МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1975

УДК 532.546

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНОК РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

И. М. АМЕТОВ

(Ухта)

Точные решения нелинейных уравнений стационарной фильтрации газированной жидкости найдены в [1–3]. В [4] при некоторых допущениях система уравнений газированной жидкости сведена к уравнению теплопроводности. Приближенный метод расчета неустановившегося течения газированной жидкости дан в [5], где истинная картина течения заменена расчетной схемой последовательной смены стационарных состояний. Эта же задача решена методом осреднения в [6].

В данной статье при определенных условиях, наложенных на искомые функции, строятся оценки решений уравнений нестационарной фильтрации газированной жидкости в одномерном пласте. Полученные оценки могут быть использованы как приближенные решения с известной погрешностью или для проверки точности различных приближенных методов.

Отметим, что применению теорем сравнения к оценке решений уравнений нелинейной фильтрации посвящены работы [7–9]. Методы построения оценок решения различных задач теплопроводности даны в [10, 11].

1. Получим сначала вспомогательные соотношения. Пусть в области $D\{0<x<l;\ t>0\}$ с границей Г задано уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x;t)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.1}$$

Пусть функция $u(x;\ t)$ является решением первой краевой задачи для уравнения (1.1) в области D. Предположим, что выполняются условия

$$\frac{\partial k}{\partial x}\leqslant 0,\quad \frac{\partial k}{\partial t}\geqslant 0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\geqslant 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\leqslant 0 \tag{1.2}$$

По теореме сравнения [7] с учетом (1.2) получаем, что функция $u(x;\ t)$ ограничена снизу функцией $u_1(x;\ t)$, которая совпадает с $u(x;\ t)$ на границе Г области D и удовлетворяет уравнению

$$k_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\frac{\partial u_1}{\partial t},\quad k_1(x;t)\leqslant k_1$$

Для построения верхней оценки функции $u(x;\ t)$ введем

$$y=\int\limits_0^x\frac{dx}{k(x;t)}$$

При этом уравнение (1.1) перейдет в

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=k\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial u}{\partial y}\int\limits_0^x\frac{1}{k^2}\frac{\partial k}{\partial t}dx$$

а область D преобразуется в область $D^*\{0<y<y(t);\ t>0\}$ с границей Г, где $y(t)=\int\limits_0^l \frac{dx}{k(x;t)}$

Рассмотрим функцию $u_2(x;t)$, являющуюся решением задачи

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=k_1\frac{\partial u_2}{\partial t}$$

$$u_2(0;t)=u(0;t),\quad u_2(y;0)=u(y;0),\quad u_2(y_2;t)=u(l;t) \tag{1.3}$$

в области $D_2\{0<y<y_2;\ t>0\}$, где $k_1y_2=l$, $k_1\geqslant k(x;t)$.

Из (3) в силу условия $\partial u/\partial x\geqslant 0$ получаем $u_2(y_2;t)\geqslant u(y_2;t)$.

Отсюда с учетом (1.2) по теореме сравнения получаем, что в области $D_2\{0<y<y_2;\ t>0\}$ имеет место соотношение $u_2(y;t)\geqslant u(y;t)$.

Подчеркнем, что построение верхней и нижней оценок решения уравнения (1.1) не зависело от свойств функции $k(x;t)$, требовалось лишь знание границ изменения коэффициентов и выполнение условий (1.2).

2. Для одномерного случая уравнения нестационарной фильтрации газированной жидкости граничные и начальные условия имеют вид [3]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[PF(\sigma)\frac{\partial P}{\partial x}\right]=a_1\frac{\partial}{\partial t}(\alpha P\sigma+P),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[k_н(\sigma)\frac{\partial P}{\partial x}\right]=a_2\frac{\partial\sigma}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$P(0;t)=P_c,\quad P(l;t)=P_k>P_c,\quad \sigma(l;t)=\sigma_1 \tag{2.2}$$

$$P(x;0)=P_k,\quad \sigma(x;0)=\sigma_1$$

Здесь $a_1=m\mu_1k^{-1}$, $a_2=m\mu_2k^{-1}$, m — пористость, k — абсолютная проницаемость, μ_1, μ_2 — вязкость газа и нефти (принимаются постоянными), $\alpha=cs^{-1}-1$, $c=\rho_1P^{-1}$ (газ считается идеальным), s — коэффициент растворимости газа в нефти (принимается постоянным), ρ_2 — плотность газа при давлении P; $F(\sigma)=k_1(\sigma)+s\mu_1(c\mu_2)^{-1}k_2(\sigma)$; $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$ — фазовые проницаемости соответственно для нефти и газа, σ — насыщенность порового пространства нефтью, P_c — давление на галерее скважин, P_k — давление на контуре питания, σ_1 — начальное значение нефтенасыщенности.

