

О ДВИЖЕНИИ ПУЗЫРЕЙ В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

Ю. А. БУЕВИЧ

(Москва)

Рассмотрено стационарное движение пузыря (полости, свободной от взвешенных частиц и заполненной только жидкой фазой) в псевдоожигженном слое однородной концентрации. Объяснено изменение объема пузыря по мере его подъема в слое; скорость подъема найдена для мелких и крупных пузырей. Вычислен основной параметр, характеризующий форму крупного пузыря как в псевдоожигженном слое, так и в однородной жидкости. Последнее позволяет, в частности, завершить решение известной задачи Тейлора о крупном пузыре или капле в неограниченной среде.

Реальные слои частиц, псевдоожигженного газом или капельной жидкостью, обычно неоднородны в том смысле, что в них наблюдается спонтанное образование полостей («пузырей»), практически не содержащих частиц, поведение которых во многом напоминает поведение пузырей или капель в обычной жидкости [1]. Иногда такие пузыри создаются искусственно при струйном вдуве жидкости в однородный псевдоожигженный слой. Исследование пузырей представляет интерес в связи с тем, что они оказывают существенное влияние на процессы тепло- и массопереноса в слое и на его использование в качестве теплообменника или химического реактора.

Теоретическое исследование пузырей в псевдоожигженных слоях было начато в работах [1, 2], в которых рассмотрено потенциальное обтекание пузыря сплошной средой, имитирующей дисперсную фазу, и фильтрация жидкой фазы в пористом теле, образованном движущимися частицами. В [3] исследована эта же задача в предположении о существовании строгой аналогии с пузырями газа в жидкости и использовании метода Тейлора [4] при анализе структуры слоя вблизи лобовой части пузыря. В [5] предложен несколько более глубокий анализ гидродинамической обстановки в окрестности поднимающегося пузыря и получено решение для двумерного и сферического трехмерного пузыря при помощи модифицированного приближения Озеена. В дальнейшем на основе моделей в [1-5] было рассмотрено также влияние на движение пузыря стенок, ограничивающих слой, и соседних пузырей [6, 7].

Сравнение результатов [1-7] с данными экспериментов (см., например, [8]) показало, что основные особенности поведения пузыря и течения фаз слоя вокруг него отражены в теории правильно. Тем не менее имеются систематические расхождения между выводами теории и наблюдаемыми явлениями, до сих пор не получившие объяснения. Так, теория совершенно не описывает значительное увеличение объема пузыря, поднимающегося в слое, зависимость его формы и скорости подъема от параметров слоя и радиуса пузыря и т. п.

Ниже обсуждена общая постановка задачи о пузыре в псевдоожигженном слое и проведен анализ этой задачи в предельных случаях мелких и крупных пузырей.

1. Исследуем поведение пузыря в неограниченном псевдоожигженном слое. Уравнения сохранения массы и импульса фаз слоя, рассматриваемых как сосуществующие сплошные среды, в пренебрежении вязкими напряжениями и влиянием пульсаций частиц и жидкости на среднее движение фаз запишутся в виде [9]

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{v}) &= 0, \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0, \quad \varepsilon = 1 - \rho \\ (1.1) \quad d_0 \varepsilon (\partial / \partial t + \mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + d_0 \mathbf{g} - \mathbf{f}(\rho, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w} \\ d_1 \rho (\partial / \partial t + \mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} &= \rho (d_1 - d_0) \mathbf{g} + \mathbf{f}(\rho, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{v} и \mathbf{w} — средние скорости жидкости и частиц, p — давление в жидкости, ρ и ε — объемная концентрация частиц и пористость («порозность») слоя, d_0 и d_1 — плотности жидкости и материала частиц, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести, \mathbf{f} — сила межфазового взаимодействия, отнесенная к

единице объема слоя. В случае $d_1 \gg d_0$ уравнения (1.1) переходят в использованные в [3, 5].

