi = x/U_\Phi t$, $\eta = y/U_\Phi t$, $\tau = \ln t$ и получением решения методом установления вдоль τ . Если искать нестационарное решение в переменных x, y, t , то даже в случае дифракции ударной волны на клине указанная «полка» может остаться незамеченной. Это объясняется тем, что в начальные моменты взаимодействия размеры области возмущенного течения соизмеримы с шириной переходных зон, характеризующих скачки уплотнений, и во время прохождения ударной волной расчетной области структура скачков проявляется менее четко, чем в решении методом установления.

На фиг. 2 сплошными монотонными линиями изображены зависимости максимального давления отражения $p_m(S)$ для различных чисел Маха M_Φ (значения M_Φ нанесены около кривых). При этом $\omega = 0$ для $M_\Phi = 1.195$ и 5,



Фиг. 3

$\omega = 1$ для $M_\Phi = 2$ и 10. Нижняя монотонная кривая ($M_\Phi = 10$) построена при $\gamma = 1.15$, для остальных — $\gamma = 1.4$. Эти кривые проведены как огибающие мгновенных распределений давления $p(S)$ по поверхности в различные моменты времени. В качестве примера серия таких кривых для $M_\Phi = 10$ и $\gamma = 1.15$ изображена сплошными линиями, помеченными цифрами 1–7, для моментов времени $tU_\Phi/r_0 = 0.22, 0.31, 0.42, 0.46, 0.81, 0.99, 1.36$ соответственно. Экспериментальные данные работы [13] ($M_\Phi = 1.195, P_2/P_1 = 1.5$) нанесены значками 1. Следует отметить, что возрастающая ветвь зависимости $P_1(S)$ при $S \rightarrow S_1$ не получена ни в численном решении, ни в эксперименте [13]. Для $M_\Phi = 2$ проведено сравнение с $P_I(S)$ и $P_{II}(S)$ — соответственно верхняя и нижняя штрихпунктирные кривые.

Пунктиром нанесены значения давления для $M_\Phi = 2$ и 5, полученные из следующих физических соображений. Отвлекаясь от сложной картины взаимодействия рассмотрим процесс натекания (фиг. 3) потока 2, увлекаемого ударной волной gi , на бесконечную плоскость ab , касательную к поверхности тела в точке взаимодействия (i). Это явление можно интерпретировать как движение плоского поршня ab со скоростью $U_2 \cos S$ по среде 2. Найдем давление P_3 на поверхности поршня, используя условие непротекания через ab (т. е. $U_3 = 0$) и соотношения на ударной волне gi и образующейся перед поршнем волне cd :

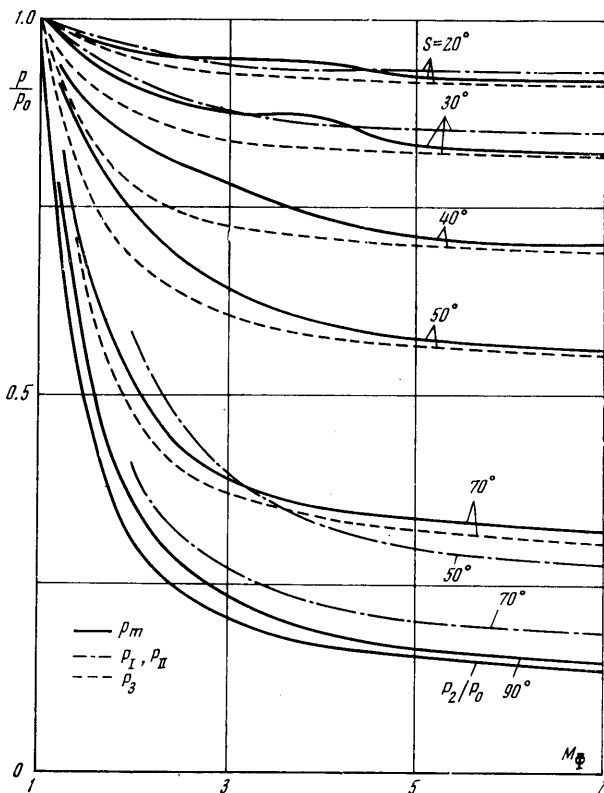
$$(3.1) \quad \frac{U_2 \cos S}{a_2} = \frac{P_{32} - 1}{\gamma \sqrt{(P_{32} + \nu)/\mu}} \quad \frac{U_2}{a_1} = \frac{P_{21} - 1}{\gamma \sqrt{(P_{21} + \nu)/\mu}}$$

