

**РАСЧЕТ ОСРЕДНЕННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ГРАНИЦАХ
МЕЖЛОПАТОЧНЫХ КАНАЛОВ ТУРБОМАШИН**

Г. Л. ПОДВИДЗ

(Москва)

Рассмотрено течение газа в лопаточном венце осевой турбины, состоящее из внешнего стационарного безотрывного течения идеальной сжимаемой жидкости и трехмерного турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости на торцовых поверхностях венца, осредненного в окружном направлении. Представлен пример расчета течения в неподвижных лопатках при различной форме меридианного сечения.

В потоке через венец турбомашин между выпуклой и вогнутой поверхностями соседних лопаток существует поперечный градиент статического давления. На торцовой поверхности в пограничном слое линии тока смещаются к выпуклой стороне профиля и появляется вторичное поперечное течение жидкости [1-3].

В работе рассматриваются: внешнее двумерное стационарное адиабатическое течение идеальной сжимаемой жидкости на поверхности S_2' , в качестве которой может быть принята средняя поверхность межлопаточного канала с граничными линиями на периферийной и корневой торцовых поверхностях венца, и двумерное стационарное адиабатическое течение идеальной сжимаемой жидкости на торцовых поверхностях венца между выпуклой и вогнутой сторонами профилей [3, 4]; трехмерный турбулентный пограничный слой, осредненный в окружном направлении на торцовых поверхностях лопаточного венца. Осредненный пограничный слой рассчитывается вдоль одной координатной линии s и используется упрощенная модель квазитрехмерного внешнего течения. Определяются коэффициенты трения, теплоотдачи, наклон донных линий тока.

1. При осреднении уравнений течения идеальной нетеплопроводной жидкости по времени и в окружном направлении φ в межлопаточном канале вводится жесткая непроницаемая поверхность тока S_2' с нормалью \mathbf{n} ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{W} = 0$) [2]. В уравнении течения появляется массовая сила \mathbf{F}_2 воздействия поверхности S_2' на поток идеальной жидкости ($\mathbf{F}_2 \times \mathbf{n} = 0$), в уравнении неразрывности появляется коэффициент стеснения τ от лопаток конечной толщины.

Введем цилиндрическую систему координат φ, z, r и коническую систему φ, m, n , в которой координата m направлена вдоль меридианной образующей венца, n — вдоль нормали к m (фиг. 1). Поверхность S_2' задается углами δ, β' между проекциями нормали \mathbf{n}

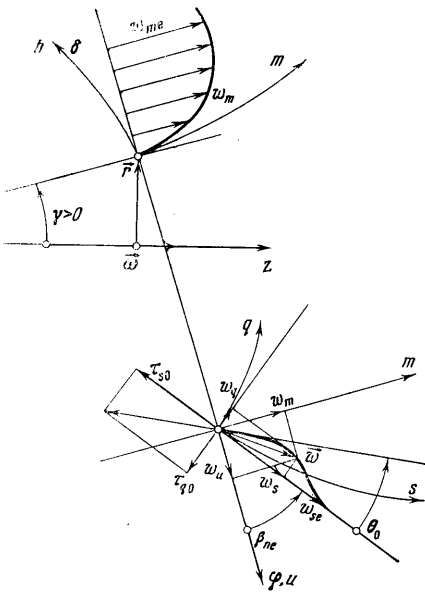
$$\operatorname{tg} \delta = -n_r/n_u, \quad \operatorname{ctg} \beta' = -n_z/n_u$$

Углы потока γ, β_r, β_n определяются соотношениями

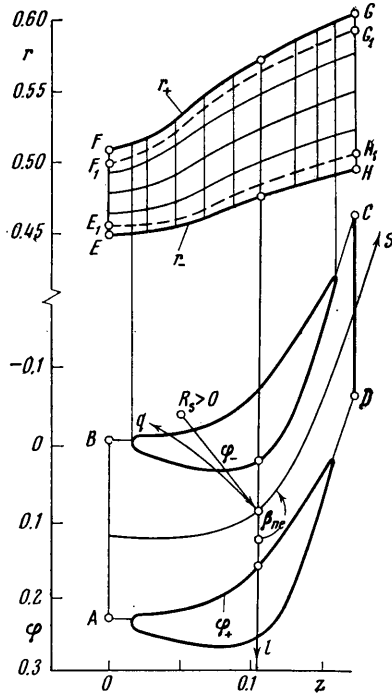
$$(1.1) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{w_r}{w_z}, \quad \operatorname{ctg} \beta_r = \frac{w_u}{w_z}, \quad \operatorname{ctg} \beta_n = \frac{w_u}{w_m}$$

