

О ПАРАБОЛИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ ЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

В. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ФАЛЬКОВИЧ

(Саратов)

Для решения околосвукового уравнения смешанного типа с заданными граничными условиями на профиле был предложен [1] параболический метод, состоящий в замене ускорения потока φ_{xx} в нелинейном члене уравнения (1.1) специально подобранной константой, решение полученного линейного уравнения параболического типа можно рассматривать как некоторое приближение к решению первоначальной задачи.

Улучшением параболического метода является метод локальной линеаризации [2] (см. также [3]), в котором зафиксированное сначала ускорение φ_{xx} заменяют функцией координаты x , удовлетворяющей некоторому условию. Для распределения скорости вдоль профиля в [2] получено обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

В настоящей работе предложен иной метод «размораживания» «замороженно-го» сначала ускорения φ_{xx} ; для скорости на профиле получено обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка (2.3), позволяющее избавиться от некоторых недостатков метода локальной линеаризации. Приведено несколько решений уравнения (2.3) в сравнении с известными точными решениями.

1. При обтекании тонкого профиля установившимся плоским потоком газа с $M_\infty=1$ потенциал скорости малых возмущений удовлетворяет известному околосвуковому уравнению смешанного типа

$$(1.1) \quad \varphi_{zz} = (\gamma + 1) \varphi_x \varphi_{xx}$$

$$\varphi_x = \frac{U - c^*}{c^*} = u, \quad \varphi_z = \frac{V}{c^*} = v$$

u, v — компоненты безразмерной скорости возмущений, c^* — критическая скорость звука, γ — отношение удельных теплоемкостей, ось x направлена по потоку.

В дальнейшем рассмотрим обтекание симметричного профиля под нулевым углом атаки, контур профиля задается функцией $z = \pm h(x)$. Условие обтекания тонкого профиля дает граничное условие

$$(1.2) \quad \varphi_z(x, 0) = \frac{dh(x)}{dx} = F(x)$$

Вдали от профиля возмущения затухают:

$$(1.3) \quad \varphi_z, \varphi_x \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$$

В работе [1] было рассмотрено следующее упрощение: в правой части уравнения (1.1) полагают

$$(1.4) \quad (\gamma + 1) \varphi_{xx} = \lambda = \text{const}$$

Линейное уравнение параболического типа

$$(1.5) \quad \varphi_{zz} = \lambda \varphi_x$$

с крайевыми условиями (1.2), (1.3) решается с использованием преобразования Лапласа по координате x :

$$(1.6) \quad \varphi(x, z) = \frac{-1}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_0^x \frac{F(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \exp\left(-\frac{\lambda z^2}{4(x-\xi)}\right) d\xi$$

$$(1.7) \quad \varphi_x(x, 0) = \frac{-1}{\sqrt{\pi\lambda}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{F(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi$$

В [1] постоянная λ выбирается так, чтобы совпадение распределения скорости по профилю (1.7) с точным было наилучшим в окрестности звуковой точки.

Метод локальной линеаризации [2] основан на описанной формальной процедуре со следующей модификацией: получив (при $\lambda = \text{const}$) распределение скорости вдоль профиля $u(x) = \varphi_x(x, 0)$ (1.7), «размораживают» λ согласно (1.4): $(\gamma+1) \cdot u'(x) = \lambda(x)$. Подстановка $\lambda(x)$ в (1.7) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка для скорости на профиле $u(x)$:

$$(1.8) \quad u(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{(\gamma+1)u'(x)}}, \quad f(x) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{F(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi$$

Решение (1.8) имеет вид

$$(1.9) \quad u(x) = \left[\frac{3}{(\gamma+1)} \int_{x^*}^x f'^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Здесь x^* — абсцисса звуковой точки $u(x^*) = 0$. Для гладкого профиля положение звуковой точки заранее не известно, в этом случае требование аналитичности решения (1.9) в звуковой точке (в частности, ускорение должно быть конечно $|u'(x^*)| < \infty$) приводит к уравнению для определения звуковой точки:

$$(1.10) \quad f'(x^*) = 0$$

Строгое математическое обоснование (оценка точности) метода локальной линеаризации отсутствует, хотя совпадение с экспериментом неожиданно хорошо, исключая заднюю кромку профиля. Формула (1.9) дает монотонное увеличение скорости вдоль профиля, что неверно у задней кромки, где скорость убывает. В [3] для улучшения совпадения с экспериментом производится склеивание решения (1.9) с другим решением, пригодным для замедляющегося течения.