Здесь $P_{ij} = P_i/P_j$, $\mu = 2\gamma/(\gamma+1)$, $\nu = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, $P_{21} = \mu M_\Phi^2 - \nu$.

Исключая U_2 из (3.1) и подставляя $a_{21}^2 = P_{21}(\nu P_{21} + 1)/(P_{21} + \nu)$, получим

$$(3.2) \quad P_{32} = 1 + \frac{z}{2} + \sqrt{z \left(\mu + \frac{z}{4} \right)}, \quad z = \frac{(P_{21} - 1)^2 \cos^2 S}{P_{21}(\nu P_{21} + 1)}.$$

Перед радикалом в выражении для P_{32} выбран плюс, так как при $S=0$ получается $P_{32} = P_{02}$. Физический смысл рассмотренной схемы заключается в том, что определяется давление торможения через нестационарную отраженную волну потока газа, имеющего скорость, равную нормальной составляющей к поверхности полного вектора скорости. Из сравнения кри-



Фиг. 4

вых на фиг. 2 следует, что формула (3.2) тем лучше описывает максимальное давление отражения p_m , чем больше интенсивность падающей волны. Уровень давления p_m реализуется на стыке областей А и Б и определяется нелинейным наложением обоих процессов, а именно: обтеканием тела потоком 2 (Б) через нестационарную отраженную волну (А).

Рассмотрим вопрос о переходе регулярного отражения в маховское. На фиг. 2 штрихпунктирные кривые пересекаются при значении $S = S_{II}$ ($S_I \sim 40^\circ$). Легко видеть, что в диапазоне $0^\circ \leq S \leq 30^\circ$ кривые численного расчета и теории I близки друг к другу, однако далее они расходятся. Примечательно, что это происходит не только при $S \leq S_I$, но даже раньше, при $S \leq S_{II}$. Более убедительной причиной, нежели точность применяемого метода, представляется иной, чем в случае отражения от клина, механизм перехода регулярного отражения в маховское на криволинейной поверхности. Действительно, в специальных расчетах для цилиндра и сферы в

районе предполагаемой немонотонности $P_1(S)$ при $S \rightarrow S_I$ например, для $M_\Phi = 2$) имелось около восьми расчетных точек, хотя в аналогичных расчетах [7] для клина при регулярном отражении возрастающая ветвь зависимости $p_m(S)$ достигалась при наличии 3–4 узлов сетки в окрестности точки взаимодействия.

На основании проведенных расчетов трудно определить точную величину угла S_* , однако, можно предположить, что при отражении от цилиндра или сферы $S_* \approx S_{II}$. Возможно, маховское отражение начинается при углах $S \sim S_{II}$, а режим отражения с возрастающей ветвью максимального давления, определяемой теорией I, неустойчив на выпуклых поверхностях, хотя известно и такое решение [14].

Другая особенность, полученная в расчетах, заключается в слабой зависимости максимального давления отражения p_m от параметра ω . Например, для $M_\Phi = 2$ разница при отражении волны от сферы или цилиндра возрастает всего до 2%, когда угол падения S увеличивается от 0 до 70°.