Углы поверхности S_2' и потока связаны с проекциями скорости

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta_r &= \operatorname{ctg} \beta' + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \\ \operatorname{ctg} \beta_n &= \operatorname{ctg} \beta_r \cos \gamma, \quad w_z = w_m \cos \gamma, \quad w_r = w_m \sin \gamma \\ w &= w_z (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_r + \operatorname{tg}^2 \gamma)^{1/2} = w_m (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_n)^{1/2} \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнение стационарного двумерного осесимметричного течения идеальной жидкости в проекции на ось r системы координат φ, z, r с учетом (1.1) на поверхности S_2' для относительного движения в канале рабочего колеса примет вид [2, 4]

$$(1.3) \quad \frac{\partial w_z}{\partial r} = \sin^2 \beta_r \left[\frac{1}{w_z} \left(\frac{\partial h^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} \right) - \frac{F_{2r}}{w_z} - 2\omega \operatorname{ctg} \beta_r + \frac{\partial w_r}{\partial z} \right] + w_z \left(\operatorname{ctg} \beta_r \frac{\partial \beta_r}{\partial r} - \frac{\cos^2 \beta_r}{r} \right)$$

$$(1.4) \quad F_{2r} = - \left[w_z \frac{\partial w_u}{\partial z} + \frac{w_r}{r} \frac{\partial (r w_u)}{\partial r} + 2\omega w_r \right] \operatorname{tg} \delta$$

где T — температура, S — энтропия, ω — угловая скорость вращения ротора, $u = \omega r$.

Вдоль меридианной линии тока внешнего адиабатического течения уравнение энергии в относительном движении и уравнение процесса для калорически совершенного газа имеют вид

$$(1.5) \quad h^* = i + 1/2 (w^2 - u^2) = \text{const}, \quad p / \rho^k = \text{const}$$

Уравнение неразрывности с использованием газодинамических функций примет вид

$$(1.6) \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \tau m r \frac{\rho_{0w} q(\lambda_w) \sigma_p}{\sqrt{T_w} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_r + \operatorname{tg}^2 \gamma}}$$

$$m = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/2(k+1)\kappa} \sqrt{\frac{k}{R}}, \quad q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2} \right)^\kappa \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^\kappa \lambda$$

$$\sigma_p = \left(\frac{h^* + 1/2 u^2}{h_0^* + 1/2 u_0^2} \right)^{\kappa} \quad \left(\kappa = \frac{1}{k-1} \right)$$

где $\tau = 1 - d/t \cos \delta$ — стеснение потока в решетке с шагом t лопатками конечной толщины d , $\psi = G/2\pi$ — функция тока, σ_p — коэффициент полного давления.

2. Система уравнений стационарного трехмерного турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости на вращающихся торцовых поверхностях лопаточного венца получается из уравнений движения Рейнольдса после обычной оценки величины членов уравнений [5]. Используется естественная (поточная) система координат s, q, n (координата s направлена вдоль линии тока внешнего течения идеальной жидкости на торцовой поверхности, q — вдоль нормали к s на торцовой поверхности). Коэффициенты Лямэ и кривизны координатных линий равны

$$(2.1) \quad H_1 = H_1(s, q), \quad H_2 = H_2(s, q), \quad H_3 = 1$$

$$(2.2) \quad K_s = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q}, \quad K_q = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial s}$$

Дополнительно предполагается, что линия s_2 торцовой поверхности венца мала по сравнению с радиусом r меридианной образующей $s_2/r \ll 1$; молекулярное число Прандтля $Pr = \mu_e c_p / \lambda_e \approx 1$; толщины динамического δ и теплового δ_T слоев равны ($\delta \approx \delta_T$); число Рейнольдса $Re_s = w_{se} s_2 / \nu_e \gg 1$, $\delta / s_2 \ll 1$, $\delta / r \ll 1$; пренебрегается изменением статистического давления по толщине слоя δ .

Окончательно система уравнений имеет вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \rho \frac{w_s}{H_1} \frac{\partial w_s}{\partial s} + \rho \frac{w_q}{H_2} \frac{\partial w_s}{\partial q} + \rho w_n \frac{\partial w_s}{\partial n} + \rho w_s w_q K_s - \rho w_q^2 K_q - \\ & - 2\rho \omega_n w_q - \rho \frac{\omega^2 r}{H_1} \frac{\partial r}{\partial s} = - \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau_s}{\partial n} \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & \rho \frac{w_s}{H_1} \frac{\partial w_q}{\partial s} + \rho \frac{w_q}{H_2} \frac{\partial w_q}{\partial q} + \rho w_n \frac{\partial w_q}{\partial n} + \rho w_s w_q K_q - \rho w_s^2 K_s + \\ & + 2\rho \omega_n w_s - \rho \frac{\omega^2 r}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q} = - \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q} + \frac{\partial \tau_q}{\partial n} \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad 0 = - \frac{\partial p}{\partial n}$$

$$(2.6) \quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial (\rho w_s)}{\partial s} + \rho w_s w_q + \frac{1}{H_2} \frac{\partial (\rho w_q)}{\partial q} + \rho w_q K_s + \frac{\partial (\rho w_n)}{\partial n} = 0$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & \rho \frac{w_s}{H_1} \frac{\partial i}{\partial s} + \rho \frac{w_q}{H_2} \frac{\partial i}{\partial q} + \rho w_n \frac{\partial i}{\partial n} = \frac{w_s}{H_1} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{w_q}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q} + \\ & + (\mu + \varepsilon) \left[\left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_q}{\partial n} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\varepsilon}{Pr_T} \right) \frac{\partial i}{\partial n} \right] \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad \begin{cases} \tau_s = \mu \frac{\partial w_s}{\partial n} - \rho \langle w_n' w_s' \rangle = (\mu + \varepsilon) \frac{\partial w_s}{\partial n} \\ \tau_q = \mu \frac{\partial w_q}{\partial n} - \rho \langle w_n' w_q' \rangle = (\mu + \varepsilon) \frac{\partial w_q}{\partial n} \\ q = \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial i}{\partial n} - \rho \langle w_n' i' \rangle = \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\varepsilon}{Pr_T} \right) \frac{\partial i}{\partial n} \end{cases}$$

где $\omega_n = -\omega \sin \gamma$; турбулентное число Прандтля $\text{Pr}_T = \varepsilon c_p / \lambda_T$, ε , λ_T — коэффициенты турбулентной вязкости, теплопроводности.