2. Функцию $\lambda = \lambda(x)$ можно определить иначе, например потребовать, чтобы решение (1.7) (с $\lambda = \lambda(x)$) удовлетворяло бы точному околосзвуковому уравнению (1.1) на профиле (при $z=0$)

$$(2.1) \quad \varphi_{zz}(x, 0) = (\gamma+1)\varphi_x(x, 0)\varphi_{xx}(x, 0)$$

По (1.6)

$$(2.2) \quad \varphi(x, 0) = y(x) = [\lambda(x)]^{-1/2} f(x), \quad \varphi_{zz}(x, 0) = [\lambda(x)]^{1/2} f'(x)$$

Тогда из (2.1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка для потенциала скорости на профиле $y(x)$

$$(2.3) \quad yy'y'' = f(x)f'(x)/(\gamma+1)$$

Формулы (1.6), (2.2), (2.3) дают функцию $\varphi(x, z)$, удовлетворяющую граничным условиям (1.2), (1.3) и околосзвуковому уравнению на профиле (при $z=0$).

Двумя граничными условиями для уравнения 2-го порядка (2.3) являются условие в звуковой точке $y'(x^*) = 0$ и равенство, следующее из (2.2), $y(0) = 0$.

В точках, где $f(x)f'(x) = 0$, уравнение (2.3) имеет особые точки типа седла. Наименьшим положительным нулем произведения $f \cdot f'$ является нуль $f'(x)$, следовательно, требование аналитичности скорости в звуковой точке приводит к уравнению для определения звуковой точки на гладком профиле $f'(x^*) = 0$, что совпадает с результатом метода локальной линеаризации (1.10).

Если на профиле существует точка, где $f(x) = 0$, то в ней скорость достигает максимума и далее к хвосту убывает, что качественно соответствует экспериментам и численному расчету сверхзвуковой зоны методом характеристик (см., например, [4]).

3. Сравним некоторые решения уравнения (2.3) с известными точными решениями околосзвукового уравнения (1.1).

а) Для профиля специального вида

$$(3.1) \quad h(x) = \frac{4}{405} (\gamma+1)^{-1/2} x^{3/2} [45 - 8x(\gamma+1)]^{-1/2}$$

в [5] получено точное решение задачи обтекания звуковым потоком, при этом для скорости возмущений на профиле получается

$$(3.2) \quad u_T(\gamma+1)^{1/2} = \frac{4}{9} (\gamma+1)^{-1/2} x - 1$$

Это решение описывает течение с постоянным ускорением на профиле. Решение уравнения (2.3) дает распределение скорости $u(x)=y'$ по профилю:

$$(3.3) \quad u(x) = u_{\Gamma}(x) \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/4} \approx 0.9226 \cdot u_{\Gamma}(x)$$

Звуковая точка, найденная из (1.10), совпадает с точной. Интересно, что применение в данном случае метода локальной линеаризации [6] дает результат, точно совпадающий с (3.3).

б) Рассмотрим обтекание клина единичной длины с малым углом раствора τ звуковым потоком. Уравнение (2.3) принимает вид

$$(3.4) \quad y y' y'' = \frac{\tau^2}{2\pi(\gamma+1)}, \quad y(0) = y'(1) = 0$$

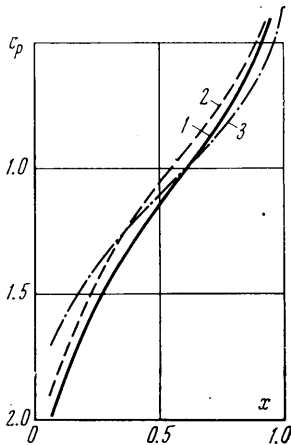
Решение задачи (3.4) имеет вид

$$(3.5) \quad 1-x = \frac{1}{\Gamma(2/3)} \int_0^{c_p^3 \pi/12} e^{-q} q^{-1/3} dq$$

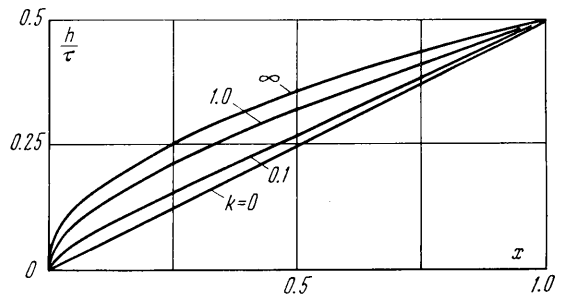
где $c_p = -2u(\gamma+1)^{1/2} \cdot \tau^{-2/3}$ — приведенный коэффициент давления.

Из фиг. 1 видно лучшее совпадение решения (3.5) (кривая 1) с точным решением [7] (кривая 2) по сравнению с результатом по методу локальной линеаризации [3] (кривая 3).