Учитывая условия (2.2), сделаем физически очевидные предположения о монотонном поведении искомых функций

$$\frac{\partial P}{\partial t}\leqslant 0,\quad \frac{\partial P}{\partial x}\geqslant 0,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial t}\leqslant 0,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial x}\geqslant 0 \tag{2.3}$$

Обозначим $\sigma(0;\infty)=\sigma_2$. Тогда, как следует из (2.2), (2.3), при $0<x<l$, $t>0$ имеем

$$\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1 \tag{2.4}$$

Оценим неизвестную величину σ_2. Для этого найдем стационарное решение системы (2.1).

Введем функции

$$H_1(x)=\int\limits_{P_c}^{P} k_2(\sigma)\,dP,\quad H_2(x)=\int\limits_{P_c}^{P} PF(\sigma)\,dP$$

$$\frac{d^2H_1}{dx^2}=\frac{d^2H_2}{dx^2}=0$$

Отсюда получаем

$$k_2(\sigma)/PF(\sigma)=\mathrm{const}$$

Тогда величину можно определить из соотношения

$$k_2(\sigma_2)/F(\sigma_2)=P_c k_2(\sigma_1)/P_k F(\sigma_1) \tag{25}$$

Перейдем к построению оценок решений системы (2.1). Исключив из системы (2.1) величину $\partial\sigma/\partial t$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[PF(\sigma)\frac{\partial P}{\partial x}\right]-\frac{a_1\alpha}{a_2}\frac{\partial}{\partial x}\left[k_2(\sigma)\frac{\partial P}{\partial x}\right]=a_1(1+\alpha\sigma)\frac{\partial P}{\partial t} \tag{2.6}$$

Рассмотрим случай $\alpha>0$.

На основании результатов [12] имеем

$$P'(x;t)\leqslant P(x;t)\leqslant P''(x;t) \tag{2.7}$$

где функции $P'(x;t)$, $P''(x;t)$ являются соответственно решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P'F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_k}{a_2}k_2(\sigma)\frac{\partial P'}{\partial x}\right]=a_1(1+\alpha\sigma)\frac{\partial P'}{\partial t} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P''F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_c}{a_2}k_2(\sigma)\frac{\partial P''}{\partial x}\right]=a_1(1+\alpha\sigma)\frac{\partial P''}{\partial t} \tag{2.9}$$

и удовлетворяют условиям (2.2).

Представим уравнения (2.8), (2.9) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{F(\sigma)}{(P')^n}-\frac{a_1\alpha P_k k_2(\sigma)}{a_2(P')^{n+1}}\right]\frac{\partial(P')^{n+2}}{\partial x}\right\}=\frac{a_1(1+\alpha\sigma)}{(P')^{n+1}}\frac{\partial(P')^{n+2}}{\partial t} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{F(\sigma)}{(P'')^n}-\frac{a_1\alpha P_c k_2(\sigma)}{a_2(P'')^{n+1}}\right]\frac{\partial(P'')^{n+2}}{\partial x}\right\}=\frac{a_1(1+\alpha\sigma)}{(P'')^{n+1}}\frac{\partial(P'')^{n+2}}{\partial t} \tag{2.11}$$

Величина постоянной $n\geqslant0$ в (2.10), (2.11) выбирается из условия $n(\alpha+1)\geqslant\alpha(1+n)P_k/P_c$. Далее, предположим, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned}&k_1(\sigma)+\frac{a_1}{a_2}\left[1+\alpha\left(1-\frac{P_k}{P_c}\right)\right]k_2(\sigma)>0\\&\frac{d}{d\sigma}\left\{k_1(\sigma)+\frac{a_1}{a_2}\left[1+\alpha\left(1-\frac{P_k}{P_c}\right)\right]k_2(\sigma)\right\}\leqslant0\end{aligned} \tag{2.12}$$

Очевидно, что неравенства (2.12) выполняются при не слишком малых σ, так как $a_1a_2^{-1}\sim10^{-2}$, $\alpha\sim1$. Условия (2.12) вместе с (2.3) позволяют применить к уравнениям (2.10), (2.11) результаты п. 1.

