

**ОСЕССИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ
В РЕЖИМЕ РАЗВИТОЙ КАВИТАЦИИ**

Э. Л. АМРОМИН, А. Н. ИВАНОВ

(Ленинград)

При отсутствии аналитических решений исследование осесимметричных кавитационных течений производится, как правило, путем численных расчетов. Однако здесь еще встречаются существенные трудности, которые подробно освещены в обзорном докладе Биркгофа [1].

Ниже рассмотрен один из методов интегральных уравнений, использовавшийся ранее для численных расчетов плоского кавитационного течения [2]. В работе [3] приведены общие соображения о его применении для расчетов осесимметричных течений. Этот метод оказался эффективным при численных расчетах осесимметричных течений, а также при аналитическом исследовании кривизны меридионального сечения границы каверны вблизи точки ее отрыва от тела. Последний вопрос рассматривался ранее в [4], где для случая кругового конуса с прямолинейной образующей показано, что кривизна обращается в бесконечность. Порядок бесконечности установлен не был.

1. Рассматривается безвихревое осесимметричное кавитационное обтекание твердого тела установившимся поступательным потоком идеальной, невесомой, несжимаемой жидкости. Для схематизации течения в хвосте каверны используется обобщенная схема Рябушинского, согласно которой хвостовая часть границы каверны замыкается на фиктивное твердое тело произвольной формы. Решение кавитационной задачи заключается в нахождении формы каверны и распределения скоростей по лобовой части тела, свободной от кавитации. В общем случае необходимо определять также размеры фиктивного тела.

Вследствие непроницаемости границ каверны можно рассматривать обтекание замкнутой области, ограниченной смоченными частями основного и фиктивного тел и границами каверны, как обтекание единого твердого тела. Заменяя обтекание последнего обтеканием системы вихревых колец, концентрических относительно оси симметрии тела, можно составить два интегральных соотношения, связывающих форму контура меридионального сечения единого тела с интенсивностью вихревых колец [5]. Одно из соотношений составляется из условия непроницаемости границ единого тела, а другое — из условия равенства вихревой интенсивности в данной точке контура меридионального сечения касательной составляющей скорости в этой точке. Ниже приведены эти соотношения в форме, удобной для численных расчетов.

$$(1.1) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{4\pi y} \int_{-1}^1 [K(k)S_1 + E(k)S_2] \frac{\gamma(\xi)}{\rho_2} d\xi$$

$$(1.2) \quad \gamma(x) = \frac{1}{2\pi Q} \int_{-1}^1 [K(k)R_1 + E(k)R_2] \frac{\gamma(\xi)}{\rho_2} d\xi + \cos(\tau, x)$$

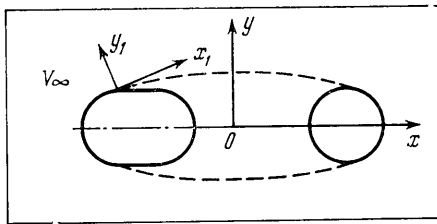
$$R_1 = R_3 - \frac{8\eta}{k^2} + \frac{R_3 - \eta k^2}{k'^2}, \quad R_2 = 4\eta \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) - 2R_3$$

$$R_3 = y - \frac{\partial y}{\partial x} t_2, \quad t_2 = x - \xi, \quad \rho_2 = \sqrt{t_2^2 + t_1^2}, \quad t_1 = y + \eta$$

$$k^2 = \frac{4y\eta}{\rho_2^2}, \quad k'^2 = 1 - k^2, \quad s_1 = \frac{\partial y}{\partial x} y + t_2, \quad Q = \frac{y}{\cos(\tau, x)}$$

$$s_2 = \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{y - \eta}{k'^2} - t_1 \right) - t_2 \left(1 + \frac{1}{k'^2} \right)$$

Здесь K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; γ — значение вихревой интенсивности, отнесенное к величине скорости на бесконечности; τ — угол между касательной к контуру меридионального



Фиг. 1

сечения тела и осью x ; x, y, ξ, η — координаты фиксированной и произвольной точек контура меридионального сечения тела (фиг. 1); расстояния передней и задней критических точек от начала координат приняты равными единице, пунктирной линией на фиг. 1 обозначены границы каверны.

Приведенные соотношения обычно используются для определения скоростей на контуре меридионального сечения твердого тела при его безотрывном обтекании. При этом (1.1) рассматривается как линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода, а (1.2) — уравнение Фредгольма второго рода относительно вихревой интенсивности γ .

