МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1975

УДК 532.527.2.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ НАГРЕТЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

В. В. КОЛЕСОВ, С. Н. ОВЧИННИКОВА

(Ростов-на-Дону)

Изучается влияние радиального градиента температуры на устойчивость стационарного течения вязкой жидкости между двумя твердыми концентрическими цилиндрами, вращающимися в одну сторону. Исследуется линейная задача устойчивости в приближении Буссинеска.

Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости стационарного течения относительно вращательно-симметричных возмущений. Численно рассчитаны нейтральные кривые для широкого диапазона изменения параметров задачи.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая однородная теплопроводная жидкость заполняет полость между двумя твердыми концентрическими цилиндрами радиусов R_1, $R_2(R_1<R_2)$, вращающимися в одну сторону. Угловые скорости и температуры внутреннего и внешнего цилиндров обозначим соответственно Ω_1, θ_1 и Ω_2, $\theta_2(\Omega_2/\Omega_1\geqslant 0)$.

Предположим, что массовые силы отсутствуют, поток скорости через поперечное сечение полости цилиндров равняется нулю и вязкость жидкости постоянна.

Тогда уравнения Навье — Стокса и уравнение теплопроводности допускают точное решение с вектором скорости $\mathbf{v}_0=\{v_{0r}, v_{0\varphi}, v_{0z}\}$, температурой T_0 и давлением $\Pi_0(r, \varphi, z$ — безразмерные цилиндрические координаты)

$$\mathbf{v}_0=\{0, ar+b/r, 0\},\quad T_0=c\ln r+d \tag{1.1}$$

$$\Pi_0=\int\limits_1^r (a+b/\rho^2)^2[1-\beta(T_0\theta_*-\theta_1)]\rho\, d\rho+\mathrm{const}$$

$$a=L_*(\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2)/v_*(R_2^2-R_1^2)$$

$$b=(\Omega_1-\Omega_2)R_2^2R_1^2/L_*v_*(R_2^2-R_1^2)$$

$$c=(\theta_2-\theta_1)/\theta_*\ln(R_2/R_1)$$

$$d=\left(\theta_1\ln\frac{R_2}{L_*}-\theta_2\ln\frac{R_1}{L_*}\right)\Bigg/\ \theta_*\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Здесь β — коэффициент теплового расширения жидкости; L_*, v_* и θ_* — масштабы длины, скорости и температуры соответственно; за масштаб плотности принята плотность жидкости при температуре θ_1.

Устойчивость течения (1.1) относительно малых периодических возмущений исследовалась экспериментально [1, 2] и теоретически в [2–8]. В этих работах приводятся ссылки на ряд других публикаций.

В [2, 6] рассматривался случай «твердого вращения» ($\Omega_1=\Omega_2$) в предположении малости зазора между цилиндрами. Возмущения зависели от всех трех пространственных координат r, φ, z. В [3–5, 7, 8] предполагалось, что возмущения обладают вращательной симметрией. Нейтральные кривые для некоторых значений параметров задачи были найдены в [3–5] с помощью метода Бубнова – Галеркина. В [7] рассматривался случай узкого зазора между цилиндрами, при этом, как известно, данная задача близка к задаче о свободной конвекции в слое жидкости.

В данной работе изучается устойчивость течения (1.1) относительно вращательно-симметричных $2\pi/\alpha_0$-периодических по z бесконечно малых возмущений.

2. Достаточные признаки устойчивости и неустойчивости. Выберем масштабы длины, скорости и температуры следующим образом:

$$L_*=R_1,\ v_*=\Omega_1 R_1,\ \theta_*=\theta_1$$

Тогда в (1.1)

$$a=(\Omega R^2-1)/(R^2-1),\quad b=(1-\Omega)R^2/(R^2-1)$$

$$c=(\theta-1)/\ln R,\quad d=1,\quad R=R_2/R_1,\quad \Omega=\Omega_2/\Omega_1$$

$$\theta=\theta_2/\theta_1$$

Возмущенное течение представим в виде

$$\mathbf{v}'=\mathbf{v}_0+\mathbf{v},\ T'=T_0+cPT,\ \Pi'=\Pi_0+\Pi/\lambda$$

где $\lambda=L_* v_*/\nu=\Omega_1 R_1^2/\nu$ – число Рейнольдса, $P=\nu/\chi$ – число Прандтля, а ν и χ – соответственно коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности.

