

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВОЗМУЩЕНИЙ ЖИДКОСТИ В БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Ю. М. БЛИТШТЕЙН, М. Г. ХУБЛАРЯН

(Москва)

До недавнего времени почти все работы по неустановившемуся движению жидкости в трубопроводах были связаны с исследованием трубопроводов, деформирование которых подчинялось закону Гука. Режим течения в трубопроводах, материалы которых обладают вязкоупругими и релаксирующими свойствами, исследовался мало [1-3]. В связи с интенсивным внедрением в практику новых полимерных материалов исследование движения жидкости в трубопроводах из негукковского материала представляет определенный практический и теоретический интерес. Экспериментальному и теоретическому исследованию гидравлического удара с разрывом сплошности потока посвящена статья [4].

Ниже для описания процесса деформирования трубопровода, в котором распространяются волны возмущения упругой капельной жидкости, используется наследственно-упругая теория Больцмана — Вольтерра, достаточно хорошо описывающая прочностные свойства многих полимерных материалов и металлов [5-7]. Задача решается методами интегральных преобразований и разрывных волн.

1. Дифференциальные линеаризованные уравнения одномерного движения капельной жидкости в круглой трубе переменного сечения имеют вид [8]

$$-f_0 \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial t} + 2aM, \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

(1.1)

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{K} \right), \quad 2a = \frac{1}{4} (\lambda w R_0^{-1}), = \text{const}$$

Здесь $M = \rho w f$ — массовый расход; w , ρ , P — средние в сечении f скорость, плотность и давление; K — модуль упругости жидкости; ρ_0 — плотность жидкости при давлении P_0 ; λ — гидравлическое сопротивление; R_0 — радиус трубы.

Для рассматриваемых материалов общая реологическая связь между деформацией ε и напряжением σ описывается соотношением Вольтерра $\varepsilon = G^* \sigma$, где G^* — линейный интегральный оператор вида

$$(1.2) \quad G^* \sigma = G [\sigma(t) + v_\sigma \int_0^t G(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau]$$

Здесь G , v_σ , $G(t)$ — соответственно величина, обратная упругому модулю, дефект модуля и интегральное ядро ретардации, характеризующее наследственные свойства материала (память).

Ограничиваясь областью малых деформаций, для тонкостенной трубы толщиной δ , получим

$$f - f_0 = 2f_0 R_0 \delta^{-1} G^* (P - P_0)$$

При этом система линеаризованных уравнений относительно массового расхода M и давления P описывается следующим образом:

$$(1.3) \quad -f_0 \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial t} + 2aM$$

$$\rho_0 f_0 \left\{ \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2R_0}{\delta} G \frac{\partial P}{\partial t} \right\} = - \frac{\partial M}{\partial x}$$

2. Пусть $P=0$, $M=0$ при $t=0$, а при $x=0$ $P=\varphi(t)$, когда $t>0$. Тогда, используя преобразование Лапласа, с учетом начальных и граничных условий, можно получить следующие выражения для $m(x, s)$ и $p(x, s)$:

$$(2.1) \quad p = \varphi(s) \exp \left\{ -\sqrt{s(s+2a)[1+bc^2G(s)]} \frac{x}{c} \right\}$$

$$(2.2) \quad m = \frac{f_0 \varphi(s)}{c} \sqrt{\frac{s[1+bc^2G(s)]}{s+2a}} \exp \left\{ -\sqrt{s(s+2a)[1+bc^2G(s)]} \frac{x}{c} \right\}$$

$$(2.3) \quad \rho_0 c^2 = \frac{K\delta}{\delta+2R_0KG}, \quad b=2\nu_0 R_0 \delta^{-1} G \rho_0$$

Здесь c — скорость распространения звука в капельной упругой жидкости, b — некоторый параметр, учитывающий наследственные свойства материала трубы, G — величина, обратная упругому модулю.

