

**ЭВОЛЮЦИЯ КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГОЙ
РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ**

В. Г. ГАСЕНКО, В. В. СОБОЛЕВ

(Новосибирск)

В рамках гомогенной модели среды, когда длина волны возмущения много больше расстояния между пузырьками и радиуса пузырьков, проводится изучение распространения одномерных возмущений в вязкоупругой релаксирующей жидкости, содержащей пузырьки газа. Аналитически и с помощью численного интегрирования рассматривается эволюция стационарных и нестационарных волн, изучаются ударные волны. Полученные результаты сравниваются с поведением волн возмущения в ньютоновской жидкости с газовыми включениями.

Обобщаются модели газожидкостной среды [1, 2] на случай, когда жидкой фазой является вязкоупругая жидкость, например слабый водный раствор полимеров. Используя методику, развитую в [3], исследуется распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в такой смеси.

1. Основные уравнения. Рассматривается жидкость, обладающая релаксационными свойствами, в которой тензор напряжений τ_{ij} связан с тензором скоростей деформации σ_{ij} соотношением [4]

$$(1.1) \quad \tau_{ij} = \mu \sigma_{ij} + \xi_0 \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\theta] \frac{\partial}{\partial t'} \sigma_{ij} dt'$$

$$\xi_0 = \mu(\kappa/\theta - 1), \quad \kappa \ll \theta$$

Здесь μ — динамический коэффициент вязкости жидкости, κ , θ — характерные времена ретардации и релаксации, t — время.

Основной физической предпосылкой рассматриваемой модели является предположение о том, что вязкоупругие релаксационные свойства жидкой фазы, как и в случае ньютоновской жидкости, проявляются главным образом вблизи границы газ — жидкость, т. е. в области максимальных градиентов скорости. Поэтому эти свойства можно учесть в уравнении состояния такой среды, которое получается из уравнения пульсаций одиночного газового пузырька, аналогично тому, как это делается в случае ньютоновской жидкости [3]. Уравнение колебаний радиуса R пузырька в вязкоупругой релаксирующей жидкости, в которой выполняется соотношение (1.1), имеет вид [5]

$$(1.2) \quad R\dot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 + \frac{1}{\rho_1} \left[P_\infty - \left(P_0 + \frac{2s}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + \frac{2s}{R} + \right. \\ \left. + \frac{4\mu\dot{R}}{R} + 4\xi_0 \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\theta] \left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) dt' \right] = 0$$

Здесь P_∞ — давление на бесконечности, P_0 — невозмущенное давление в жидкости, ρ_1 — плотность жидкости, s — коэффициент поверхностного на-

тяжения, γ — показатель адиабаты, R_0 — невозмущенный радиус пузырька. Точки в (1.2) и далее означают дифференцирование по времени.

Из (1.2) обычным образом [3, 6] получается уравнение состояния рассматриваемой среды, дающее связь между возмущениями давления δp и плотности смеси $\delta \rho$

$$\begin{aligned} \delta p &= c_0^2 \delta \rho + \eta \delta \dot{\rho} + \sigma_0 \delta \ddot{\rho} + \chi \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\theta] \frac{\partial}{\partial t'} \delta \dot{\rho}(t') dt' \\ (1.3) \quad c_0^2 &= [\gamma P_0 + 2s(3\gamma - 1) / 3R_0] / \alpha_0 \rho \\ \eta &= 4\nu / [3\alpha_0(1 - \alpha_0)], \quad \sigma_0 = R_0^2 / [3\alpha_0(1 - \alpha_0)] \\ \chi &= 4\xi_0 / [3\rho_1 \alpha_0(1 - \alpha_0)], \quad \alpha_0 = \sqrt[4]{3\pi R_0^3 N \rho} \\ &(N = \text{const}) \end{aligned}$$

где c_0 — скорость распространения низкочастотного звука в газожидкостной среде, ν — кинематический коэффициент вязкости, α_0 — весовое газосодержание, N — количество пузырьков в единице массы смеси, ρ — плотность смеси.