Получаем, что функция $P_1(x;t)$, которая является в D нижней оценкой для $P(x;t)$

$$P_1(x;t)\leqslant P'(x;t)\leqslant P(x;t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}&A_1\frac{\partial^2(P_1^{n+2})}{\partial x^2}=\frac{\partial(P_1^{n+2})}{\partial t}\\&A_1=P_k^{n+1}P_c^{-n}\max_{\sigma_2<\sigma\leqslant\sigma_1}\left[\frac{F(\sigma)-a_1a_2^{-1}\alpha P_c^hP_k^{-h}k_2(\sigma)}{a_1(1+\alpha\sigma)}\right]\end{aligned} \tag{2.13}$$

и условиям (2.2).

Функция $P_2(y;t)$, являющаяся верхней оценкой для функции $P(y;t)$ в области $D_2\{0<y<l_2;\ t>0\}$

$$P_2(y;t)\geqslant P''(y;t)\geqslant P(y;t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2(P_2^{n+2})}{\partial y^2}=A_2\frac{\partial(P_2^{n+2})}{\partial t},\quad y=P_c^n\int\limits_0\left[F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_c^n}{a_2P_k^n}k_2(\sigma)\right]^{-1}dx$$

$$A_2=a_1P_c^{-2n-1}\max_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}\left[(1+\alpha\sigma)F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_c^n}{a_2P_k^n}k_2(\sigma)\right]$$

$$l_2P_c^{-n}\max_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}\left[F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_c^n}{a_2P_k^n}k_2(\sigma)\right]=l$$

и условиям (1.3).

Решения соответствующих задач имеют вид

$$P_1^{n+2}(x;t)=P_c^{n+2}+(P_k^{n+2}-P_c^{n+2})\left[\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{\pi^2m^2A_1t}{l^2}\right)\sin\frac{\pi mx}{l}\right]\tag{2.14}$$

$$P_2^{n+2}(y;t)=P_c^{n+2}+(P_k^{n+2}-P_c^{n+2})\left[\frac{y}{l_2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}\frac{1}{m}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{\pi^2m^2t}{A_2l_2^2}\right)\sin\frac{\pi my}{l^2}\right]\tag{2.15}$$

Для определения расхода жидкости или газа при $x=0$ необходимо оценить величину $\partial P(0;t)/\partial x$.

Учитывая условия (1.6), (2.12), (2.13), из (2.14), (2.15) получаем

$$\frac{\partial P_1(0;t)}{\partial x}\leqslant\frac{\partial P(0;t)}{\partial x}\leqslant P_c^n\max_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}\left[F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_c^n}{a_2P_k^n}k_2(\sigma)\right]\frac{\partial P_2(0;t)}{\partial y}$$

Используя (2.14), (2.15), окончательно находим

$$(P_k^{n+2}-P_c^{n+2})l^{-1}P_c^{-n-1}\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2m^2A_1t}{l^2}\right)\right]\leqslant\tag{2.16}$$

$$\leqslant\frac{\partial P(0;t)}{\partial x}\leqslant B(P_k^{n+2}-P_c^{n+2})l^{-1}P_c^{-n-1}\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2m^2t}{A_2l_2^2}\right)\right]$$

$$B\min_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}\left[F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_c^n}{a_2P_k^n}k_2(\sigma)\right]=\max_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}\left[F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_c^n}{a_2P_k^n}k_2(\sigma)\right]$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha<0$. Аналогично предыдущему имеем $P'(x;t)\leqslant P(x;t)\leqslant P''(x;t)$, где функции $P'(x;t)$ и $P''(x;t)$ являются соответственно решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_c}{a_2P'}k_2(\sigma)\right)\frac{\partial (P')^2}{\partial x}\right]-\frac{a_1(1+\alpha\sigma)}{P'}\frac{\partial (P')^2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_k}{P''}k_2(\sigma)\right)\frac{\partial (P'')^2}{\partial x}\right]=\frac{a_1(1+\alpha\sigma)}{P''}\frac{\partial (P'')^2}{\partial t}$$

и удовлетворяют условиям (2.2). При этом предполагается, что $1+\alpha\sigma>0$. Условия (1.2) в данном случае выполняются, что легко проверяется непосредственно.

Повторяя те же рассуждения, что и в случае $\alpha>0$, приходим к следующим результатам.