3. Полагая в уравнениях (2.3) — (2.7) на внешней границе слоя ($n = \delta$) следующие условия:

$$w_{qe} = 0, \quad \frac{\partial w_{se}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial w_{qe}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial i_e}{\partial n} = 0, \quad \tau_{se} = 0, \quad \tau_{qe} = 0, \quad q_e = 0$$

получаем систему уравнений внешнего двумерного течения идеальной жидкости на торцовой поверхности [1, 6]

$$(3.1) \quad \rho_e \frac{w_{se}}{H_1} \frac{\partial w_{se}}{\partial s} - \rho_e \frac{\omega^2 r_e}{H_1} \frac{\partial r_e}{\partial s} = - \frac{1}{H_1} \frac{\partial p_e}{\partial s}$$

$$(3.2) \quad -\rho_e w_{se}^2 K_s + 2\rho_e \omega_n w_{se} - \rho_e \frac{\omega^2 r_e}{H_2} \frac{\partial r_e}{\partial q} = - \frac{1}{H_2} \frac{\partial p_e}{\partial q}$$

$$(3.3) \quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial (\rho_e w_{se})}{\partial s} + \rho_e w_{se} K_q = 0$$

Из уравнения (3.1) вдоль координаты s в относительном адиабатическом движении следует $h_e^* = \text{const} = C_1$, где постоянную C_1 рассматриваем не зависящей от координаты q . Из уравнений (3.2), (3.3) получаются выражения для кривизны

$$(3.4) \quad K_s = 2 \frac{\omega_n}{w_{se}} - \frac{1}{H_2 w_{se}} \frac{\partial w_{se}}{\partial q}$$

$$(3.5) \quad k_q = - \frac{1}{H_1 \rho_e w_{se}} \frac{\partial (\rho_e w_{se})}{\partial s}$$

Из проекции уравнения (3.4) на направление $l = r\varphi$ (фиг. 2) получает-ся упрощенное уравнение для изменения w_{se} поперек канала

$$(3.6) \quad \frac{dw_{se}}{dl} = - \frac{\sin \beta_{ne}}{R_s} w_{se} + 2\omega \sin \gamma \sin \beta_{ne} \\ \left(\frac{1}{R_s} = -K_s = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \beta_{ne}}{\partial s} \right)$$

Интегрируя (3.6) при постоянстве R_s , β_{ne} , γ в направлении l при граничном условии на линии s $w_{se}(l=0) = \langle w_{se} \rangle$ получим изменение $w_{se}(l)$ внутри решетки

$$(3.7) \quad w_{se}(l) = \exp \left(- \frac{\sin \beta_{ne}}{R_s} l \right) \left[\langle w_{se} \rangle + 2\omega R_s \sin \gamma \left(\exp \frac{\sin \beta_{ne}}{R_s} l - 1 \right) \right]$$

4. Для пограничного слоя ставятся следующие граничные условия на торцовой поверхности ($n=0$) и внешней границе слоя ($n=\delta$):

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} n=0: \quad w_s = w_q = w_n = 0, \quad r = r_0, \quad \tau_s = \mu \frac{\partial w_s}{\partial n} \Big|_0 = \tau_{s0} \\ \tau_q = \mu \frac{\partial w_q}{\partial n} \Big|_0 = \tau_{q0}, \quad q_0 = \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial i_w^*}{\partial n} \Big|_0 = \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial i}{\partial n} \Big|_0 \\ \rho = \rho_0, \quad i = i_0 = i_{w0}^*, \quad h = h_0 = i_0 - 1/2 u_0^2 \\ n=\delta: \quad w_s = w_{se}, \quad w_q = w_{qe} = 0, \quad r = r_e \approx r_0, \quad \tau_{se} = \tau_{qe} = 0 \\ \rho = \rho_e, \quad i_w^* = i_{we}^* = i_e + 1/2 w_{se}^2 \quad h^* = h_e^* \quad q_e = 0 \end{array} \right.$$

Вводятся интегральные толщины трехмерного пограничного слоя в координатах s, q, n [1, 2], где дополнительно определены $\delta_{hs}, \delta_{hq}, \delta_p$

$$\begin{aligned} \delta_s^{**} &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho w_s}{\rho_e w_{se}}\right) dn, & \delta_s^{**} &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{w_s}{w_{se}}\right) \frac{\rho w_s}{\rho_e w_{se}} dn \\ \delta_{sq}^{**} &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{w_s}{w_{se}}\right) \frac{\rho w_q}{\rho_e w_{se}} dn, & \delta_q^{**} &= \int_0^{\delta} \frac{\rho w}{\rho_e w_{se}} dn \\ \delta_q^{**} &= \int_0^{\delta} \frac{\rho w_q^2}{\rho_e w_{se}^2} dn, & \delta_{qs}^{**} &= \int_0^{\delta} \frac{\rho w_q w_s}{\rho_e w_{se}^2} dn, & \delta_p &= \int_0^{\delta} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1\right) dn \\ \delta_{hs} &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{h^*}{h_e^*}\right) \frac{\rho w_s}{\rho_e w_{se}} dn, & \delta_{hq} &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{h^*}{h_e^*}\right) \frac{\rho w_q}{\rho_e w_{se}} dn \end{aligned} \quad (4.2)$$