Уравнения движения и непрерывности гомогенной модели имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} (1.4) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ (1.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \quad \rho = (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2 \\ \rho \mathbf{u} &= \rho_2 \alpha \mathbf{u}_2 + \rho_1 (1 - \alpha) \mathbf{u}_1 \end{aligned}$$

Здесь u , p — скорость и давление в смеси, ρ_2 — плотность газа, u_1 , u_2 — скорости жидкости и газа. При $\alpha \ll 1$ скорость жидкости равна скорости смеси ($\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$), газожидкостную смесь можно рассматривать как газ с плотностью, приблизительно равной плотности жидкости, и со сжимаемостью газовой фазы.

Уравнения (1.3) — (1.5) представляют собой полную систему уравнений, описывающих поведение смеси, состоящей из вязкоупругой релаксирующей жидкости и пузырьков газа. Используя формализм нелинейной волновой динамики [7], получим из (1.3) — (1.5) уравнение типа Бюргерса — Кортевега — де Фриза (БКФ) для одномерных возмущений скорости смеси, распространяющихся в одном направлении

$$\begin{aligned} (1.6) \quad u_t + (u + c_0) u_x - \eta u_{xx} + \beta u_{xxx} - \\ - \chi \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\theta] \frac{\partial}{\partial t'} u_{xx} dt' = 0, \quad \beta = \sigma_0 c_0 \end{aligned}$$

Если характерное время релаксации θ много меньше периода T волны возмущения, то (1.6) переходит в обычное уравнение Бюргерса — Кортевега — де Фриза [3, 7]

$$\begin{aligned} (1.7) \quad u_t + (u + c_0) u_x - \eta u_{xx} + (\beta + \xi) u_{xxx} &= 0 \\ \xi &= c_0 \theta \chi < 0 \end{aligned}$$

2. **Линейные волны.** При достаточно малых амплитудах возмущения в (1.6) можно пренебречь квадратичным членом. Тогда из (1.6) имеем

$$(2.1) \quad u_t + c_0 u_x - \eta u_{xx} + \beta u_{xxx} - \chi \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\theta] \frac{\partial}{\partial t'} u_{xx} dt' = 0$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (2.1) имеет вид

$$(2.2) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) u(x', 0) dx'$$

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(x-x') + \lambda(k)t] dk$$

$$\lambda = -[A + (A^2 - z/\theta)^{1/2}] / 2$$

$$A = (\chi + \eta)k^2 - i(c_0 k - \beta k^3) + 1/\theta, \quad z = A - \chi k^2 - 1/\theta$$

При $\eta=0$ из (2.2) следует решение линейного уравнения Кортевега — де Фриза, которое в системе отсчета, движущейся со скоростью c_0 , имеет вид [7]

$$u(x, t) = \pi^{-1/2} (3\beta t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai} \left[\frac{x-x'}{(3\beta t)^{1/2}} \right] u(x', 0) dx'$$

где $\text{Ai}(y)$ есть функция Эйри.

Уравнению (2.1) соответствует дисперсионное соотношение

$$(2.3) \quad -\omega + c_0 k - i\eta k^2 - \beta k^3 - \frac{\omega k^2 \chi}{1/\theta - i\omega} = 0$$

При времени релаксации, много меньшем периода волны, ограничиваясь членами $O(k^3)$, из (2.3) получаем дисперсионное соотношение для уравнения (1.7)

$$(2.4) \quad \omega = c_0 k - i\eta k^2 - (\beta + \xi) k^3$$

Разрешая уравнение (2.3) относительно ω и выбирая такое решение, которое в отсутствие релаксационного члена в (1.6) давало бы дисперсионное соотношение для уравнения БКФ, получим

$$(2.5) \quad \omega = 1/2 [a - ib + (c + id)^{1/2}], \quad a = c_0 k - \beta k^3, \quad b = (\eta k^2 \chi + 1)/\theta$$

$$c = a^2 - b^2 + 4\eta k^2 / \theta, \quad d = 2a(2/\theta - b)$$

Соотношение (2.5) соответствует волнам, распространяющимся в положительном направлении оси x . Отделяя в (2.5) реальную и мнимую части ω , имеем

$$(2.6) \quad \omega_1 = \text{Re } \omega = \frac{1}{2} \left[a + \frac{d}{|d|} \left(\frac{R+c}{2} \right)^{1/2} \right]$$

$$\omega_2 = \text{Im } \omega = \frac{1}{2} \left[-b + \left(\frac{R-c}{2} \right)^{1/2} \right]$$

$$(2.7) \quad R = (c^2 + d^2)^{1/2}$$

Из выражения (2.7) нетрудно получить, что ω_2 убывает по абсолютной величине с увеличением характерного времени релаксации θ . Это видно из таблицы, где приведены значения модуля ω_2 для различных θ и k , полученные из (2.7) при $c_0=10^3$ м/сек, $\eta=10^{-3}$ м²/сек, $\beta=10^{-4}$ м³/сек, $\kappa=0$.