Как показано в [10], наличие пульсаций приводит к появлению отличного от нуля дополнительного потока жидкости в уравнении сохранения массы жидкой фазы и соответствующему изменению конвективных членов в уравнении сохранения импульса, к некоторому изменению силы f по сравнению с действующей в слое неподвижных частиц, не совершающих пульсаций, и к появлению дополнительных нормальных напряжений в жидкой и дисперсной фазах, описываемых тензорами P_0 и P_1 . (Влияние пульсаций на вязкие напряжения здесь не рассматриваем в соответствии с использованием приближения Эйлера при формулировке уравнений (1.1).) Равновесные нормальные напряжения $P_{0\infty}$, $P_{1\infty}$, реализующиеся в слое с однородными концентрацией ρ и скоростями v , w , представляют собой однозначные функции ρ и u . Для слоев крупных частиц, псевдооживленного газом, последние функции оценивались в [11], для суспензий мелких частиц — в [12]; экспериментально нормальные напряжения в дисперсной фазе наблюдались, например, в [13].

Как следует из оценки потока жидкости, обусловленного пульсациями, в [12], он мал по сравнению с регулярным потоком ϵv , так что им допустимо пренебречь. Для силы взаимодействия фаз f удобно сразу же использовать одно из теоретических или эмпирических соотношений, относящихся непосредственно к псевдооживленному слою пульсирующих частиц, вообще не разделяя ее на регулярную и пульсационную составляющие. Тогда в (1.1) нужно учесть дополнительно лишь нормальные напряжения P_0 и P_1 . Незвестными получающейся системы уравнений будут ρ , p , v и w , причем P_0 и P_1 определяются из решения кинетического уравнения для взвешенных частиц [10]. Решение этой системы в настоящее время вряд ли возможно; поэтому упростим задачу, полагая, как и в [1, 2, 5-7], что концентрация ρ однородна и совпадает с концентрацией слоя вдали от пузыря.

В общем случае это предположение приводит к переопределенности системы уравнений (элементы обсуждения возникающего противоречия содержатся в [5]). Однако, указанная трудность естественным образом устраняется, если рассматривать нормальные напряжения P_0 и P_1 , действующие в направлении u , как неизвестные величины, пренебрегая одновременно влиянием на движение других компонент тензоров P_0 и P_1 . Фактически последние допущения вытекают из предположения об однородности ρ , когда рассмотрение кинетического уравнения для частиц вообще теряет смысл.

Таким образом, вместо (1.1) имеем

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \quad \operatorname{div} w = 0 \\ d_0 \epsilon (\partial / \partial t + v \nabla) v &= -\nabla(p + P_0) + d_0 g - f(\rho, u) \\ d_1 \rho (\partial / \partial t + w \nabla) w &= -\nabla P_1 + \rho(d_1 - d_0)g + f(\rho, u) \end{aligned}$$

Неизвестными этой системы служат величины $p + P_0$, P_1 , v и w . Из интуитивных соображений «давление» дисперсной фазы вводилось в уравнения уже в [1].

Заметим, что единственная попытка теоретически рассмотреть распределение ρ вблизи лобовой части пузыря была сделана в [3], где был использован итерационный метод, основанный на гипотезе о полной аналогии поведения пузырей в псевдооживленном слое и в однородной среде. Поскольку давление дисперсной фазы в [3] фактически не учитывалось, а указанная аналогия не имеет достаточных оснований, результаты [3] следует считать весьма грубыми. Экспериментально распределение ρ перед пузырем исследовалось в [14].

На удалении от пузыря в лабораторной системе координат, в которой дисперсная фаза в среднем неподвижна, имеем

$$(1.3) \quad p + P_0 = p_\infty + P_{0\infty}, \quad P_1 = P_{1\infty}, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}_\infty \quad (r \rightarrow \infty)$$

Здесь p_∞ и \mathbf{u}_∞ — давление и скорость скольжения фаз («скорость псевдооживления») вдали от пузыря, определяемые из равенств

$$(1.4) \quad p_\infty = (d_0 \varepsilon + d_1 \rho) g r, \quad \mathbf{f}(\rho, \mathbf{u}_\infty) = -\rho (d_1 - d_0) \mathbf{g}$$

следующих из (1.2), а равновесные функции $P_{0\infty}$ и $P_{1\infty}$ могут быть представлены в виде [10-12]

$$(1.5) \quad P_{0\infty} = 1/2 d_0 \varepsilon L_0 u_\infty^2, \quad P_{1\infty} = 1/2 d_1 \rho L_1 u_\infty^2$$

Здесь L_0 и L_1 — функции ρ , имеющие при значениях ρ , характерных для псевдооживленных слоев, порядок единицы.