Эти же соотношения по отдельности или в комбинации можно использовать для решения кавитационной задачи. В этом случае их следует рассматривать как интегродифференциальные уравнения смешанного типа. На смоченных частях контура, свободных от кавитации, искомой величиной является γ , а соотношения следует рассматривать как упомянутые выше уравнения Фредгольма. На границах каверны следует считать известной величиной γ , которая в силу постоянства давления в каверне является величиной постоянной, а соотношения становятся нелинейными интегродифференциальными уравнениями для определения формы меридионального сечения границы каверны $y=f(x)$. При этом как $\gamma(x)$, так и $\partial y / \partial x$ на всем контуре меридионального сечения тела и каверны считаются непрерывными функциями.

2. Используем уравнение (1.1) для исследования кривизны контура меридионального сечения каверны вблизи точки отрыва. Для этой цели преобразуем (1.1) к новым координатным осям с началом в точке отрыва, с осью x_1 , направленной по касательной к контуру, и осью y_1 , направленной по нормали к контуру в этой точке (фиг. 1). Выделим в (1.1) интеграл по малому, но конечному промежутку вблизи начала координат $-\varepsilon \leq \xi_1 \leq \varepsilon$. Этот интеграл в указанном промежутке будет иметь единственную особенность порядка $(\xi_1 - x_1)^{-1}$, а интеграл по остальной части контура будет непрерывной функцией $\varphi_1(x_1)$ со слабыми особенностями логарифмического типа на концах промежутка. В интеграле по промежутку $-\varepsilon \leq \xi_1 \leq \varepsilon$ выделим, в свою очередь, особенность. Тогда оставшаяся часть будет непрерывной ограниченной функцией $\varphi_2(x_1)$. После отмеченных про-

цедур (1.1) можно представить в виде

$$(2.1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\gamma(\xi_1) d\xi_1}{\xi_1 - x_1} = \varphi(x_1, \varepsilon) + \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

В дальнейшем для удобства опустим у текущих и фиксированных переменных индексы, а также будем опускать постоянные множители, появляющиеся при преобразованиях, не оказывающие на конечный результат никакого влияния.

Поскольку свойства функции φ в общих чертах известны, будем ее считать известной функцией x . Тогда (2.1) можно рассматривать как линейное интегродифференциальное уравнение смешанного типа. При $-\varepsilon \leq x \leq 0$ задана функция $\partial y / \partial x$, а определению подлежит $\gamma(x)$. При $0 \leq x \leq \varepsilon$ подлежит определению $\partial y / \partial x$, а заданной считается $\gamma = \text{const}$. По условию γ и $\partial y / \partial x$ — функции непрерывные. Непрерывность должна соблюдаться и при переходе через точку отрыва границы каверны от тела, а в самой точке отрыва в принятой системе координат $\partial y / \partial x = 0$.

Будем пока считать правую часть (2.1) известной при $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ и воспользуемся формулой обращения сингулярного уравнения [6], дающей конечные значения γ в точках $\pm \varepsilon$

$$(2.2) \quad \gamma(x) = -\sqrt{\varepsilon^2 - x^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\xi, \varepsilon) + \partial \eta / \partial \xi}{(x - \xi) \sqrt{\varepsilon^2 - \xi^2}} d\xi$$

При этом сумма функций, стоящих в числителе (2.2), должна быть такой, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\xi, \varepsilon) + (\partial \eta / \partial \xi)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \xi^2}} d\xi = 0$$

Вводя для известной части интеграла в (2.2) обозначение $\psi(x, \varepsilon)$, уравнение (2.2) преобразуем к виду

$$(2.3) \quad - \int_0^{\varepsilon} \frac{(\partial \eta / \partial \xi) d\xi}{(x - \xi) \sqrt{\varepsilon^2 - \xi^2}} = \frac{\gamma_0 - \psi(x, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 - x^2}}$$

$$(2.4) \quad \psi(x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon^2 - x^2} \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\xi, \varepsilon) d\xi}{(x - \xi) \sqrt{\varepsilon^2 - \xi^2}} + \int_{-\varepsilon}^0 \frac{\partial \eta / \partial \xi d\xi}{(x - \xi) \sqrt{\varepsilon^2 - \xi^2}} \right]$$

Здесь принято $\gamma(x) = \gamma_0 = \text{const}$, поскольку на границе каверны скорость постоянна.

Оценка интегралов в правой части (2.4) с учетом особенностей функций $\varphi(\xi, \varepsilon)$ и $\partial \eta / \partial \xi$ показывает, что функция $\psi(\varepsilon, x)$ в интервале $0 \leq x \leq \varepsilon$ конечна и непрерывна.