k	0.0001	0.001	0.01	0.1
0.00563	$0.5960 \cdot 10^{-7}$	$0.3353 \cdot 10^{-7}$	$0.3120 \cdot 10^{-7}$	$0.2398 \cdot 10^{-7}$
0.01	$0.1192 \cdot 10^{-6}$	$0.9686 \cdot 10^{-7}$	$0.9919 \cdot 10^{-7}$	$0.5000 \cdot 10^{-7}$
0.01778	$0.2980 \cdot 10^{-6}$	$0.3166 \cdot 10^{-6}$	$0.3064 \cdot 10^{-6}$	$0.7602 \cdot 10^{-7}$
0.03162	$0.1013 \cdot 10^{-5}$	$0.9984 \cdot 10^{-6}$	$0.9090 \cdot 10^{-6}$	$0.9110 \cdot 10^{-7}$
0.05632	$0.3159 \cdot 10^{-5}$	$0.3152 \cdot 10^{-5}$	$0.2402 \cdot 10^{-5}$	$0.9686 \cdot 10^{-7}$
0.1	$0.1001 \cdot 10^{-4}$	$0.9902 \cdot 10^{-5}$	$0.5000 \cdot 10^{-5}$	$0.9837 \cdot 10^{-7}$
0.1778	$0.3159 \cdot 10^{-4}$	$0.3065 \cdot 10^{-4}$	$0.7598 \cdot 10^{-5}$	$0.9837 \cdot 10^{-7}$

Аналогичные результаты получаются при отличных от нуля характерных временах ретардации κ . Уменьшение ω_2 по абсолютной величине при возрастании θ соответствует эффективному уменьшению диссипации.

3. Стационарные волны. Исследуем стационарные решения уравнения (1.6). Дифференцируя его по времени, исключая интегральный член и подставляя $u=u(x-Vt)$, получим для функции $u(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(3.1) \quad \begin{aligned} V\theta(\beta u''' - \eta u'' + uu' - Vu')' - \beta u''' + \\ + \eta u - uu' + Vu' - V\theta \chi u''' = 0, \quad \xi = x - Vt \end{aligned}$$

Интегрируя уравнение (3.1) один раз при условии $u=u'=u''=u'''=0$ при $x \rightarrow \infty$, получим

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \beta u''' - (\eta + \chi + \beta/V\theta)u'' + (u - V + \\ + \eta/V\theta)u' + (1/\theta - u/2\theta V)u = 0 \end{aligned}$$

Отметим, что в соответствии с инвариантностью уравнения (1.6) относительно преобразования $u \rightarrow u + \text{const}$ условие $u(\infty) = 0$ не нарушает общности и означает фиксацию системы отсчета. При $\beta=0$ из (3.2) получается уравнение для стационарных решений уравнения Бюргерса с релаксационной зависимостью диссипации от времени. Если время ретардации $\kappa=0$ (тело Максвелла), то это уравнение интегрируется в квадратурах. Тогда

$$(u - 2V)^{\eta_1} u^{\eta_2} = \exp(\xi), \quad \eta_1 = V + \eta/V\theta, \quad \eta_2 = V - \eta/V\theta$$

В линеаризованном случае

$$u = \exp[\xi / \theta(V - \eta/V\theta)]$$

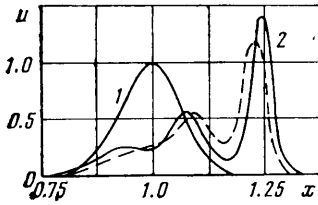
Исследуем асимптотическое поведение решений уравнения (3.2), где $\beta > 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Полагая в этом уравнении $u = u(-\infty) + f(x)$, где f — малая величина, и линеаризуя его относительно f , получим уравнение

$$(3.3) \quad \beta f''' - (\eta + \chi + \beta/V\theta)f'' + (V + \eta/V\theta)f' - f/\theta = 0$$