На поверхности пузыря Γ имеем

$$(1.6) \quad P_1 = 0, \quad p + P_0 = p_b, \quad \varepsilon v_n = v_{bn} \quad (\mathbf{r} \in \Gamma)$$

Первое из условий (1.6) отражает равновесие частиц, находящихся непосредственно на Γ , и представляет собой условие существования этой поверхности. (В реальных ситуациях, когда ρ может изменяться, его выполнение обеспечивается быстрым уменьшением ρ в приповерхностном слое — сравним с анализом структуры верхней границы однородного псевдооживленного слоя в [12].) Остальные условия в (1.6) выражают непрерывность нормальных напряжения и потока жидкой фазы на поверхности пузыря.

Далее, в общем случае пузырь может изменять свой объем — сохранение этого объема ниоткуда не следует. Поэтому нормальная составляющая скорости дисперсной фазы на поверхности Γ отлична, вообще говоря, от нуля и равна некоторой функции $w_n(\Gamma)$. Предполагая в соответствии с опытными фактами, что форма пузыря не изменяется, легко выразить $w_n(\Gamma)$ лишь через одну неизвестную постоянную, например скорость w_0 лобовой точки пузыря относительно его центра. Для определения w_0 имеем тогда условие отсутствия источника или стока внутри пузыря

$$(1.7) \quad \int_{\Gamma} (\varepsilon v_n + \rho w_n) dS \equiv \int_{\Gamma} (\varepsilon u_n + w_n) dS = 0$$

Отметим, что интегрирование по Γ в (1.7) можно заменить интегрированием по любой замкнутой поверхности, ограничивающей пузырь.

Нетрудно видеть, что при заданной поверхности Γ сформулированная краевая задача переопределена и, вообще говоря, не имеет решения — одно из условий на Γ оказывается «лишним». Поэтому ясно, что форма этой поверхности должна определяться в процессе решения.

2. Рассмотрим подробнее поведение пузыря в слое мелких частиц, когда

$$(2.1) \quad \mathbf{f}(\rho, \mathbf{u}) = \rho \beta K \mathbf{u}$$

где β — некоторый параметр, описывающий взаимодействие жидкости с разреженной системой частиц (при $\rho \rightarrow 0$), а K — возрастающая функция ρ , обращающаяся в единицу при $\rho = 0$ (см., например, [1]). Линейное по скорости псевдооживления соотношение (2.1) строго справедливо лишь в случае, когда число Рейнольдса для обтекания частиц мало по сравнению с единицей. Однако фактически оно использовалось в [1-3, 5-7] и при анализе слоев крупных частиц, когда его можно рассматривать лишь как некую аппроксимирующую формулу.

В соответствии с экспериментальными данными [8] считаем, что течение фаз почти потенциально везде вне пузыря и области следа за его кормой и используем сферическую систему координат, связанную с пузырем, в которой уравнение поверхности Γ' , ограничивающей область потенциального течения, имеет вид

$$(2.2) \quad r=r_0(\theta)=a(1+\xi(\theta)), \quad \xi(\pi)=0$$

причем Γ' совпадает с Γ при $\theta_* < \theta < \pi$ (см. фиг. 1, где область гидродинамического следа заштрихована).

При $r > r_0(\theta)$ из (1.2) и (2.1) имеем

$$(2.3) \quad -\nabla \Pi_0 - \rho \beta K \mathbf{u} = -\nabla \Pi_1 + \rho \beta K \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{w} = \nabla \varphi, \quad \Delta \varphi = \Delta \Pi_0 = 0$$

$$(2.4) \quad \Pi_0 = p + P_0 + 1/2 d_0 \varepsilon v^2 - d_0 g r, \quad \Pi_1 = P_1 + 1/2 d_1 \rho w^2 - \rho (d_1 - d_0) g r$$

Здесь φ — потенциал скорости дисперсной фазы.

Условия на удалении от пузыря имеют, очевидно, форму

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Pi_0 &= P_{0\infty} + 1/2 d_0 \varepsilon v_\infty^2 + \rho (d_1 - d_0) g r, & \mathbf{v} &= \mathbf{w}_\infty + \mathbf{u}_\infty \\ \Pi_1 &= P_{1\infty} + 1/2 d_1 \rho w_\infty^2 - \rho (d_1 - d_0) g r, & \mathbf{w} &= \mathbf{w}_\infty \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

где \mathbf{w}_∞ — скорость дисперсной фазы вдали от пузыря в рассматриваемой системе координат.

