Автор признателен В. П. Коробейникову, который обратил его внимание на задачу об искровом пробое, а также Л. В. Шуршалову за обсуждение ряда вычислительных и газодинамических аспектов всей задачи в целом.

Поступила 2 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян Р. В., Басов Н. Г., Бойко В. А., Зуев В. С., Крохан О. Н., Крюков П. Г., Сенатский Ю. В., Стойлов Ю. Ю.* Нагрев вещества при фокусировке излучения оптического квантового генератора. ЖЭТФ, 1965, т. 48.
2. *Panarella E., Savic P.* Blast waves from a laser-induced spark in air. Canadian J. Phys., 1968, vol. 46, No. 3.
3. *Седов Л. И.* Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
4. *Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
5. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
6. *Шуршалов Л. В.* Численное исследование задачи о взрыве цилиндрического заряда конечной длины. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 4.
7. *Шуршалов Л. В.* Об одном классе двумерных нестационарных течений с ударными волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.

УДК 533.6.011

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ С ОБЫЧНЫМИ И КОМБИНИРОВАННЫМИ ПРОСТЫМИ ВОЛНАМИ

Г. Я. ГАЛИН

(Москва)

В линеаризированной постановке исследуется поведение малых возмущений в некоторых содержащих неопрокидывающиеся простые волны одномерных течениях двухпараметрической среды с произвольным уравнением состояния. Предполагается, что возмущенное течение тоже одномерно.

В средах, у которых производная $(\partial^2 p/\partial V^2)_s$ (p — давление, V — удельный объем, s — энтропия) положительна, центрированные и неопрокидывающиеся простые волны являются волнами разрежения, а их границы – слабыми разрывами. В средах, у которых производная $(\partial^2 p/\partial V^2)_s$ меняет знак, возможны, кроме того, центрированные и неопрокидывающиеся простые волны сжатия, а одна или обе их границы могут быть сильными разрывами [1]. В некоторых средах рассматриваемого класса могут образоваться две или большее число следующих в одном направлении простых волн, каждые две соседние из которых разделены скачком, распространяющимся по частицам перед и за фронтом со звуковой скоростью, различной с разных сторон разрыва. Отметим, что производная $(\partial p/\partial V)_s$ на этих скачках непрерывна.

Такую последовательность простых волн можно рассматривать как одну простую волну, но специального вида, у которой одна или несколько прямолинейных характеристик между ее границами являются разрывами упомянутого выше типа (в примере на фиг. 2 скачкам соответствует обозначение 1). Число простых волн, образующих такую последовательность, и возможность возникновения в среде такого течения вообще зависят от устройства обратимых адиабат в рассматриваемом диапазоне изменения V и p, в частности при непрерывной производной $(\partial p/\partial V)_s$ от формы и числа областей, где производная $(\partial^2 p/\partial V^2)_s$ имеет разные знаки.

Простые волны специального вида, у которых хотя бы одна из границ или прямолинейных характеристик между ними является сильным разрывом, условимся называть комбинированными простыми волнами. Отметим, что комбинированные простые волны могут образовываться также в средах, у которых производная $(\partial^2 p/\partial V^2)_s$ положительна, а в некоторых точках адиабаты Пуассона имеют изломы. Такими свойствами обладают, например, термодинамические модели сред, описывающие равновесные фазовые превращения.

Ради определенности рассмотрим простую волну (обычную или комбинированную), распространяющуюся направо, в положительном направлении оси x. Параметры потока вне простой волны будем считать постоянными. Такое течение может образоваться, например, в неограниченном газе при специальном начальном распределении параметров или может быть вызвано движением ограничивающего газ с одной стороны поршня. Будут рассмотрены также случаи, когда в потоке за простой волной имеется контактный разрыв или скачок, перемещающийся налево с постоянной скоростью.

1. Изучим сначала случаи, когда распределение параметров в невозмущенном потоке непрерывно и задано соотношениями

$$u=u_0, \quad p=p_0, \quad s=s_0 \quad (\xi\geqslant\xi^*(t))$$

$$u-\int_{p_0}^{p}\frac{V\,dp}{a}=u_0, \quad \xi=\frac{at}{V}+\varphi(p), \quad s=s_0(\xi^{**}(t)\leqslant\xi\leqslant\xi^*(t)) \tag{1.1}$$

$$u=u_1, \quad p=p_1, \quad s=s_0 \quad (\xi\leqslant\xi^{**}(t))$$

где u – скорость газа, s – энтропия, a – скорость звука, ξ – лагранжева координата, связанная с эйлеровой координатой x соотношением $(\partial x/\partial\xi)=V$; величины, отмеченные индексами 0 и 1, постоянны.