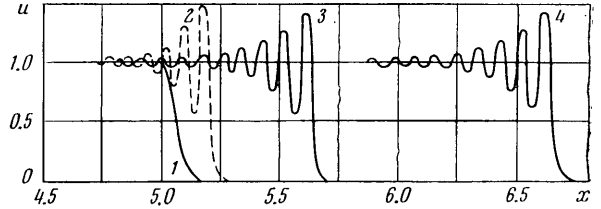
Решения этого уравнения пропорциональны $\exp(\lambda \xi)$, причем λ находится из уравнения

$$(3.4) \quad \beta \lambda^3 + (\eta + \chi + \beta/V\theta)\lambda^2 + (V + \eta/V\theta)\lambda - 1/\theta = 0$$

При $\beta=0$ уравнение (3.3) имеет только неосциллирующие решения, так как дискриминант получающегося из (3.4) квадратного уравнения при $\kappa \ll \theta$ всегда больше нуля. В общем случае необходимо исследовать дискриминант кубического уравнения (3.4). Поскольку величина κ/θ в рассматриваемой модели всегда много меньше единицы, то, не нарушая общности, будем полагать $\kappa=0$. Нетрудно показать, что при достаточно



Фиг. 1



Фиг. 2

малых временах релаксации существует некоторое критическое значение коэффициента вязкости

$$(3.5) \quad \eta_* = (4\beta V + 108V^4\theta^2)^{1/2} - 10V^2\theta$$

такое, что при $\eta < \eta_*$ решения уравнения (3.3) имеют осциллирующий характер, а при $\eta > \eta_*$ — монотонный. При очень малых временах релаксации ($\theta \ll \beta^{1/2}V^{-3/2}$) из (3.5) получается $\eta_* = (4\beta V)^{1/2}$, что соответствует ньютоновской жидкости с газовыми включениями [3, 7].

Из (3.5) видно, что в среде с релаксацией значение критического коэффициента вязкости меньше, чем в случае ньютоновской жидкости [3]. Это связано с тем, что с увеличением времени релаксации происходит эффективное уменьшение диссипации.

4. Численное моделирование эволюции возмущений. Моделирование проводилось с помощью численного интегрирования уравнения (1.6), которое аппроксимировалось трехслойной явной конечно-разностной схемой второго порядка по x и t . Шаги интегрирования выбирались из требования устойчивости разностной схемы. Вычисления проводились в полосе $0 \leq x \leq L$ и прекращались при достижении заранее заданного значения t . В качестве начального условия выбиралось гауссовское распределение

$$(4.1) \quad u(x, 0) = a_0 \exp[-(x-x_0)^2/l^2]$$

Бесконечность по x моделировалось с помощью задания периодических краевых условий

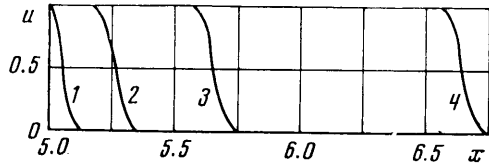
$$(4.2) \quad u(x, t) = u(x+L, t), \quad L \gg l$$

При изучении распространения возмущений в вязкоупругой релаксирующей жидкости наибольший интерес представляет рассмотрение влияния времени релаксации на эволюцию волн. Численные эксперименты показывают, что с увеличением θ происходит эффективное уменьшение диссипации. Это отмечалось также при анализе линейных волн, где мнимая часть частоты (2.7) уменьшается при возрастании θ (таблица). Поведение возмущений в различные моменты времени показано на фиг. 1. Здесь $a_0=1$, $l=0.1$, $\beta=10^{-4}$, $\eta=10^{-3}$, $\kappa=0$, $\theta=0.03$. Пунктирная линия изображает решение уравнения (1.6) без релаксационного члена. Кривые 1, 2 соответствуют значениям $t=0, 0.4$. Видно, что с увеличением θ растут амплитуды волн возмущения.