Из (2.3) следует:

$$(2.6) \quad \Pi_0 + \Pi_1 = \Pi_{0\infty} + \Pi_{1\infty}$$

Из (2.4) — (2.6) получаем представление для P_1

$$(2.7) \quad P_1 = P_{0\infty} + P_{1\infty} + 1/2 d_0 \varepsilon v_\infty^2 + 1/2 d_1 \rho (w_\infty^2 - w^2) + \rho (d_1 - d_0) g r - \Pi_0$$

Рассмотрим граничные условия на общей части Γ'' поверхностей Γ и Γ' . При этом учитываем, во-первых, что форма пузыря не будет изменяться, если лишь $w_n(\Gamma) = w_0 r_0(\theta) / r_0(\pi)$, где w_0 — нормальная скорость дисперсной фазы в лобовой точке A на фиг. 1. Во-вторых, сопротивление движению жидкости в промежутках между движущимися частицами значительно превышает сопротивление течению внутри пузыря, так что можно вообще не рассматривать последнее течение, заменив второе условие (1.6) условием постоянства Π_0 на Γ'' (экспериментально справедливость такого условия была подтверждена в [15]). Таким образом

$$(2.8) \quad \partial \varphi / \partial n = w_0 r_0(\theta) / r_0(\pi)$$

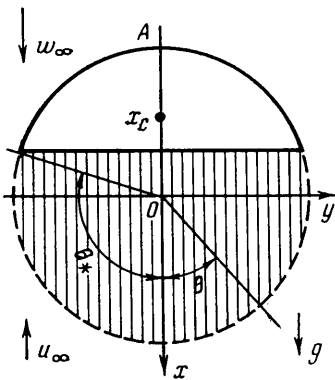
$$\Pi_0 = P_{0\infty} + 1/2 d_0 \varepsilon v_\infty^2 - C a \quad (r \in \Gamma'')$$

Первое условие (1.6) с учетом (2.7) переписывается в форме

$$(2.9) \quad \rho (d_1 - d_0) g r + C a +$$

$$+ 1/2 d_1 \rho (w_\infty^2 - w^2 + L_1 u_\infty^2) = 0$$

Величина C в (2.8) и (2.9) представляет собой некоторую постоянную. Аналогично, на поверхности $\Gamma - \Gamma''$ следует наложить прежние условия (2.8) и (2.9), а на поверхности $\Gamma' - \Gamma''$ — условия непрерывности нормальных напряжений и потоков фаз.



Фиг. 1

Таким образом, в общем случае нельзя ограничиться анализом только потенциального течения вне Γ' , а необходимо рассматривать также течение в области гидродинамического следа. Исключение составляют только очень мелкие пузыри, когда течение потенциально почти всюду и отрыв пограничного слоя с поверхности пузыря происходит в непосредственной близости от кормовой точки, а также весьма крупные пузыри, скорость подъема которых значительно превышает w_0 . Эти предельные случаи и рассматриваются ниже.

3. Пусть пузырь достаточно мал, так что течение вокруг него потенциально [8]. В этом случае поверхность $\Gamma = \Gamma'$ в первом приближении представляет собой сферу и в (2.2) можно принять $\xi(\theta) = 0$. Решение задачи (2.3), (2.5), (2.8) имеет вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varphi &= w_\infty \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) r \cos \theta + w_0 \frac{a^2}{r} \\ P_0 &= P_{0\infty} + \frac{1}{2} d_0 \varepsilon v_\infty^2 + \rho (d_1 - d_0) g \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) r \cos \theta - C \frac{a^2}{r} \end{aligned}$$

Очевидно, $w_n(\Gamma) = w_0$. Применяя условие (1.7), получаем

$$(3.2) \quad w_0 = \varepsilon C / \rho \beta K$$

Представим уравнение (2.9) в форме

$$(3.3) \quad 2(\cos \theta + \alpha) + \psi^2 [1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta + (L_1 - \varepsilon^2 \alpha^2) R^2]$$

$$(3.4) \quad \alpha = \frac{C}{\rho (d_1 - d_0) g}, \quad \psi^2 = \frac{w_\infty^2}{(1 - d_0/d_1) g a}, \quad R = \frac{u_\infty}{w_\infty}$$