Для решения (2.3) вновь воспользуемся формулой обращения [6]

$$(2.5) \quad - \frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{x(\varepsilon - x)} \int_0^{\varepsilon} \frac{\gamma_0 - \psi(\xi, \varepsilon)}{(x - \xi) \sqrt{\xi(\varepsilon + \xi)}} d\xi$$

Здесь обращение соответствует конечному значению в точке $\xi = 0$ функции, стоящей множителем при $(x - \xi)^{-1}$ в левой части (2.3), и бесконечному значению в точке $\xi = \varepsilon$.

Произведя оценку интеграла и его производной в (2.5) для малых x ($x \ll \varepsilon$), легко показать, что при $x \rightarrow 0$ со стороны границы каверны интег-

рал является ограниченной величиной, отличной от нуля, а его производная имеет порядок x^{-1} . С учетом этих оценок выражение для кривизны меридионального сечения каверны вблизи точки отрыва, равной в выбранной системе координат $\partial^2 y / \partial x^2$, может быть записано в следующем виде:

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{B_1}{\sqrt{x}} + B_2 + B_3 \sqrt{x} + \dots$$

Выражению (2.6) соответствует следующий вид γ вблизи точки отрыва на части тела, свободной от кавитации

$$(2.7) \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \sqrt{|x|} + \gamma_2 \sqrt{|x|} + \dots$$

Таким образом, при $x \rightarrow 0$ кривизна может обращаться в бесконечность, имеющую тот же порядок, что и в плоском случае.

3. По приведенным в п. 1 формулам были произведены на ЭЦВМ М-220 расчеты кавитационного обтекания двух тел — шара и конуса, с использованием схемы Рябушинского.

Была принята следующая процедура вычислений. Сначала задавалась форма меридионального сечения так называемой пробной границы каверны. Она принималась простейшей: для шара — в виде двух отрезков параллельных прямых, касающихся окружностей, которые являются меридиональными сечениями основного и фиктивного шара; для конуса эти отрезки соединялись с кромками сечений основного и фиктивного конусов кусками кривых, обеспечивающих непрерывность касательной при переходе от отрезков прямых к сечениям конусов.

Далее по формуле (1.2) определялись в первом приближении значения γ на частях тел, свободных от кавитации. При этом на пробной границе каверны полагалось $\gamma = \text{const}$, поскольку скорость на границе каверны в невесомой жидкости постоянна. Вычисленные значения γ подставлялись в соотношение (1.1), которое становилось нелинейным интегродифференциальным уравнением относительно функции $y(x)$. Из этого уравнения функция $y(x)$ определялась методом последовательных приближений путем последовательной подстановки в правую часть (1.1) значений координат пробной границы каверны и т. д. Определенные таким образом координаты границы каверны использовались вновь для вычисления γ по формуле (1.2) и т. д. Вычисления производились до тех пор, пока последующее приближение не отличалось от предшествующего на заранее установленную величину.

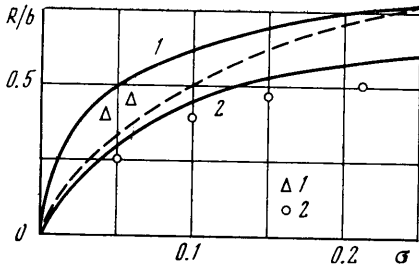
При вычислениях на частях тел, свободных от кавитации, была использована кусочно-постоянная аппроксимация функции γ/y , на меридиональном сечении границ каверны полагалось $\gamma = \text{const}$, а $y(x)$ аппроксимировалась кусочно-линейной зависимостью, за исключением участков, непосредственно примыкающих к точкам отрыва, где использовались аппроксимации, вытекающие из формул (2.6) и (2.7). Аппроксимация (2.6) удобна для определения положения точек отрыва каверны от шара.

Так же как и в случае плоского кавитационного обтекания гладкого контура, при произвольном задании положения точки отрыва кривизна меридионального сечения границы каверны в этой точке, вообще говоря, бесконечно большая, и при заданном режиме течения, определяемом величиной числа кавитации, становится конечной в одной точке. Условие конечности кривизны сечения каверны для определения положения точки отрыва (точки «гладкого» отрыва), сформулированное Бриллюэном, использовано и при расчете обтекания шара. Этой точке в данном случае соответствует равенство нулю коэффициента B_1 в (2.6). Сначала положение точки отрыва задается произвольно. Если она оказывается впереди точки гладкого отрыва, то B_1 имеет отрицательное значение, а если сзади, — то положительное и монотонно уменьшается до нуля по мере приближения к искомому значению координат точки гладкого отрыва. Таким образом принципиально нетрудно «угадать» положение точки гладкого отрыва на сечении шара.