Относительные параметры формы трехмерного пограничного слоя в координатах s, q, n равняются

$$\begin{aligned} H &= \frac{\delta_s^*}{\delta_s^{**}}, & J &= \frac{\delta_{sq}^{**}}{\varepsilon \delta_s^{**}}, & K &= \frac{\delta_q^*}{\varepsilon \delta_s^{**}}, & L &= \frac{\delta_q^{**}}{\varepsilon^2 \delta_s^{**}} \\ M &= \frac{\delta_{qs}^{**}}{\varepsilon \delta_s^{**}}, & N &= \frac{\delta}{\delta_s^{**}}, & P &= \frac{\delta_{hq}}{\varepsilon_s^{**}}, & Q &= \frac{\delta_{hq}}{\varepsilon \delta_s^{**}}, & D &= \frac{\delta_p}{\delta_s^{**}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Угол закрутки потока в трехмерном пограничном слое между линией тока внешнего течения (координатой s) и линией тока в пограничном слое равняется $\theta = \text{arctg } w_q/w_s$. При $n=0$, $\theta = \theta_0$, ($\text{tg } \theta_0 = \varepsilon$), при $n=\delta$ $\theta=0$.

Уравнения (2.3), (2.4), (2.7) интегрируются поперек пограничного слоя $0 \leq n \leq \delta$ с учетом уравнений (2.5), (2.6), (3.1), (3.2), выражений кривизн (3.4), (3.5) и граничных условий (4.1). После введения интегральных толщин (4.2) и параметров формы (4.3) получим систему интегральных соотношений количества движения в проекции на оси s, q и энергии

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial \delta_s^{**}}{\partial s} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial (I \varepsilon \delta_s^{**})}{\partial q} + \frac{1}{w_{se} H_1} \frac{\partial w_{se}}{\partial s} (1 - L \varepsilon^2 + H) \delta_s^{**} - \\ - L \varepsilon^2 \delta_s^{**} \frac{1}{\rho_e H_1} \frac{\partial \rho_e}{\partial s} + J \varepsilon \delta_s^{**} \frac{1}{\rho_e H_2} \frac{\partial \rho_e}{\partial q} + 4 \frac{\omega_n}{w_{se}} J \varepsilon \delta_s^{**} + \\ + \frac{u_e^2}{w_{se}^2} \frac{1}{r_e H_1} \frac{\partial r_e}{\partial s} D \delta_s^{**} = \frac{\tau_{s0}}{\rho_e w_{se}^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial (M \varepsilon \delta_s^{**})}{\partial s} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial (L \varepsilon^2 \delta_s^{**})}{\partial q} + (L \varepsilon^2 - 1 - H) \delta_s^{**} \frac{1}{w_{se} H_2} \frac{\partial w_{se}}{\partial q} + \\ + \frac{1}{\rho_e H_2} \frac{\partial \rho_e}{\partial q} L \varepsilon^2 \delta_s^{**} - \frac{1}{\rho_e H_1} \frac{\partial \rho_e}{\partial s} M \varepsilon \delta_s^{**} + \\ + 2 \frac{\omega_n}{w_{se}} (L \varepsilon^2 + 1) \delta_s^{**} - \frac{u_e^2}{w_{se}^2} \frac{1}{r_e H_2} \frac{\partial r_e}{\partial q} D \delta_s^{**} = - \frac{\tau_{q0}}{\rho_e w_{se}^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial \delta_{hs}}{\partial s} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial (Q \varepsilon \delta_s^{**})}{\partial q} + \left(\frac{1}{\rho_e H_2} \frac{\partial \rho_e}{\partial q} + 2 \frac{\omega_n}{w_{se}} \right) Q \varepsilon \delta_s^{**} = \frac{q_0}{\rho_e w_{se} h_e^*} \quad (4.6)$$

Система линейных неоднородных уравнений (4.4) – (4.6) с частными производными первого порядка относительно δ_s^{**} , ε , δ_{hs} является эллиптической, если величина $F=L/IM < 1$, параболической, если $F=1$, и гиперболической, если $F > 1$.

На торцевой поверхности параметры внешнего течения w_{se} , ρ_e и пограничного слоя δ_s^{**} , ε , δ_{hs} рассматриваются как функции двух переменных m , φ , параметры формы H , J , K , L , M , N , Q , D – как функции одной переменной m . Предполагается, что углы внешнего течения по выпуклой β_{n-} , вогнутой β_{n+} сторонам профиля равны углу β_{ne} на координатной линии тока $s(\beta_{n-} \sim \beta_{n+} \approx \beta_{ne})$ (фиг. 2).