Линеаризованная задача относительно бесконечно малых вращательно-симметричных возмущений в приближении Буссинеска ($\beta\theta_*\ll 1$) имеет вид

$$\lambda\frac{\partial v_r}{\partial t}-\Delta_1 v_r+\frac{v_r}{r^2}+\frac{\partial\Pi}{\partial r}=2\lambda\omega_1 v_\varphi-\lambda\,\mathrm{Ra}\,\omega_2 T \tag{2.1}$$

$$\lambda\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}-\Delta_1 v_\varphi+\frac{v_\varphi}{r^2}=\lambda g_1 v_r,\qquad \lambda\frac{\partial v_z}{\partial t}-\Delta_1 v_z+\frac{\partial\Pi}{\partial z}=0$$

$$P\lambda\frac{\partial T}{\partial t}-\Delta_1 T=-\lambda g_2 v_r\qquad \left(\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,\qquad \int_1^R v_z r\,dr=0$$

$$v_r=v_\varphi=v_z=T=0,\quad r=1,R \tag{2.2}$$

$$\omega_1=a+b/r^2,\quad \omega_2=\omega_1^2 r,\quad g_1=-2a,\ g_2=1/r$$

Здесь $\mathrm{Ra}=\beta\theta_1 cP$ – число Рэлея.

Аналогично тому, как это было сделано для течения Куэтта [9], можно показать, что выполняется следующая теорема.

Теорема. Если выполняются неравенства $\mathrm{Ra}\leqslant 0$, $1/R^2\leqslant\Omega\leqslant\leqslant[(R^2-1)(\pi+1)+2]/2R^2$, то течение (1.1) устойчиво при любом значении числа Рейнольдса λ.

Если же $\mathrm{Ra}\geqslant 0$, $\Omega<1/R^2$, то при достаточно большом λ течение (1.1) теряет устойчивость.

3. Численные результаты. Предположим, что выполняется «принцип изменения устойчивости», т. е. критическим значением λ_* числа Рейнольдса са является наименьшее собственное число λ стационарной краевой задачи, соответствующей задаче (2.1), (2.2).

Положим в (2.1), (2.2)

$$v_r=u(r)\cos\alpha z,\quad v_\varphi=v(r)\cos\alpha z$$
$$v_z=w(r)\sin\alpha z,\quad T=\tau(r)\cos\alpha z,\quad \alpha=n\alpha_0$$

(n — натуральное число).

Получаем краевую задачу

$$(3.1)\qquad \begin{aligned}&(L-\alpha^2)^2u=2\alpha^2\lambda\omega_1 v-\alpha^2\lambda\,\mathrm{Ra}\,\omega_2\tau\\ &(L-\alpha^2)v=-\lambda g_1 u,\quad (L+g_2^2-\alpha^2)\tau=\lambda g_2 u\end{aligned}$$

$$(3.2)\qquad \begin{aligned}&L=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\\ &\frac{du}{dr}=u=v=\tau=0,\qquad r=1,R\end{aligned}$$

Обращая операторы, стоящие в левых частях системы (3.1), приходим к операторному уравнению

$$(3.3)\qquad \begin{aligned}&u=\mu Bu,\quad \mu=2\alpha^2\lambda^2\\ &B=G_2\omega_1G_1g_1+G_2\omega_2G_0g_2\,\mathrm{Ra}/2\end{aligned}$$

Интегральные операторы G_i (i=0, 1, 2) определяются равенствами

$$(G_if)(\rho)=\int_1^R G_i(r,\rho)f(\rho)\rho\,d\rho$$

где $G_0(r,\rho)$, $G_1(r,\rho)$, $G_2(r,\rho)$ — функции Грина дифференциальных операторов $-r(L+g_2^2-\alpha^2)$, $-r(L-\alpha^2)$, $r(L-\alpha^2)^2$ при краевых условиях $u=0$, $u=0$, $du/dr=u=0$ ($r=1,R$) соответственно.