В соответствии с методом [4] удовлетворим это уравнение в окрестности лобовой точки поднимающегося пузыря ($\theta = \pi$). Для этого разложим (3.3) в ряд по степеням $\sin^2 \theta$ вблизи $\theta = \pi$ и приравняем нулю коэффициенты двух первых членов разложения. Это дает следующие уравнения:

$$(3.5) \quad \psi^2 = \frac{4}{9}, \quad \alpha = \frac{7}{9} - \frac{2}{9} (L_1 - \varepsilon^2 \alpha^2) R^2$$

Скорость центра тяжести сферического пузыря в используемой системе координат равна, очевидно, нулю. Поэтому w_∞ совпадает со скоростью подъема пузыря U в лабораторной системе координат. Таким образом, из (3.4) и (3.5) получаем

$$(3.6) \quad U = \frac{2}{3} [(1 - d_0/d_1) g a]^{1/2}$$

что совпадает с известной формулой Дэвиса и Тейлора [4] для скорости движения крупной капли в однородной среде. Далее, выбирая корень второго уравнения (3.5), остающийся конечным при любых R , получаем

$$(3.7) \quad \alpha = \frac{9}{4\varepsilon^2 R^2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{8}{9} \varepsilon^2 R^2 \left(\frac{7}{9} - \frac{2}{9} L_1 R^2 \right) \right]^{1/2} \right\}$$

Зависимость этой величины от параметра R при $\varepsilon = 0.4$ и $L_1 = 1$ изображена на фиг. 2. Параметр α положителен при $R < R_*$ и отрицателен при $R > R_*$, где

$$(3.8) \quad R_* = (7/2L_1)^{1/2}$$

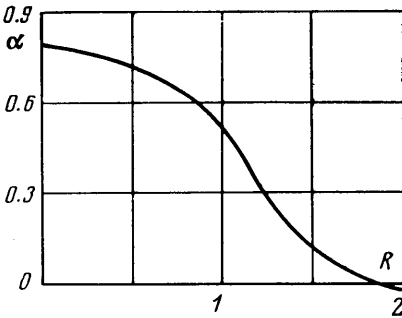
Изменение объема пузыря V описывается соотношением

$$(3.9) \quad dV/dt = 4\pi a^2 \varepsilon \alpha u_\infty$$

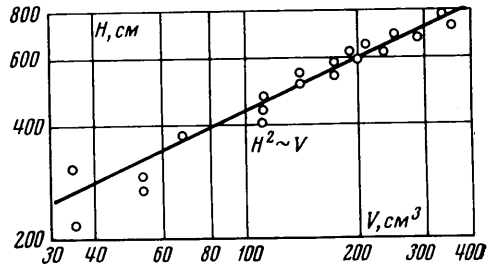
Следовательно, имеется критический радиус пузыря $a=a_*$, соответствующий пузырю в состоянии неустойчивого равновесия, такой, что более крупные пузыри ($a>a_*$) растут по мере подъема в слое, а более мелкие сокращаются в размерах. Из (3.4), (3.6) и (3.8) получаем

$$(3.10) \quad a_* = \frac{9L_1}{14} \frac{u_\infty^2}{(1-d_0/d_1)g}$$

Экспериментально наблюдать это явление можно в ситуациях, когда $U \sim u_\infty$. Исчезновение мелких пузырей в псевдооживленном слое и рост крупных действительно наблюдались в опытах [16, 17]. Как следует из анализа, изменение объема пузыря обусловлено необходимостью поддержи-



Фиг. 2



Фиг. 3

вать динамическое равновесие частиц на его границе — пузыри постоянного объема оказываются неустойчивыми. Интуитивно такая точка зрения была высказана в [17].

Удовлетворить условию (2.9) на всей поверхности мелкого пузыря можно, если считать, что его поверхность слегка отличается от сферической и описывается формулой (2.2), в которой $\xi(\theta) \ll 1$. В принципе нетрудно задать некоторой разумной функцией $\xi(\theta)$, содержащей определенное число постоянных параметров, которыми можно варьировать, и решить затем линеаризованную задачу для возмущений $\delta\varphi$, $\delta\Pi$ и потенциалов φ и Π_0 , получаемую при помощи стандартных методов теории регулярных возмущений. С точностью до членов первого порядка по $\xi(\theta)$ имеем задачу

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \Delta\delta\varphi=0, \quad \delta\varphi=0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad \partial\delta\varphi/\partial r = -a\xi\partial^2\varphi/\partial r^2 + w_0\xi \quad (r=a) \\ \Delta\delta\Pi=0, \quad \delta\Pi=0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad \delta\Pi = -a\xi\partial\Pi_0/\partial r \quad (r=a) \end{aligned}$$

После решения (3.11) легко подобрать постоянные, входящие в определение $\xi(\theta)$, так, чтобы удовлетворить условию (2.9) не только вблизи лобовой точки пузыря, но также в других точках на Γ , число которых равно числу указанных постоянных. Увеличивая число этих постоянных, можно получить приближенное решение задачи об обтекании пузыря с неизвестной границей, весьма слабо отличающееся от точного.