Изучалась также эволюция ударных волн в релаксирующей вязкоупругой жидкости, содержащей пузырьки газа. При этом численно моделировалось распространение начального разрыва

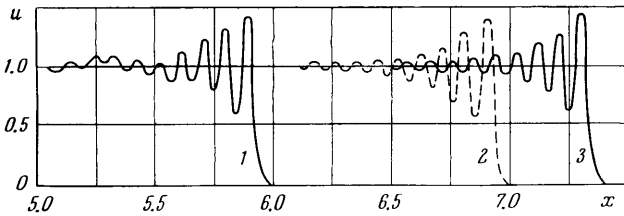
$$(4.3) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= a_0 \quad \text{при } x \leq x_0 \\ u(x, 0) &= a_0 \exp[-(x-x_0)^2/l^2] \quad \text{при } x > x_0 \end{aligned}$$

В работе [8] были изучены особенности динамики ударных волн в ньютоновской жидкости с газовыми включениями. В данной работе эти результаты обобщаются на случай вязкоупругой жидкости с релаксацией. При $\eta < \eta_*$ фронт ударной волны имеет осциллирующий характер, при $\eta > \eta_*$ — монотонный. На фиг. 2 приведена типичная эволюция начального разрыва при $a_0=1$, $l=0.08$, $\beta=10^{-4}$, $\eta=10^{-3}$, $\kappa=0$, $\theta=10^{-2}$. Здесь $\eta < \eta_* = 5 \cdot 10^{-3}$.



Фиг. 3

Кривым 1–4 соответствует $t=0, 0.4, 1.2, 3.2$. Сравнение с соответствующими результатами работы [8] показывает, что с увеличением времени релаксации волна выходит на стационарное решение позднее. Кроме того, поскольку с ростом θ происходит эффективное уменьшение диссипации, то наблюдается увеличение амплитуды u_m переднего фронта ударной волны. Это особенно заметно в процессе выхода волны на стационарный



Фиг. 4

профиль. Например, при прочих равных условиях в момент времени $t=0.8$ при $\theta=10^{-4}$ $u_m=1.42$, при $\theta=10^{-2}$ $u_m=1.45$, при $\theta=10^{-1}$ $u_m=1.79$. При $\eta > \eta_*$ фронт ударной волны имеет монотонный характер (фиг. 3, $\eta=0.01$). Кривым 1–4 соответствует $t=0, 0.4, 1.2, 3.2$. Отметим, что в случае ньютоновской жидкости с газовыми включениями при этом значении η ударная волна имеет осциллирующий профиль, поскольку здесь $\eta_* = (4\beta V)^{1/2} \approx 1.4 \cdot 10^{-2}$ [8].

Большой интерес представляет вопрос об устойчивости установившейся ударной волны относительно продольных возмущений. С этой целью был проведен численный эксперимент, в котором на установившийся профиль, полученный в результате эволюции начального разрыва (4.3), накладывалось возмущение вида

$$(4.4) \quad y(x, t) = \varepsilon \cos [2\pi(x-x_0)/l_1], \quad \varepsilon \ll a_0$$

которое модулировалось профилем ударной волны и включалось в области $x \geq x_0$. При этом оказалось, что с течением времени снова возникает установившийся ударный профиль, параметры которого (амплитуды осцилляций, их частота и т. д.) очень близки к исходному. На фиг. 4 показана

эволюция функции $u(x, t)$ в случае, когда на установившийся профиль, изображенный на фиг. 3, в момент времени $t=1.2$ накладывалось возмущение (4.4) с $\varepsilon=0.05$, $l_1=0.5$. Кривые 1—3 соответствуют значениям $t=1.2, 3.2, 4.0$. При $t=3.2$ устанавливается профиль ударной волны, амплитуды которого отличались от исходного менее чем на 1%.

Проведенное рассмотрение позволяет установить некоторые закономерности распространения волн конечной амплитуды в вязкоупругой релаксирующей жидкости с газовыми включениями. На основе уравнений (1.3)—(1.5) можно изучать также особенности гидродинамических течений такой среды.

Авторы благодарят И. Р. Шрейбера за обсуждение результатов.

Поступила 15 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 3.
2. Zwick S. A. Behaviour of small permanent gas bubbles in a liquid. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37, No. 3.
3. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
4. Реология. Теория и приложения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Гасенко В. Г., Соболев В. В. Пульсации газового пузырька в неньютоновской жидкости под действием звукового поля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
6. Devin Ch. Survey of thermal radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 12.
7. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах, М., «Наука», 1973.
8. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Динамика ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1974, № 5.