Отметим, что решение (3.5) для клина совпадает с решением [8] интегро-дифференциального уравнения, полученного на основе параболического метода.



Фиг. 1



Фиг. 2

в) Семейство профилей $f^2(x) = f_0^2(x) + C$, где C — произвольная постоянная имеет одно распределение скорости, так как уравнение (2.3) сохраняет свой вид и граничные условия не меняются. Используя определение функции $f(x)$ (1.8), получим формы всех профилей семейства по некоторому представителю

$$\int_0^x \frac{F(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi = \pi^{1/2} \sqrt{f_0^2(x) + C}$$

Решение полученного интегрального уравнения Абеля для наклона $F(x)$ профиля к оси x известно:

$$F(x) = \pi^{-1/2} \left[\frac{\sqrt{f_0^2(0) + C}}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{f_0(\xi) f_0'(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1/2} (f_0^2(\xi) + C)^{1/2}} \right]$$

Рассмотрим семейство полутел единичной длины, содержащее клин с углом раствора τ . Для клина $f_0^2(x) = x\tau^2/\pi$ и контуры $h(x)$ семейства определяются по формулам

$$(3.6) \quad \frac{h(x)}{\tau} = 1/2 \frac{g(x, k)}{g(1, k)}$$

$$g(x, k) = \sqrt{\frac{x}{k}} + \frac{\pi}{4} \frac{x}{k} + \frac{x}{2k} \arcsin \frac{x-k}{x+k} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{k}}$$

Здесь все профили приведены к одной относительной толщине τ .

Контуры профилей лежат между клином ($k=0$) и параболой $2h(x) = \tau x^{1/2}$ ($k=\infty$, (фиг. 2).

Приведенный коэффициент давления выражается через приведенный коэффициент давления для клина c_{pk} (из (3.5)) следующим образом:

$$(3.7) \quad c_p = c_{pk} \left(\frac{\pi^2}{4} \right)^{1/2} [kg(1, k)]^{-2/3}$$

Для предельной параболы $k=\infty$ и по (3.7) $c_p=0$ при всех $0 < x < 1$; нереальность этого результата указывает на худшую применимость настоящего метода к затупленным телам, что, видимо, связано с неприменимостью основного уравнения (1.1) вблизи затупленного носика.

Поступила 17 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oswatitsch K., Keune F.* The flow around bodies of revolution at Mach number. I. Proc. Conf. on High-Speed Aeronautics. Polytechnic Inst. Brooklyn, Brooklyn, 1955, N. Y., Edwards, 1955.
2. *Spreiter J. R., Alksne A. Y.* Thin airfoil theory based on approximate solution of the transonic flow equation. NACA, 1957, TN 3970.
3. *Spreiter J. R.* The local linearization method in transonic flow theory. Simpos. Transonicum, Aachen, 1962, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1964.
4. *Müller U.* Über ein Verfahren zur Berechnung von Strömungsfeldern in der Umgebung schlanker, symmetrischer Profile bei Schallanströmung. Acta Mech., 1970, Bd. 10, No. 3-4.
5. *Гудерлей К. Г.* Теория околосзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. *Zierep J.* Schallnake Strömungen (Beiträge zur parabolischen Methode), Z. angew. Math. und Mech., 1963, Bd. 43, Sonderh.
7. *Guderley G., Yoshihara H.* The flow over a wedge profile at Mach Number 1. J. Aero. Sci., 1950, vol. 17, No. 11.
8. *Evans T.* The parabolic equation approximation in transonic flow. ZAMP, 1966, vol. 17, fasc. 2.

УДК 533.6.01.1.55

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ НЕСУЩИХ ТЕЛ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОТОКЕ

Е. И. ФИЛАТОВ

(Казань)

Методом Ритца решена задача о форме нижней и верхней поверхностей тела, обладающего максимальным аэродинамическим качеством при гиперзвуковой скорости полета и наличии затупленных передних кромок, толщина которых определяется условием ограниченности их нагрева.

Введем прямоугольную декартову систему координат xuz , связанную с телом, совершающим горизонтальный полет с гиперзвуковой скоростью. Направим ось x противоположно направлению полета, ось z — вертикально вниз, ось y так, чтобы дополнить систему до правой. Сделаем следующие предположения относительно формы искомого тела: 1) плоскость xz является плоскостью симметрии, так что достаточно рассматривать только часть тела, лежащую в полупространстве $y \geq 0$; 2) уравнение нижней части поверхности тела имеет вид $z = z_1(x, y)$, уравнение верхней части — $z = z_2(x, y)$, причем функции z_1 и z_2 в любом сечении $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$