Для нахождения оригиналов p и m необходимо задаться конкретным выбором реологической модели.

1. Модель Максвелла описывается ядром ретардации, равным α/ν_0 , где α — величина, обратная времени релаксации. При этом соотношения (2.2), (2.3) принимают вид

$$(2.4) \quad p = \varphi(s) \exp \left\{ -\sqrt{(s+2a)(s+2dc^2\alpha)} \frac{x}{c} \right\}$$

$$(2.5) \quad m = \frac{f_0 \varphi(s)}{c} \sqrt{\frac{s+2dc^2\alpha}{s+2a}} \exp \left\{ -\sqrt{(s+2a)(s+2dc^2\alpha)} \frac{x}{c} \right\}$$

$$(2.6) \quad \varphi(s) = P_0 s^{-1}, \quad d = b / 2\nu_0$$

т. е. предполагается, что в начальный момент времени в сечении $x=0$ начинает действовать постоянное давление P_0 . В противном случае при помощи свертки нетрудно перейти к искомым оригиналам.

В соответствии (2.4) и (2.5) $P(x, t)$ и $M(x, t)$ имеют следующий вид [9]

$$(2.7) \quad P = P_0 \left[e^{-\kappa x/c} + \frac{\eta x}{c} \int_{x/c}^t e^{-\kappa \tau} \frac{J_1(\eta \sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})}{\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}} d\tau \right] H \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$(2.8) \quad M = \frac{f_0 P_0}{c} \left[e^{-\kappa x/c} J_0 \left(\eta \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right) + 2dc^2 \int_{x/c}^t e^{-\kappa \tau} J_0 \left(\eta \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right) d\tau \right] H \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

Здесь J_0 и J_1 — бесселевы функции нулевого и первого порядка, а κ и η определены следующим образом:

$$(2.9) \quad \kappa = a + dc^2\alpha, \quad \eta = a - dc^2\alpha$$

Как и следовало ожидать, на фронте волны $t=x/c$ при наличии наследственных свойств материала трубопровода P и M затухают с расстоянием быстрее, чем в аналогичном процессе с трубопроводом из упругого материала ($d=0$)

$$(2.10) \quad P=P_0 \exp\left\{-\frac{(a+dc^2\alpha)x}{c}\right\}, \quad M=\frac{f_0 P_0}{c} \exp\left\{-\frac{(a+dc^2\alpha)x}{c}\right\}$$

2. Модель Фойгта характеризуется интегральным ядром следующего вида:

$$(2.11) \quad \frac{1}{v_0}[\alpha e^{-\alpha t} - \delta(t)] = G(t)$$

где $\delta(t)$ — δ -функция Дирака.

При этом соотношения (2.2) и (2.3) принимают вид

$$(2.12) \quad p = \frac{P_0}{s} \exp\left\{-\sqrt{\frac{s(s+2a)[s(1-2dc^2\alpha)+\alpha]}{s+\alpha}} \frac{x}{c}\right\}$$

(2.13)

$$m = \frac{f_0 P_0}{cs} \sqrt{\frac{s[s(1-dc^2\alpha)+\alpha]}{(s+2a)(s+\alpha)}} \exp\left\{-\sqrt{\frac{s(s+2a)[s(1-2dc^2\alpha)+\alpha]}{s+\alpha}} \frac{x}{c}\right\}$$