Уравнения пограничного слоя (4.4) – (4.6) осредняются в окружном направлении между соседними лопатками по каналу с размером $a = r(\varphi_+ - \varphi_-)$ по соотношениям

$$(4.7) \quad \langle j \rangle = \frac{1}{a} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} f r d\varphi, \quad \frac{1}{a} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} r d\varphi = \frac{1}{a} (f_+ - f_-)$$

$$\frac{1}{a} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{\partial f}{\partial m} r d\varphi \approx \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial m} - \frac{1}{a} (f_+ - f_-) \operatorname{ctg} \beta_{ne}$$

Система интегральных соотношений трехмерного осредненного турбулентного пограничного слоя после преобразований принимает вид

$$(4.8) \quad A_{11} \frac{d \ln \langle \delta_s^{**} \rangle}{dm} + A_{12} \frac{d \langle \varepsilon \rangle}{dm} = - \cos \beta_{ne} \frac{dJ}{dm} \langle \varepsilon \rangle +$$

$$+ \frac{J}{\langle \delta_s^{**} \rangle a \sin \beta_{ne}} C_1 - (1 - L \langle \varepsilon \rangle^2 + H) \sin \beta_{ne} \frac{d \ln \langle w_{se} \rangle}{dm} +$$

$$+ L \langle \varepsilon \rangle^2 \sin \beta_{ne} \frac{d \ln \langle \rho_e \rangle}{dm} - J \langle \varepsilon \rangle B_1 - 4 \frac{\omega_n}{\langle w_{se} \rangle} J \langle \varepsilon \rangle -$$

$$- \frac{u_e^2}{\langle w_{se} \rangle^2} \frac{1}{r_e} \sin \gamma_e \sin \beta_{ne} D + \frac{\tau_{s0}}{\langle \delta_s^{**} \rangle \langle \rho_e \rangle \langle w_{se} \rangle^2}$$

$$A_{21} \frac{d \ln \langle \delta_s^{**} \rangle}{dm} + A_{22} \frac{d \langle \varepsilon \rangle}{dm} = - \sin \beta_{ne} \frac{dM}{dm} \langle \varepsilon \rangle - \cos \beta_{ne} \frac{dL}{dm} \langle \varepsilon \rangle^2 +$$

$$(4.9) \quad + \frac{L}{\langle \delta_s^{**} \rangle a \sin \beta_{ne}} C_2 - (L \langle \varepsilon \rangle^2 - 1 - H) B_2 - L \langle \varepsilon \rangle^2 B_1 +$$

$$+ M \langle \varepsilon \rangle \frac{d \ln \langle \rho_e \rangle}{dm} \sin \beta_{ne} -$$

$$- 2 \frac{\omega_n}{\langle w_{se} \rangle} (L \langle \varepsilon \rangle^2 + 1) + \frac{u_e^2}{\langle w_{se} \rangle^2} \frac{1}{r_e} \sin \gamma_e \cos \beta_{ne} D - \frac{\tau_{q0}}{\langle \delta_s^{**} \rangle \langle \rho_e \rangle \langle w_{se} \rangle^2}$$

$$(4.10) \quad \frac{d \ln \langle \delta_{hs} \rangle}{dm} = - \frac{\langle \delta_s^{**} \rangle \cos \beta_{ne}}{\langle \delta_{hs} \rangle \sin \beta_{ne}} \left(\frac{dQ}{dm} \langle \varepsilon \rangle + Q \frac{d \langle \varepsilon \rangle}{dm} + Q \langle \varepsilon \rangle \frac{d \ln \langle \delta_s^{**} \rangle}{dm} \right) +$$

$$+ \frac{Q}{\langle \delta_{hs} \rangle a \sin^2 \beta_{ne}} C_1 - \left(B_1 + 2 \frac{\omega_n}{\langle w_{se} \rangle} \right) \frac{\langle \delta_s^{**} \rangle Q \langle \varepsilon \rangle}{\langle \delta_{hs} \rangle \sin \beta_{ne}} +$$

$$+ \frac{q_0}{\langle \delta_{hs} \rangle \langle \rho_e \rangle \langle w_{se} \rangle h_e^* \sin \beta_{ne}}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \beta_{ne} + J \langle \epsilon \rangle \cos \beta_{ne} & J \cos \beta_{ne} \\ M \langle \epsilon \rangle \sin \beta_{ne} + L \langle \epsilon \rangle^2 \cos \beta_{ne} & M \sin \beta_{ne} + 2L \langle \epsilon \rangle \cos \beta_{ne} \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \frac{d \ln \langle \rho_e \rangle}{dm} \cos \beta_{ne} - \frac{1}{a \sin \beta_{ne}} \ln \frac{\rho_{e+}}{\rho_{e-}}, \quad C_1 = (\epsilon \delta_s^{**})_+ - (\epsilon \delta_s^{**})_-$$

$$B_1 = \frac{d \ln \langle w_{se} \rangle}{dm} \cos \beta_{ne} - \frac{1}{a \sin \beta_{ne}} \ln \frac{w_{se+}}{w_{se-}}, \quad C_1 = (\epsilon \delta_s^{**})_+ - (\epsilon \delta_s^{**})_-$$

Система линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений (4.8) — (4.10) первого порядка относительно $\langle \delta_s^{**} \rangle$, $\langle \epsilon \rangle$, $\langle \delta_{ns} \rangle$ имеет определитель

$$\Delta(\langle \epsilon \rangle) = |A| = \sin^2 \beta_{ne} (JL \operatorname{ctg}^2 \beta_{ne} \langle \epsilon \rangle^2 + 2L \operatorname{ctg} \beta_{ne} \langle \epsilon \rangle + M)$$

больше нуля (не имеет действительных корней $\langle \epsilon \rangle$), равный нулю (один действительный корень) или ≥ 0 (два действительных корня), если величина $F = L/JM$ соответственно меньше, равна или больше единицы.