4. Рассмотрим теперь крупный пузырь, когда $U \gg u_\infty \sim w_0$ и в первом приближении можно считать, что поверхность Γ' представляет собой сферу, а сам пузырь — сферический сегмент, отрезаемый плоскостью $r \cos \theta = a \cos \theta_*$ (см. фиг. 1). Пренебрегая радиальным движением дисперсной фазы на Γ' при определении потенциала φ вблизи Γ' , получаем

$$(4.1) \quad \varphi \approx w_\infty (1 + a^3/2r^3) r \cos \theta$$

Простой анализ показывает, что вдали от пузыря

$$(4.2) \quad \varphi \approx w_\infty r \cos \theta + \kappa w_0 \frac{a}{r}, \quad \Pi_0 \approx \rho (d_1 - d_0) g r \cos \theta - C \frac{a}{r}$$

где κ — доля объема внутри Γ' , занятая пузырем. Из (1.7) имеем, интегрируя по удаленной сфере и используя (4.2)

$$(4.3) \quad w_0 = \varepsilon C / (\kappa \rho \beta K)$$

Скорость центра тяжести x_c пузыря в данном случае отлична от нуля и равна $w_c = w_0 |x_c| a^{-1}$. Имеем для κ и w_c

$$(4.4) \quad \kappa = 1/2 (1 + \cos \theta_*)^2 (1 - 1/2 \cos \theta_*)$$

$$w_c = w_0 F(\theta_*), \quad F(\theta_*) = \frac{3}{8} \frac{1 - 2 \cos^2 \theta_* + \cos^4 \theta_*}{(1 + \cos \theta_*)^2 (1 - 1/2 \cos \theta_*)}$$

причем функции $\kappa(\theta_*)$ и $F(\theta_*)$ обращаются в нуль при $\theta_* = \pi$, 0 и в единицу при $\theta_* = 0$, π соответственно.

Условие (2.9) при $w_0 \ll U \sim w_\infty$ приобретает вид

$$(4.5) \quad 2(\cos \theta + \alpha) + \psi^2 (1 - 9/4 \sin^2 \theta) = 0$$

откуда следует $\psi^2 = 4/9$, $\alpha = 7/9$. Учитывая, что наблюдаемая скорость подъема пузыря $U = w_\infty + w_c$, получаем, следовательно

$$(4.6) \quad U = 2/9 [(1 - d_0/d_1) g a]^{1/2} + \Phi(\theta_*) \varepsilon u_\infty, \quad \Phi = \kappa^{-1} F$$

Таким образом, скорость подъема крупных пузырей в псевдооживленном слое несколько превышает аналогичную скорость для крупных пузырей или капель в однородной жидкости, но стремится к ней асимптотически с увеличением радиуса пузыря. Этот вывод согласуется с анализом экспериментов, проведенным в [5]. Экспериментальное подтверждение линейной зависимости U от εu_∞ следует, например, из опытов работы [18].

Увеличение объема пузыря описывается по-прежнему формулой (3.9), в которой $\alpha = 7/9$. Учитывая, что $dH/dt = U$, где H — вертикальная координата центра тяжести пузыря в слое, из (3.9) и (4.6) получаем с точностью до членов первого порядка по $\varepsilon u_\infty / U$

$$(4.7) \quad \frac{dV}{dH} = \frac{14\pi}{3} \left(\frac{d_1}{d_1 - d_0} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon u_\infty}{\sqrt{g}} a^{3/2} = 7 \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{d_1}{d_1 - d_0} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon u_\infty}{\sqrt{\kappa g}} \sqrt{V}$$