Контурное интегрирование (2.12) и (2.13) приводит к следующим соотношениям:

$$(2.14) \quad P(t, x) = P_0 \left[1 - \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\alpha \psi_p(t, x, s) ds + \int_{2a}^{\alpha/q} \psi_p(t, x, s) ds \right\} \right] H\left(t - \frac{xq^{1/2}}{c}\right)$$

$$\psi_p(t, x, s) = \frac{e^{-st}}{s} \sin \sqrt{\frac{s(s-2a)(\alpha-qs)}{s-\alpha}} \frac{x}{c}$$

$$M(t, x) = \frac{f_0 P_0}{\pi c} \left\{ \int_0^\alpha \psi_M(t, x, s) ds + \int_{2a}^{\alpha/q} \psi_M(t, x, s) ds \right\} H\left(t - \frac{xq^{1/2}}{c}\right)$$

$$\psi_M = (e^{-st} - e^{-2at}) \sqrt{\frac{\alpha-qs}{s(2a-s)(\alpha-s)}} \cos \sqrt{\frac{s(2a-s)(\alpha-qs)}{\alpha-s}} \frac{x}{c}$$

$$q = 1 - 2dc^2 = \frac{\delta}{\delta + 2R_0 KG} > 0, \quad 2a > \alpha$$

Если $\alpha > 2a$, то в пределах интегрирования следует поменять местами α и $2a$.

В отличие от предыдущей модели здесь фронт волновых возмущений жидкости распространяется не со скоростью звука, а со значительно большей скоростью, равной $sq^{-1/2}$, что является следствием сингулярности рассматриваемого ядра.

3. Модель стандартного линейного тела определяется экспоненциальным ядром $G(t) = re^{-\alpha t}$. Нетрудно убедиться в том, что в данном случае в соотношениях (2.14) и (2.15) следует положить $q=1$, также заменить значение α/q и α значением величины $\alpha + rbc^2$ в пределах интегрирования и в числителях подкоренных выражений соответственно. Здесь фронт волны возмущений распространяется со скоростью звука c и затухает с

ростом параметра b , учитывающего наследственные свойства материала.

3. Для анализа поведения рассматриваемого процесса на фронте распространяющейся волны и в окрестности этого фронта воспользуемся методом разрывных волн [10, 11].

Под ударной волной подразумевается однопараметрическое семейство ориентированных поверхностей Σ_i , на которых выполняются следующие условия [12].

1. Функции $P(x, t)$ и $M(x, t)$ претерпевают разрыв при переходе через поверхность.

2. Для любых фиксированных значений t и x функции $P(x, t)$ и $M(x, t)$ непрерывны в среднем по параметру τ с некоторым ядром $G(t, \tau)$.

Искомые давления $P(x, t)$ и массовый расход $M(x, t)$ можно представить в виде ряда Тейлора относительно времени прихода фронта волны [11]. Тогда, обозначая квадратными скобками величину разрывов при фиксированных значениях x и $t \geq x/c$, записываем

$$(3.1) \quad P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(t - \frac{x}{v} \right)^n \left[\frac{\partial^n P}{\partial t^n} \right],$$

$$M(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(t - \frac{x}{v} \right)^n \left[\frac{\partial^n M}{\partial t^n} \right]$$

Здесь v — скорость распространения ударной волны, совпадающая по значению со скоростью распространения звука при течении жидкости в упругом трубопроводе. В самом деле, с использованием кинематических условий совместности, которые для любой функции ψ на поверхности разрыва определены равенством [10]

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt}[\psi] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + v \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]$$

Равенства (1.3), записанные в разрывах, при учете гипотез определяющих ударную волну, преобразуются к виду

$$(3.3) \quad \frac{f_0}{v}[P] = [M], \quad \frac{f_0}{c^2}[P] = \frac{1}{v}[M]$$

Отсюда непосредственно следует, что $c = v$.