Из физических соображений параметры $\langle \delta_s^{**} \rangle$, $\langle \epsilon \rangle$ не должны зависеть от свойств пограничного слоя вниз по потоку. Предполагается параболический тип системы (4.4) — (4.6) и соответственно определить системы (4.8) — (4.10) $\Delta(\langle \epsilon \rangle) = 0$, для чего параметр формы L определяется из соотношения $L = JM$.

В уравнениях (4.8) — (4.10) параметры $\langle w_{s1} \rangle$, $\langle \rho_e \rangle$, h_e^* , β_{ne} известны из расчета осесимметрического течения идеальной жидкости на поверхности S_2' , пересекающей торцовую поверхность венца вдоль координатной линии s с уравнением $\varphi_{se} = \varphi_{se}(m)$. Скорость течения w_{se} на выпуклой и вогнутой сторонах профиля определяется из выражения (3.7) в виде

$$(4.11) \quad w_{se-} = w_{se} \left(-\frac{a}{2} \right), \quad w_{se+} = w_{se} \left(\frac{a}{2} \right)$$

плотность газа ρ_e определяется по уравнению процесса адиабатического течения (1.7) в виде

$$(4.12) \quad \rho_{e-} = \rho_e(w_{se-}), \quad \rho_{e+} = \rho_e(w_{se+})$$

Для переменных δ_s^{**} , ϵ в окружном направлении $l = r(\varphi - \varphi_{se})$ принята линейная зависимость

$$f = \langle f \rangle + (f_+ - f_-)l/a$$

На выпуклой стороне профиля имеем

$$\delta_{s-}^{**} = 2\langle \delta_s^{**} \rangle - \delta_{s+}^{**}, \quad \epsilon_- = 2\langle \epsilon \rangle - \epsilon_+$$

5. Профиль продольной скорости $w_s(n)$ в трехмерном пограничном слое предполагается подобным профилю скорости в двумерном пограничном слое на плоской пластине в абсолютном течении. Принимается двухслойная схема пристенной турбулентности [5, 6]: ламинарный подслой и область развитой турбулентности

$$(5.1) \quad 0 \leq n \leq \delta_l = \alpha l_*, \quad \mu \frac{dw_s}{dn} = \tau_{s0}, \quad \eta = \varphi$$

$$(5.2) \quad \delta_l \leq n < \delta, \quad \rho(\chi n)^2 \left(\frac{dw_s}{dn} \right)^2 = \tau_{s0}, \quad \eta = \alpha \exp \left(\chi \int_{\varphi_1}^{\varphi} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} d\varphi \right)$$

$$w_{s*} = \sqrt{\frac{\tau_{s0}}{\rho_0}}, \quad l_* = \frac{\mu_0}{\rho_0 w_{s*}}, \quad \varphi = \frac{w_s}{w_{s*}}, \quad \eta = \frac{n}{l_*}$$

Профиль скорости w_s определяется двумя эмпирическими константами κ , α .

Профиль поперечной скорости $w_q(n)$ вторичного течения рассматривается как функция от n/δ в виде [1, 6]

$$(5.3) \quad w_q = w_s \operatorname{tg} \theta_0 (1 - n/\delta)^2$$

согласуемемся с экспериментами при развитом вторичном течении, когда $w_q(n)$ не изменяет направления по толщине пограничного слоя на противоположное.

Для распределения плотности газа $\rho(n)$ используется интеграл типа Крокко уравнений осесимметричного пограничного слоя на вращающейся поверхности при $\operatorname{Pr} = \operatorname{Pr}_r = 1$ [7]. При граничных условиях, аналогичных (4.1), в системе координат φ , m , n после обобщения на числа $\operatorname{Pr} \neq 1$, но близкие к единице, интеграл примет вид

$$(5.4) \quad i + r \left(\frac{w_u^2}{2} + \frac{w_m^2}{2} \right) + (i_0 - i_{re}^*) \frac{w_u}{w_{ue}} = i_0$$

$$i_{re}^* = i_e + r \left(\frac{w_{ue}^2}{2} + \frac{w_{me}^2}{2} \right)$$

Проекция силы трения на оси s , q и поток тепла газа к торцовой поверхности равняются соответственно

$$(5.5) \quad \tau_{s0} = C_{fs} \frac{\langle \rho_e \rangle \langle w_{se} \rangle^2}{2}, \quad \tau_{q0} = \langle \varepsilon \rangle \tau_{s0}$$

$$(5.6) \quad q_0 = C_h \langle \rho_e \rangle \langle w_{se} \rangle (i_{re}^* - i_0)$$

Здесь коэффициенты сопротивления C_{fs} , теплоотдачи C_h , восстановления r в трехмерном пограничном слое выражаются аналогично плоскому турбулентному слою [5]

$$(5.7) \quad C_h = \frac{C_{fs}}{2} \sqrt{1 + \langle \varepsilon \rangle^2} \operatorname{Pr}^{-2/3}, \quad r = \operatorname{Pr}^{1/3}$$