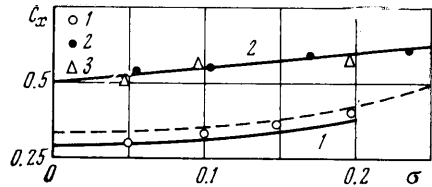
Результаты расчетов контролировались с помощью решения «прямой» задачи, т. е. путем определения γ из уравнения (1.2) на всем меридиональном сечении, включая границы каверны, без допущения на них постоянства γ . Оказалось, что почти на всей границе каверны γ имеет постоянное значение (с принятой при расчетах точностью) и только на небольших участках, примыкающих к точкам отрыва, отклоняется на величину, не превышающую 2% указанного постоянного значения.

Время, затрачиваемое на расчет одного режима обтекания (каверна заданной длины) на ЭЦВМ М-220, составляет 10–15 мин.

На фиг. 2 приведены кривые, изображающие зависимости от числа кавитации σ отношения R/b радиуса шара и радиуса основания конуса к половине ширины каверны, полученные путем расчетов по приведенным в статье формулам. Кривая 1 относится к шару, а кривая 2 — к конусу, половина угла при вершине которого равна 45° . Для сравнения приведены экспериментальные данные [7]; точки 1 относятся к шару, 2 — к конусу.



Фиг. 2



Фиг. 3

Расчетные кривые расположены несколько выше экспериментальных точек как для шара, так и для конуса. Здесь же приведены результаты [8] (пунктир), которые дают меньшие значения указанного отношения для шара, чем экспериментальные.

При оценке соответствия между расчетными и экспериментальными данными следует иметь в виду не только схематическое представление течения в хвосте каверны, принятое при расчетах, но и то обстоятельство, что опыты проводились в условиях влияния на каверну свободной поверхности воды, а также державок, на которые крепились модели. При этом нельзя не учитывать и влияние сил весомости воды на форму каверны. Что касается расчетов [8], то они производились для условий обтекания шара в круглой трубе, и приведенные на фиг. 2 данные получены путем экстраполяции на условия обтекания шара безграничным потоком.

На фиг. 3 приведены кривые зависимости коэффициента сопротивления C_x шара и конуса от числа кавитации σ , полученные путем расчетов по приведенным в статье формулам. Кривая 1 относится к шару, а кривая 2 — к конусу. Здесь же приведены расчетная зависимость [8] для шара (пунктир) и результаты опытов из работ [7] и [9] (точки 1 относятся к шару [7], 2 — к конусу [7], 3 — к конусу [9]).

На фиг. 4 приведены экспериментальные и расчетные зависимости от числа кавитации положения точек отрыва каверны от поверхности шара, определяемого углом β , который отсчитывался от передней критической точки. Кривая 1 соответствует расчетам по приведенным в статье формулам, кривая 2 — расчетам [8], кривая 3 — экспериментам [7]. При малых числах кавитации согласование расчетных зависимостей с данными опытов можно считать удовлетворительным. С ростом числа кавитации в опытах заметна существенная тенденция увеличения угла отрыва каверны, тогда как расчеты показывают сравнительно слабое его увеличение.

Поступила 26 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G.* Mathematical analysis of cavitation. Труды Международного симпозиума по неустановившимся течениям воды с большими скоростями. Л., 1971. М., «Наука», 1973.
 2. *Барабанов В. А., Бугузов А. А., Иванов А. Н., Титов И. А.* Отрывное кавитационное обтекание профилей в случае глассирования и в безграничном потоке. Труды Международного симпозиума по неустановившимся течениям воды с большими скоростями. Л., 1971. М., «Наука», 1973.
 3. *Айылчиев А., Саламатов Д.* К струйному обтеканию осесимметричных тел вращения. В сб. «Материалы 1-й конференции молодых ученых АН КиргССР, 1965. Фрунзе, «Илим», 1970.
 4. *Гуревич М. И.* Кривизна струи в точке схода ее с конической стенки. В кн. «Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии», вып. 4. Фрунзе, «Илим», 1967.
 5. *Сидоров О. П.* Решение задачи об обтекании тела вращения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, вып. 38.
 6. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
 7. *Эпштейн Л. А.* Течения около тел вращения при малых числах кавитации. Тр. ЦАГИ, 1961, вып. 817.
 8. *Brennen C.* A numerical solution of axisymmetric cavity flows. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 37, pt. 4.
 9. *Gilbarg D.* Jets and Cavities. *Handbuch der Physik*, Bd 9, Berlin – Göttingen – Heidelberg, Springer – Verlag, 1960.
-