Интегральное уравнение (3.3) решалось методом последовательных приближений по схеме

$$(3.4)\qquad u_{n+1}=\mu_nBu_n,\qquad \mu_n=1\Big/\int_1^R Bu_nr\,dr$$

Все расчеты проводились на ЭЦВМ БЭСМ-4.

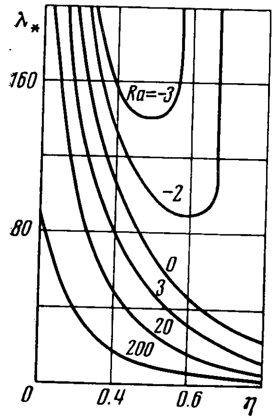
При численном интегрировании использовалась формула Гаусса для 17 узлов, что обеспечило 2—3 верных знака у числа λ_*.

Результаты расчета зависимости критического значения числа Рейнольдса от различных параметров задачи представлены в таблице и на фиг. 1, 2.

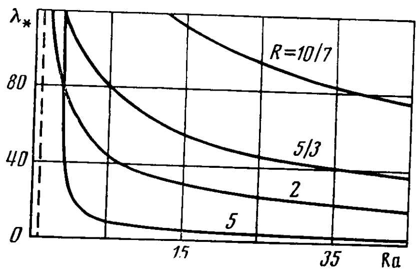
Полученные значения λ_* отличаются от экспериментальных значений [1] для случая очень узкого зазора между цилиндрами и малого перепада температур не более чем на 5%. Отличие от значений, полученных методом Бубнова — Галеркина [3] для случая $R=2$, $0\leqslant\Omega\leqslant0.25$, $-^4/_3\leqslant\mathrm{Ra}\leqslant{}^4/_3$ не превышает 0.5%.

В таблице приводится зависимость λ_* от волнового числа α для $\Omega=0$, $R=1.5$. Минимум нейтральной кривой $\lambda_*=\lambda_*(\alpha)$ почти не зависит от величин $\Omega\geqslant0$ и Ra и достигается при $\alpha\approx3/(R-1)$.

На фиг. 1 изображена зависимость λ_* от величины зазора между цилиндрами $\eta=(R-1)/R$ при $\Omega=0$, $\alpha=3/(R-1)$. На характер этой зависимости сильно влияют значения Ω и Ra. Так, например, в случае $\Omega=0$ критическое значение λ_* числа Рейнольдса при Ra$\geqslant$0 монотонно убывает с ростом величины η.



Фиг. 1



Фиг. 2

Иной характер носит влияние величины зазора на λ_* при отрицательных градиентах температуры Ra<0: при малых зазорах функция $\lambda_*=\lambda_*(R)$ возрастает, причем $\lambda_*(R)\to\infty$ при $R\to R_*$ (R_* зависит от Ω и Ra). Если же зазор R достаточно велик ($R\geqslant R_*$), то течение (1.1) оказывается устойчивым при любом значении числа Рейнольдса λ, т. е. имеет место явление абсолютной стабилизации.

Изучение зависимости λ_* от отношения угловых скоростей цилиндров показывает, что при достаточно больших положительных градиентах температуры (Ra$\geqslant$200 при $R=2$) критическое значение числа Рейнольдса медленно убывает с ростом Ω. При средних значениях Ra кривая $\lambda_*=\lambda_*(\Omega)$ выпукла вниз. Если же градиент температуры достаточно мал (Ra$\leqslant$2 при $R=2$), то функция $\lambda_*=\lambda_*(\Omega)$ возрастает с ростом Ω тем быстрее, чем меньше величина Ra.