Нижняя и верхняя функция для $P^2(x;t)$ имеют вид

$$P_1^2(x;t)=P_c^2+(P_k^2-P_c^2)\left[\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(-\frac{\pi^2m^2B_1t}{l^2}\right)\sin\frac{\pi mx}{l}\right]$$

$$P_2^2(y;t)=P_c^2+(P_k^2-P_c^2)\left[\frac{y}{l_2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(-\frac{\pi^2m^2t}{B_2l_2^2}\right)\sin\frac{\pi my}{l_2}\right]$$

$$y=\int_0^x\left[F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_k}{a_2P_c}k_2(\sigma)\right]^{-1}dx,\quad l_2=\max_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}\left[F(\sigma)-\frac{a_1\alpha P_k}{a_2P_c}k_2(\sigma)\right]l$$

$$B_1=P_k\max_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}a_1(1+\alpha\sigma)^{-1}[F(\sigma)-a_1a_2^{-1}\alpha k_2(\sigma)]$$

$$B_2=a_1P_c^{-1}\max_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}[(1+\alpha\sigma)(F(\sigma)-a_1a_2^{-1}\alpha P_kP_c^{-1}k_2(\sigma))]$$

Для величины $\partial P(0;t)/\partial x$ получаем оценки

$$\frac{P_k^2-P_c^2}{lP_c}\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2m^2B_1t}{l^2}\right)\right]\leqslant\frac{\partial P(0;t)}{\partial x}\leqslant\frac{P_k^2-P_c^2}{lP}\cdot \tag{2.17}$$

$$\cdot\frac{\max\limits_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}[F(\sigma)-a_1a_2^{-1}\alpha P_kP_c^{-1}k_2(\sigma)]}{\min\limits_{\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1}[F(\sigma)-a_1a_2^{-1}\alpha P_kP_c^{-1}k_2(\sigma)]}\cdot\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2m^2t}{B_2l_2^2}\right)\right]$$

В качестве примера рассмотрим случай $\mu_1=0.05\mu_2$, $s=c$, $\sigma_1=0.96$. Для фазовых проницаемостей в соответствии с [13] примем

$$k_1=(1-\sigma)^3(1+3\sigma),\qquad k_2(\sigma)=\sigma^4$$

При $P_k=1.1P_c$ величина насыщенности σ изменяется в пределах $0.94<\sigma<0.96$. Максимальная погрешность оценок (2.16) составляет 3%. При $P_k=1.2P_c$ соответственно имеем $0.94<\sigma<0.96$, погрешность равна 6%. Следует отметить, что если известны значения функции $\sigma(x;t)$ при $x=0$, то легко получить оценки более точные, чем (2.16), (2.17).

В заключение автор благодарит А. Х. Мирзаджанзаде за постановку задачи и М. Г. Азизова за проведение численных расчетов.

Поступила 27 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христианович С. А.* О движении газированной жидкости в пористых породах. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2.
2. *Розенберг М. Д.* Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных, имеющей приложение в теории фильтрации. Докл. АН СССР, Нов. сер., 1953, т. 39, № 2.
3. *Розенберг М. Д., Кундин С. А., Курбанов А. К., Суворов Н. И., Шовкринский Г. Ю.* Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных массах. М., «Недра», 1969.
4. *Миллионщиков М. Д.* Движение газированной нефти в пористой среде. Ин. сб. АН СССР, 1949, т. 5, вып. 2.
5. *Царевич К. А.* Гидромеханические приемы приближенного расчета дебитов нефти и газа из скважин при сплошной и сгущающейся системах разработки для нефтяных месторождений с газовым режимом. Тр. ВНИИ, вып. 6. М., Гостоптехиздат, 1954.
6. *Глоговский М. М.* К расчету дебитов скважин при режиме растворенного газа. Тр. ВНИИ, вып. 19. М., Гостоптехиздат, 1954.
7. *Пирвердян А. М.* Об одном способе оценок приближенных решений уравнений нестационарной фильтрации нефти и газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
8. *Пирвердян А. М.* Об оценках некоторых приближенных методов решения задач нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
9. *Ентов В. М.* Теоремы сравнения для уравнений нестационарной фильтрации. ПММ, 1965, т. 29, вып. 11.
10. *Аметов И. М., Даниелян Ю. С.* Применение теорем сравнения в теории теплопроводности. Инж.-физ. ж., 1973, № 2.
11. *Даниелян Ю. С., Аметов И. М.* Об оценках решений задач Стефана. Нефть и газ, 1973, № 4.
12. *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. М., «Мир», 1968.
13. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1953.