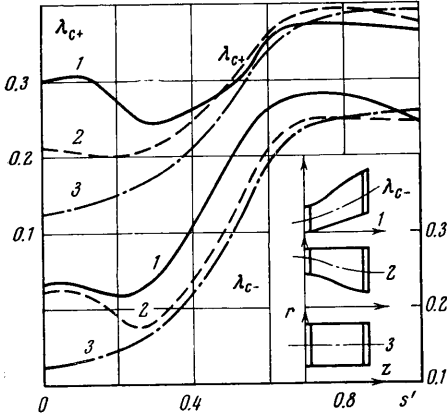
Для местного коэффициента теплоотдачи α и чисел Nu , Re_s , рассчитанных по текущей координате s , получаем соотношения

$$(5.8) \quad \alpha = \frac{q_0}{T_{re}^* - T_0} = C_h \langle \rho_e \rangle \langle w_{se} \rangle c_p, \quad \operatorname{Nu} = \frac{\alpha s}{\lambda_e} = \frac{C_{fs}}{2} \sqrt{1 + \langle \varepsilon \rangle^2} \operatorname{Re}_s \operatorname{Pr}^{1/3}$$

6. Расчет внешнего осесимметричного течения в лопаточном венце сводится к решению следующей системы уравнений: уравнения радиального равновесия (1.3), неразрывности (1.6), процесса и энергии (1.5) с учетом дополнительных соотношений (1.1), (1.2), (1.4) относительно неизвестных w_z , h^* , ρ , энтропии S . Расчет трехмерного пограничного слоя вдоль корневой и периферийной торцовых поверхностей сводится к решению системы интегральных соотношений (4.8)–(4.10) относительно неизвестных $\langle \delta_{**} \rangle$, $\langle \varepsilon \rangle$, $\langle \delta_{hs} \rangle$. Параметры формы, закон трения и поток тепла находятся по соотношениям (5.1)–(5.7).

В прямой задаче ставятся следующие граничные условия (фиг. 2): образующие EH , FG задаются координатами r_- , r_+ и являются граничными линиями тока; на торцовых поверхностях выполняется условие прилипания $w=0$, задается температура стенки T_0 , на вогнутой стороне профиля AD

задаются δ_{s+}^{**} , ϵ_+ ; на внешней границе слоя вдоль E_1H_1 , F_1G_1 параметры $\langle w_{se} \rangle$, $\langle \rho_e \rangle$, h_e^* , β_{ne} равны параметрам внешнего осесимметричного течения, определяемым на меридианных образующих EH , FG ; во входном сечении EF задаются температура и давление заторможенного потока T_0^* , p_0^* , на торцовых поверхностях в начальной точке $s=0$ — параметры $\langle \delta_{s0}^{**} \rangle$, $\langle \epsilon_0 \rangle$

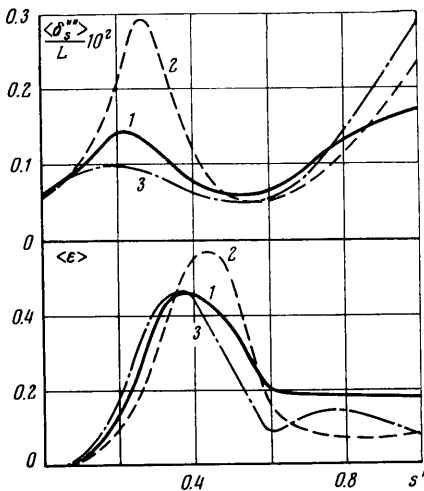


Фиг. 3

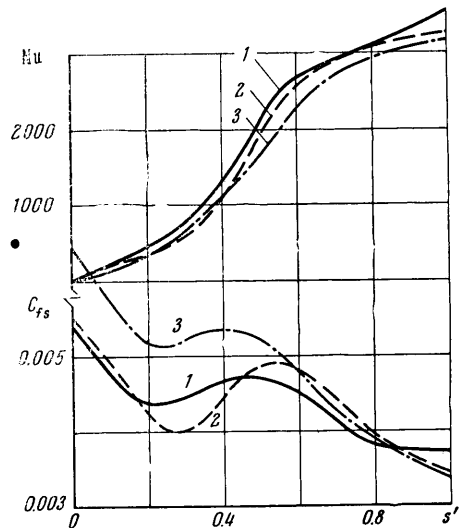
на торцовых поверхностях в начальной точке $s=0$ — параметры $\langle \delta_{s0}^{**} \rangle$, $\langle \epsilon_0 \rangle$ ($\langle \delta_{ns0} \rangle = P \langle \delta_{s0}^{**} \rangle$); внутри области $EFGH$ известны углы β' , δ поверхности S_2' и размер лопатки d . Задаются G_x — суммарный расход газа через венец, ω — угловая скорость вращения, z — число лопаток, k — показатель адиабаты, R — газовая постоянная, молекулярное число Прандтля Pr , коэффициент динамической вязкости $\mu = cT^a$, константы турбулентности κ , α .

Осесимметричное течение рассчитывается в фиксированной сетке меридианной плоскости z_i, r_k . Во внутренних узлах сетки используется интерполяция второго порядка, в граничных узлах — первого. Пограничный слой рассчитывается по координате m . По толщине слоя располагается k_1 точек в ламинарном подслое и k_2 точек в области развитой турбулентности.