Выведем рекуррентные соотношения, из которых определяются значения разрывов производных n -го порядка относительно M и P . Для этого продифференцируем равенства (1.3) n -раз по времени с учетом гипотез относительно волны, запишем полученные соотношения в разрывах

$$(3.4) \quad -f_0 \left[\frac{\partial^{n+1} P}{\partial x \partial t} \right] = \left[\frac{\partial^{n+1} M}{\partial t^{n+1}} \right] + 2a \left[\frac{\partial^n M}{\partial t^n} \right]$$

$$- \frac{f_0}{v^2} \left[\frac{\partial^{n+1} P}{\partial t^{n+1}} \right] + f_0 b G(0) \left[\frac{\partial^n P}{\partial t^n} \right] - b f_0 \sum_{k=1}^n G^{(k)}(0) \left[\frac{\partial^{n-k} P}{\partial t^{n-k}} \right] = - \left[\frac{\partial^{n+1} M}{\partial x \partial t^n} \right]$$

Использование кинематических условий совместности (3.2) позволяет преобразовать соотношения (3.4) к следующему равенству:

$$(3.5) \quad -\frac{f_0}{v^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^n P}{\partial t^n} \right] - f_0 b G(0) \left[\frac{\partial^n P}{\partial t^n} \right] + f_0 b \sum_{k=1}^n G^{(k)}(0) \left[\frac{\partial^{n-1} P}{\partial t^{n-1}} \right] = \\ = \frac{2a}{v} \left[\frac{\partial^n M}{\partial t^n} \right] + \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^n M}{\partial t^n} \right]$$

Положив в первом из соотношений (3.4) вместо значения n значение $n-1$ и воспользовавшись кинематическими условиями совместности (3.2), получим связь между разрывами n -го и $n-1$ -го порядков искоемых функций P и M . При этом соотношение (3.5) представим в виде

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^n P}{\partial t^n} \right] + \mu \left[\frac{\partial^n P}{\partial t^n} \right] = \Omega_{n-1}$$

$$(3.7) \quad \Omega_{n-1} = \frac{bv^2}{2} \sum_{k=1}^n G^{(k)}(0) \left[\frac{\partial^{n-k} P}{\partial t^{n-k}} \right] + a \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^{n-1} P}{\partial t^{n-1}} \right] + \\ + \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial^{n-1} P}{\partial t^{n-1}} \right] + \frac{2d^2 v}{f_0} \left[\frac{\partial^{n-1} M}{\partial t^{n-1}} \right] + \frac{av}{f_0} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^{n-1} M}{\partial t^{n-1}} \right] \\ \mu = \frac{1}{2} [v^2 b G(0) + 2a]$$

Очевидно, что Ω_n содержит разрывы производных до $n-1$ -го порядка включительно. Таким образом, решение задачи сводится к рекуррентному процессу последовательного определения коэффициентов рядов (3.1) согласно формулам (3.5) и (3.6). Искомые коэффициенты разложения (3.1) являются решениями линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Начальные условия для разрывов производных функций $P(x, t)$ определяются из условия на границе $x=0$, точнее коэффициентами разложения функции $P(x, t)$ при $x=0$

$$(3.8) \quad P(x, t)|_{x=0} = \varphi(t) = \sum \frac{1}{n!} t^n \frac{\partial^n \varphi(0)}{\partial t^n}$$

Для определения разрывов производных функции $M(x, t)$ следует воспользоваться соотношениями (3.3) и (3.4).

Для примера выпишем по три коэффициента разложений (3.1), полагая при этом $n=0, 1, 2$ соответственно. При $n=0$ $\Omega_n=0$, вследствие чего получим из (3.6) и (3.5)

$$(3.9) \quad [P] = \varphi(0) e^{-\mu t}, \quad [M] = \frac{f_0 \varphi(0)}{v} e^{-\mu t}$$

$$(3.10) \quad [P^{(1)}] = \{\varphi^{(1)}(0) + A_1 t\} e^{-\mu t}, \quad [M^{(1)}] = \frac{f_0}{v} (B_1 + A_1 t) e^{-\mu t}$$

$$(3.11) \quad [P^{(2)}] = \frac{1}{2} \{2\varphi^{(2)}(0) + 2A_2 + A_3 t\} t e^{-\mu t}$$