Экспериментально величина (4.7) для крупных пузырей исследовалась в [16], где был сделан вывод о ее пропорциональности объему пузыря V . Однако внимательный анализ опытных результатов [16] в плоскости $(dV/dH, V)$ показывает, что эти результаты могут быть с равным успехом аппроксимированы также кривой $dV/dH \sim \sqrt{V}$. На фиг. 3 приведена одна из опытных зависимостей \dot{V} от H , полученная в [16] для пузырей разных объемов в слое частиц неправильной формы со средним диаметром 55 мк, псевдооживленном воздухе при $\varepsilon u_\infty \approx 0.252$ см/сек. Видно, что данные эксперимента удовлетворительно аппроксимируются кривой $V \sim H^2$, следующей из (4.7). Кроме того, опыты [16] полностью подтверждают линейную зависимость величины dV/dH от εu_∞ для крупных пузырей, отраженную в (4.7).

Для нахождения Π_0 в данном случае необходимо решать уравнение Лапласа в области вне сферического сегмента при условии постоянства Π_0 на поверхности сегмента и условии (2.5) вдали от него.

Выражения (4.6) и (4.7) содержат неизвестный параметр — критический угол θ_* , при котором происходит отрыв потока от поверхности пузыря. Для его определения рассмотрим итерационную процедуру получения решения для φ в случаях, когда поверхность Γ' отличается от сферы $r=a$ и в области $\theta_* < \theta < \pi$ представляется формулой (2.2) с малой $\xi(\theta)$. Последовательные итерации могут быть построены следующим образом. Возьмем в качестве нулевого приближения к Γ' сферу $r=a$; потенциал скорости дисперсной фазы определяется тогда при помощи (4.1). На поверхности (2.2), отличающейся от $r=a$, потенциал φ приближенно равен

$$(4.8) \quad \varphi \approx {}^3/2 w_\infty r (1 - \xi(\theta)) \cos \theta, \quad w^2 \approx w_0^2 \approx {}^9/4 w_\infty^2 (1 - 2\xi(\theta)) \sin^2 \theta$$

Используя (4.8) в условии (2.9), определим $\xi(\theta)$ из этого условия. Далее рассматриваем обтекание поверхности (2.2) с найденной $\xi(\theta)$ и вычисляем новый потенциал φ , заменяющий (4.1). После этого вычисляем значение потенциала на поверхности $r_0'(\theta)$, слегка отличающейся от $r_0(\theta)$ в (2.2), и снова определяем разность $r_0' - r_0$ из условия (2.9), используя указанное значение потенциала, и т. д. Ясно, что такая вполне регулярная процедура позволяет в принципе описать отклонения истинной формы пузыря от сферы $r=a$ при тех значениях θ , когда функция $\xi(\theta)$ в (2.2) на самом деле может считаться малой по сравнению с единицей. Естественно отождествить критическое значение угловой координаты θ_* как раз с тем значением θ , при котором условие малости $\xi(\theta)$ существенным образом нарушается.

Используя (2.2) и формулу (4.8) вместо (4.1), условие (2.9) для крупных пузырей запишем в виде ($\psi^2 = {}^4/9$, $\alpha = {}^7/9$)

$$(4.9) \quad 2[\alpha + \cos \theta (1 + \xi(\theta))] + \psi^2 [1 - {}^9/4 (1 - 2\xi(\theta)) \sin^2 \theta] = 0$$

Отсюда видно, что $\xi(\theta)$ обращается в бесконечность при значении θ , равном корню уравнения $\cos \theta_* + \sin^2 \theta_* = 0$.

Решение этого уравнения дает $\cos \theta_* \approx -0.62$, что соответствует углу $\pi - \theta_* \approx 51^\circ 40'$, $\kappa \approx 0.095$, $F \approx 0.75$, $\Phi \approx 7.9$.

Отметим, что точно такие же рассуждения применимы и к пузырю, поднимающемуся в однородной жидкости. В этом смысле полученный результат позволяет выразить объем пузыря через радиус кривизны его лобовой части и завершить тем самым решение задачи о подъеме в жидкости крупных пузырей, поставленной Тейлором, который впервые вычислил связь между радиусом кривизны и скоростью подъема [⁴, ¹⁹]. Согласно многим экспериментальным данным [¹⁹], наблюдаемый угол $\pi - \theta_*$ лежит в интервале между 46 и 64° . Анализ опытов с очень крупными пузырями (когда влияние поверхностного натяжения заведомо мало), проведенный в [²⁰], дал значение $\pi - \theta_* \approx 50^\circ$, что весьма близко к вычисленному здесь $\pi - \theta_* \approx 51^\circ 40'$.