Система уравнений внешнего осесимметричного течения, интегрируемая методом прямых, и система уравнений пограничного слоя, интегрируемая



Фиг. 4



Фиг. 5

методом Рунге-Кутты, решаются совместно методом последовательных приближений. Для улучшения сходимости расчет начинается с упрощенного решения для цилиндрического внешнего течения [2, 4] и для двумерного осесимметричного пограничного слоя со степенным профилем скорости на конической поверхности [2, 6, 7]. Используются также коэффициенты релаксации координат линий тока и проекций скорости внешнего осесимметричного

ного течения. Расчет внешнего течения повторяется с коэффициентом расхода, учитывающим вытесняющее действие пограничных слоев на торцовых поверхностях венца.

7. В качестве примера рассмотрено течение в сопловом венце осевой турбины (фиг. 2) при $\lambda_{c1}=0.41$ с числом лопаток $z=27$, $k=1.33$, $R=288.8$ Дж/кгК, $\mu=0.39 \cdot 10^{-6} T^{0.678}$ кг/м.с, $Pr=0.72$, константы турбулентности $\kappa=0.4$, $\alpha=1.25$. Радиусы корневой r_- и периферийной r_+ образующих меридианного сечения возрастают к выходу из решетки и образуют канал с увеличивающейся высотой (вариант 1). Лопатка цилиндрическая, радиально направленная. Во входном сечении канала внешний поток однородный, $\langle \delta_{s0}^{**} \rangle = 0.1 \cdot 10^{-3} M$ (ϵ_0)=0. Относительная температура торцовых стенок $T_0/T_0^* = 0.864$, на вогнутой стороне профиля $\delta_{s+}^{**} = 0.1 \cdot 10^{-3} M$, $\epsilon_+ = 0.2$ постоянны по координате z . Сетка расчета внешнего течения представлена на фиг. 2, в пограничном слое число точек $k_1=4$, $k_2=7$.

В расчете внешнего осесимметричного течения после 10 приближений наибольшая погрешность составляла для координат меридианных линий тока $\Delta r = 0.5 \cdot 10^{-4} M$, $\Delta \lambda_c = 0.006$. Далее добавлялся расчет трехмерного пограничного слоя и результаты приведены для 16 приближений. В модели тонкого пограничного слоя его воздействие на внешнее течение незначительно.

На фиг. 3 представлено распределение λ_c по координате $s' = s/s_z$ на корневой λ_{c-} , периферийной λ_{c+} торцовых поверхностях венца (сплошные линии для варианта 1). Имеются два участка с наибольшей интенсивностью диффузорного течения: на входном участке венца из периферии и на выходном участке у корня. В заданном венце изменение $\langle \delta_s^{**} \rangle$ по координате s на корневой поверхности (фиг. 4) определяется трением τ_{s0} и градиентом скорости внешнего течения $\langle c_{se} \rangle$ в направлении s . Толщина $\langle \delta_s^{**} \rangle$ достигает максимума на входном участке венца. Наклон $\langle \epsilon \rangle$ донной линии тока зависит от трения τ_{q0} и градиента скорости c_{se} в окружном направлении. Величина $\langle \epsilon \rangle$ достигает максимума на среднем участке венца, где максимальная кривизна K_s .

Распределение коэффициента сопротивления C_{fs} по s на корневой поверхности (фиг. 5) определяется законом трения. Распределение Nu , α определяется соотношениями (5.8). Наибольшее значение α имеется на выходном участке венца. Распределение $\langle \delta_s^{**} \rangle$, $\langle \epsilon \rangle$, C_{fs} , Nu по периферийной поверхности аналогичное.

При проточной части с $r_+ = \text{const}$ и прежней высотой канала (вариант 2, пункт на фиг. 3, 4, 5) диффузорное течение отсутствует на входном участке на периферии и на выходном участке у корня. По сравнению с вариантом 1 толщина $\langle \delta_s^{**} \rangle$ на начальном участке увеличилась у корня (фиг. 4) и уменьшилась на периферии; увеличилось максимальное значение $\langle \epsilon \rangle$; уменьшился коэффициент количества движения в направлении q , учитывающий вторичное течение в пограничном слое.

При цилиндрическом канале с постоянной высотой лопаток (вариант 3, штрих-пунктир на фиг. 3, 4, 5) на входном участке отсутствует диффузорное течение. По сравнению с вариантом 1 толщина $\langle \delta_s^{**} \rangle$ уменьшилась на входном участке и увеличилась на выходном; C_{fs} увеличивается, Nu , α уменьшаются у корня. Интенсивность вторичных течений в пограничном слое наименьшая по сравнению с вариантами 1, 2.

Автор благодарит Г. Ю. Степанова за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 25 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Mager A. Generalization of boundary - layer momentum - integral equations to three - dimensional flows including those of rotating system. NAGA, 1952, Rept 1067.
2. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
3. Dring R. P. Momentum - integral analysis of the tree - dimensional turbine end - wall boundary layer. ASME Paper No. 71 - Gt - 6.
4. Подвидз Г. Л. Расчет квазитрехмерного течения газа в межлопаточном канале осевой турбомашин. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
6. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение» 1973.
7. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз., 1960.