$$[M^{(2)}] = \frac{f_0}{2v} \{2B_2 + 2B_3 t + A_3 t^2\} e^{-\mu t}$$

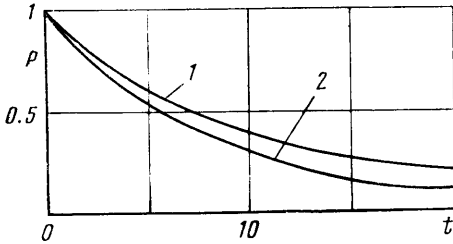
$$A_1 = \varphi(0) \left\{ \frac{bv^2}{2} G^{(1)}(0) + (\mu - a)^2 \right\}, \quad B_1 = \varphi(0) (2a + \mu) + \varphi^{(1)}(0)$$

$$A_2 = \frac{bv^2}{2} G^{(1)}(0) \varphi^{(1)}(0) + G^{(2)}(0) \varphi(0) + 2a^2 B_1 + a(2A_1 - \mu \varphi^{(1)}(0) - \mu B_1) -$$

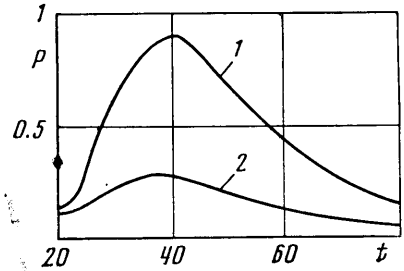
$$- \mu(2A_1 + \mu \varphi^{(1)}(0)), \quad B_2 = \mu \varphi^{(1)}(0) - A_1 - 2aB_1$$

$$A_3 = \frac{bv^2 A_1}{2} \{ G^{(1)}(0) + (\mu - a)^2 \}, \quad B_3 = A_1 (\mu - 2a) + \varphi^{(2)}(0) + A_2$$

Для трубопроводов с упругими свойствами следует в приведенных соотношениях положить $G^{(i)} = 0$. Приведенные выше равенства остаются в силе и в случае трубопроводов переменного сечения $f_0 = f_0(x)$. Ясно, что метод разрывных волн для решения данной задачи с точки зрения аналитического исследования поведения ударных возмущений более приемлем, чем метод интегрального преобразования Лапласа.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 и 2 представлены расчеты по формулам (2.10) и (3.9)–(3.11), характеризующие поведение давления на фронте волны (фиг. 1) и в некоторой фиксированной точке $x/v = 20$ сек после прохождения фронта волны (фиг. 2), при следующих численных значениях параметров: $\varphi(t) = 1$ атм, $\nu_\sigma = 0.2$, $G(t) = 10\alpha e^{-\alpha t}$, $\alpha = 0.1$ сек⁻¹, $a = 0.125$ сек⁻¹, $R_0 = 0.1$ м.

На фиг. 1 и 2 кривые 1 соответствуют упругим, 2 – вязкоупругим моделям.

Поступила 28 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург И. П. Гидравлический удар в трубах из упруговязкого материала. Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ. и астрон., 1956, № 13.
2. Громова Р. Ф. О гидравлическом ударе в упруговязких трубах. Уч. зап. Куйбышевск. пед. ин-та им. В. В. Куйбышева, вып. 21, Куйбышев, 1958.
3. Rientord E., Blanchard A. Influence d'un comportement viscoelastique de la conduite dans le phénomène du coup de belier. C. r. Acad. Sci., 1972, vol. 274, No. 26.
4. Tanahashi T., Kasahara E. Comparisons between experimental and theoretical results of the waterhammer with water column separations. Bull. JSME, 1970, vol. 13, No. 61.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
6. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
7. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
8. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1951.
9. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
10. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
11. Агенбах Д. Д., Редди Д. П. Волны сдвига конечных деформаций, возбужденные на поверхности вязкоупругого полупространства. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1967, № 6.
12. Coleman B. D., Gurtin M. E., Herrera J. Waves in Materials with memory. 1. The velocity of one-dimensional shock and acceleration waves. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1965, vol. 19, No. 1.