Отметим в заключение, что рост пузыря, поднимающегося в псевдооживленном слое, существенно сказывается на процессах конвективной диффузии или теплопроводности вблизи пузыря. Действительно, радиальное движение жидкости, втекающей в пузырь, может значительно облегчить приток вещества из плотной фазы слоя к пузырю и в такой же степени затруднить перенос вещества из пузыря в плотную фазу. Радиальное движение частиц дисперсной фазы, теплоемкость которых обычно намного превышает теплоемкость жидкой фазы, должно существенно влиять на теплообмен между пузырем и плотной фазой псевдооживленного слоя. Представляется несомненным, что эти факторы должны учитываться в современной теории процессов переноса в псевдооживленных слоях в условиях неоднородного псевдооживления.

Подчеркнем, что формулы (3.9) и (4.7) описывают только рост пузырей за счет «регулярного» притока жидкой фазы к ним, но не имеют отношения к увеличению объема пузырей в результате их коалесценции.

Поступила 2 XI 1973.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Davidson J. F., Harrison D.* Fluidised Particles. Cambridge Univ. Press., 1963. (Рус. перев.: Псевдооживление твердых частиц. М., «Химия», 1965.)
2. *Davidson J. F.* Symposium on Fluidisation — Discussion. Trans. Instn. Chem. Engrs. 1961, vol. 39, p. 230.
3. *Jackson R.* The mechanics of fluidized beds, pt 1. The stability of the state of uniform fluidization, pt 2. The motion of fully developed bubbles. Trans. Instn. Chem. Engrs, 1963, vol. 41, No. 1.
4. *Davies R. M., Taylor G. I.* The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 200, No. 1062.
5. *Murray J. D.* On the mathematics of fluidization, pt 2. Steady motion of fully developed bubbles. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, pt 1.
6. *Clift R., Grace J. R., Cheung L., Do T. H.* Gas and solids motion around deformed and interacting bubbles in fluidized beds. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, pt 1.
7. *Collins R.* The effect of a bubble on gas flow in a plane fluidized bed of finite width: two theories compared. Chem. Engng Sci., 1969, vol. 24, No. 8.
8. *Partridge B. A., Rowe P. N.* Analysis of gas flow in a bubbling fluidised bed when cloud formation occurs. Trans. Instn. Chem. Engrs, 1966, vol. 44, No. 9.
9. *Бувевич Ю. А., Марков В. Г.* Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензии умеренной концентрации. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
10. *Buyevich Yu. A.* Statistical hydromechanics of disperse systems, pt 1. Physical background and general equations. J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, pt 3.
11. *Гольдштик М. А., Козлов Б. Н.* Элементарная теория концентрированных дисперсных систем. ПМТФ, 1973, № 4.
12. *Buyevich Yu. A.* Statistical hydromechanics of disperse systems. pt 3. Pseudo-turbulent structure of homogeneous suspensions. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt 2.
13. *Meissner H. P., Kusik C. L.* Particle velocities in a gas fluidized bed. Canad. J. Chem. Engng, 1970, vol. 48, No. 4.
14. *Lockett M. J., Harrison D.* The distribution of voidage fraction near bubbles rising in gas-fluidized beds. Proc. Internat. Sympos. on Fluidization, Eindhoven. Amsterdam, Netherlands Univ. Press., 1967.
15. *Reuter H.* Druckverteilung um Blasen in Gas — Feststoff — Fließbett. Chem.-Ingr.-Techn., 1963, Bd 35, Nr 2.
16. *Davies L., Richardson J. F.* Gas interchange between bubbles and the continuous phase in fluidised bed. Trans. Instn. Chem. Engrs, 1966, vol. 44, No. 8.
17. *Rowe P. N., Matsuno R.* Single bubbles injected into a gas fluidised bed and observed by X-rays. Chem. Engng Sci., 1971, vol. 26, No. 6.
18. *Rowe P. N., Partridge B. A.* An X-ray study of bubbles in fluidised beds. Trans. Instn. Chem. Engrs, 1965, vol. 43, No. 5.
19. *Batchelor G. K.* An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Univ. Press., 1970. (Рус. перев.: Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.)
20. *Davenport W. G., Bradshaw A. V., Richardson F. D.* Behaviour of spherical cap bubbles in liquid metals. J. Iron Steel Inst., 1967, vol. 205, pt 10.