Сравнение при $S > 90^\circ$ численного решения с экспериментальными данными [15] (значки 2 на фиг. 2) говорит о том, что давление отражения при $S > 90^\circ$ можно оценивать по эмпирической формуле [15] для значения числа Маха пристеночной части дифрагированной ударной волны $M = 1 + (M_\Phi - 1) \exp\{-A(S - \pi/2)^{3/2}\}$, где $A = 0.61, 0.68, 1.09$ соответственно для $\gamma = 1.66$ (Ar), $\gamma = 1.4$ (воздух, N_2), $\gamma = 1.15$ (Eg), откуда $p_m/P_1 = \mu M^2 - \nu$.

На фиг. 4 сплошными линиями представлены результаты численного решения, характеризующие $p_m(M_\Phi)$ при отражении от сферы в различных точках поверхности. Штрихпунктирными линиями показаны результаты теории I при $S = 20, 30^\circ$ и теории II при $S = 50, 70^\circ$, пунктирные кривые — значения давления по формуле (3.2).

Анализ результатов показывает, что, исключая окрестность критического угла падения $S_I \sim 40^\circ$, результаты теории I и формулы (3.2) близки к величинам максимального давления отражения, полученным в численных расчетах, причем разница уменьшается при увеличении M_Φ . Оценка (3.2) справедлива для различной геометрии тел, включая плоскость. Теория II дает значение первого подъема давления, которое ниже максимального на 70–100%.

Автор благодарен Ю. М. Липницкому за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 22 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Фонарев А. С., Колган В. П. Численный расчет дифракции ударной волны на сфере и цилиндре и установление стационарного обтекания. Тр. ЦАГИ, 1971, вып. 1324.
2. Каширский А. В., Коровин Ю. В., Чудов Л. А. Явный разностный метод для расчета двумерных нестационарных задач о движении продуктов детонации. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 19. М., Изд-во МГУ, 1972.
3. Балакин В. Б., Буланов В. В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке. Инж.-физ. ж., 1971, т. 21, № 6.
4. Аругюнян Г. М., Карчевский Л. В. Отраженные ударные волны. М., «Машиностроение», 1973.
5. Сыщикова М. П., Березкина М. К., Семенов А. Н. Формирование течения около модели в ударной трубе. В сб. «Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений». М. — Л., «Наука», 1967.
6. Бликней У., Тауб А. Взаимодействие ударных волн. Вопр. ракетн. техн., 1951, вып. 1.
7. Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н. Численное решение задачи дифракции ударной волны на клине. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.

¹ В работе [15] допущены неточности в написании формулы.

8. *Мерритт Д. Л.* Маховское отражение на конусе. *Ракетная техника и космонавтика*, 1968, т. 6, № 6.
9. *Gvozdeva L. G., Vazhenova T. V., Predvoditeleva O. A., Fokeev V. P.* Pressure and temperature at the wedge surface for Mach reflection of strong shock waves. *Astronautica Acta*, 1970, vol. 15, No. 5/6.
10. *Белошицкий А. В., Крикунов В. В., Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н.* Исследование различных газодинамических течений с помощью явных разностных схем сквозного счета. *Науч. тр. Ин-та механ. МГУ*, 1973, № 30.
11. *Ляхов В. Н.* Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 5, № 3. Новосибирск, 1974.
12. *Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н., Фельдштейн В. А.* Взаимодействие упругой оболочки с волной сильного разрыва в газе. Тезисы докл. 9-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Л., 1973.
13. *Голубинский А. И., Соколов К. Б.* Исследование распределения давления по поверхности плоских и цилиндрических тел при падении на них взрывной ударной волны. *Тр. ЦАГИ*, 1970, № 1298.
14. *Moran J. P., Moorhet W. K.* Diffraction of a plane shock by an analitic blunt body. *J. Fluid. Mech.*, 1969, vol. 38, pt 1.
15. *Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г., Комаров В. С., Сузов Б. Г.* Исследование дифракции сильных ударных волн на выпуклых углах. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1973, № 4.