$\alpha(R-1)$	Ra				
	−3	3	20	200	20000
1	365.9	238.7	147.8	53.8	5.5
2	222.7	145.7	89.8	32.6	3.3
3	196.7	128.6	79.1	28.7	2.9
4	205.9	133.8	82.1	29.7	3.0
8	412.9	249.4	147.9	52.6	5.3

На фиг. 2 изображена зависимость критического значения λ_* числа Рейнольдса от числа Рэлея Ra при $\Omega=0$, $\alpha=3/(R-1)$. Как известно [1–8], положительные градиенты температуры (Ra>0) дестабилизируют течение (1.1). На фиг. 2 этому соответствует убывание λ_* с ростом Ra ($\lambda_*(\mathrm{Ra})\to 0$ при Ra$\to\infty$).

Фиг. 2 показывает, что при Ra$\leqslant$Ra$_*$ (Ra$_*$ — такое значение числа Рэлея Ra, что $\lambda_*(\mathrm{Ra})\to\infty$ при Ra$\to$Ra$_*$) течение (1.1) устойчиво при любом λ. На фиг. 2 прямая Ra=Ra$_*$, соответствующая случаю R=2, $\Omega=0$, $\alpha=3$, изображена штриховой линией.

Заметим, что при значениях Ra, близких к Ra*, сходимость итерационного процесса (3.4) резко ухудшается, поэтому для получения зависимости Ra* от различных параметров задачи система (3.1) с краевыми условиями (3.2) решалась методом Бубнова — Галеркина, который приводит к трансцендентному уравнению вида

$$F(\lambda_*, \mathrm{Ra}, R, \Omega, \alpha)=0 \tag{3.5}$$

Из уравнения (3.5) с помощью предельного перехода при $\lambda_*\to\infty$ получаем формулу

$$\mathrm{Ra}_*=4aI_1I_2I_3 / I_4I_5I_6 \tag{3.6}$$

$$I_1=\int_1^R \varkappa^3 r\,dr,\qquad I_2=\int_1^R \omega_1\varkappa^3 r\,dr$$

$$I_3=\int_1^R \varkappa(L+g_2^2-\alpha^2)\varkappa r\,dr,\qquad I_4=\int_1^R \varkappa^3\,dr$$

$$I_5=\int_1^R \omega_2\varkappa^3 r\,dr,\qquad I_6=\int_1^R \varkappa(L-\alpha^2)\varkappa r\,dr$$

$$\varkappa=(R-1)(r-1)$$

В качестве аппроксимирующих функций были выбраны

$$u=a_1\varkappa^2,\quad v=a_2\varkappa,\quad \tau=a_3\varkappa$$

Расчет по формуле (3.6) зависимости Ra* от Ω и R при фиксированном $\alpha=3/(R-1)$ показывает, что с ростом Ω и R величина Ra* монотонно возрастает.

Авторы благодарят В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

Поступила 15 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беккер, Кей.* Изучение неадиабатического течения в кольцевом канале с внутренним вращающимся цилиндром. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. С, Теплопередача, 1962, т. 84, № 2.
2. *Шайдуров Г. Ф., Шлиомис М. И., Ястребов Г. В.* Конвективная неустойчивость вращающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
3. *Уоловит, Цзяо, Диприма.* Устойчивость течения в произвольном зазоре между концентрическими цилиндрическими поверхностями с учетом влияния радиального градиента температур. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, Прикл. механ., 1964, т. 31, № 4.
4. *Сорокин М. П.* Тепловая неустойчивость жидкости в центробежном поле. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1968, № 163.
5. *Butler H. W., Mckee D. E.* A variational solution to the Taylor stability problem based upon non-equilibrium thermodynamics. Internat. J. Heat Mass Transfer, 1970, vol. 13, No. 1.
6. *Хаит В. Д.* О тепловой неустойчивости жидкости в поле центробежных сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
7. *Bahl S. K.* The effect of radial temperature gradient on the stability of a viscous flow between two rotating coaxial cylinders. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 2.
8. *Колесов В. В., Овчинникова С. Н.* Об устойчивости течения жидкости между вращающимися цилиндрами с радиальным градиентом температуры. Всес. конф. «Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции». Тезисы докладов. Минск, 1971.
9. *Юдович В. И.* Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.