Очевидно, что при исследовании поведения возмущений в рамках линейной теории необходимо исключить возможность опрокидывания простой волны в невозмущенном потоке. Ниже предполагается, что в простой волне производная $\partial\xi/\partial p$ имеет определенный знак, совпадающий со знаком производной $(\partial^2V/\partial p^2)_s$. В этом случае в простой волне

$$(\partial^2V/\partial p^2)_s[(\partial p/\partial t)-(a/V)(\partial p/\partial\xi)]<0.$$

Пусть в момент времени $t=t_0$ течение испытывает малое возмущение. Параметры возмущенного течения, которое предполагается адиабатическим, будем искать в виде $\tilde{u}=u+u'$, $\tilde{p}=p+p'$, $\tilde{s}=s+s'$, где u, p, s как функции ξ и t определены соотношениями (1.1), а u', p', s' – малые возмущения. При $t=t_0$ возмущения u', p', s' являются заданными функциями ξ на интервале (ξ_2, ξ_1) $(0\leqslant\xi_2<\xi^{**}(t_0)<\xi^*(t_0)>\xi_1)$ и равны нулю при $\xi\leqslant\xi_2$ и $\xi\geqslant\xi_1$. В случаях, когда газ ограничен поршнем, примем, что на поршне $\xi=0$ и $u'=0$.

Вместо u' и p' в качестве неизвестных функций удобно ввести I^+ и I^- по формулам $I^+=u'+(V/a)p'$, $I^-=u'-(V/a)p'$. В линеаризованной постановке для I^+, I^-, s' получим в областях $\xi\geqslant\xi^*(t)$ и $\xi\leqslant\xi^{**}(t)$ систему уравнений (1.2), а в области $\xi^{**}(t)\leqslant\leqslant\xi\leqslant\xi^*(t)$ – систему уравнений (1.3)

$$\frac{\partial I^\pm}{\partial t}\pm\frac{a}{V}\frac{\partial I^\pm}{\partial\xi}=0, \qquad \frac{\partial s'}{\partial t}=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial I^-}{\partial t}-\frac{a}{V}\frac{\partial I^-}{\partial\xi}=\chi(p)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V}{a}\right)-\frac{a}{V}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{V}{a}\right)\right]s' \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(t+\psi)I^+]+\frac{a}{V}\frac{\partial}{\partial\xi}[(t+\psi)I^+]=I^--2\frac{V}{a}\chi(p)s'$$

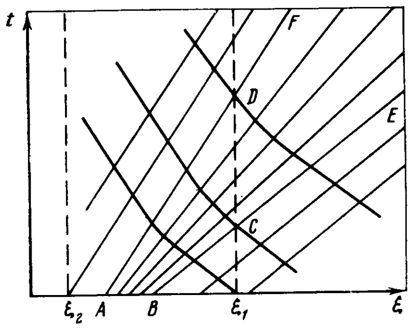
$$\frac{\partial s'}{\partial t}=0$$

$$\psi(p)=\varphi'(p)\Bigg/\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{a}{V}\right), \qquad \chi(p)=\frac{\partial^2V}{\partial p\,\partial s}\Bigg/\left(\frac{\partial^2V}{\partial p^2}\right)_s$$

Характеристики систем уравнений (1.2), (1.3) можно считать известными, а s', p, a/V, ψ, χ – известными функциями t на каждой из них. В области $\xi\geqslant\xi^*(t)$ возмущения легко определяются по начальным данным и будут малыми. В области

$\xi \leqslant \xi^{**}(t)$ (а когда газ ограничен поршнем, в области $0 \leqslant \xi \leqslant \xi^{**}(t)$) решение тоже легко построить после того, как найдено I^- на $\xi = \xi^{**}(t)$.

Изучим поведение возмущений в области $Q: \xi^{**}(t) \leqslant \xi \leqslant \xi^*(t)$, $t > t_0$. Пусть P – произвольная точка этой области. Проинтегрировав первое из уравнений (1.3) вдоль проходящей через точку P характеристики C^-, получим



Фиг. 1

$$I^-(P) = I^-(L) + \int_\tau^t \chi s' \frac{d}{d\eta}\left(\frac{V}{a}\right) d\eta \tag{1.4}$$

где τ – значение t в точке L пересечений этой C^--характеристики с границей ABE области Q (фиг. 1). С помощью (1.4) можно определить $I^-(t)$ на каждой из характеристик C^+ в области Q, а затем найти $I^+(P)$, проинтегрировав второе из уравнений (1.3) вдоль C^+-характеристики, проходящей через точку P. В результате получим

$$I^+(P) = \frac{1}{t+\psi}\left[(t_0+\psi)I^+(t_0) + \int_{t_0}^t I^-(\eta)\,d\eta - 2\frac{V}{a}\chi \int_{t_0}^t s'(\eta)\,d\eta\right] \tag{1.5}$$

С помощью (1.4), (1.5) нетрудно получить следующие оценки для I^- и I^+ в области $\xi < \xi_1$:

$$|I^-(P)| < 2\varepsilon, \qquad |I^+(P)| < 4\varepsilon \tag{1.6}$$

$$\varepsilon = \max_{t=t_0}\{|I^+|, |I^-|, \beta|s'|\}, \qquad \beta = \frac{V_1}{a_1}\max_{[p_0,p_1]}|\chi(p)|$$

Так как $s'=0$ при $\xi \geqslant \xi_1$ и $I^-(L)=0$ на CE, то из (1.4), (1.5) получим, что в области $ECDF$ $I^-(P)=0$ и на каждой C^--характеристике

$$I^+(t) = \frac{\tau_1+\psi}{t+\psi} I^+(\tau_1) \tag{1.7}$$

где τ_1 – момент времени, соответствующий пересечению C^+-характеристики с DC.

Таким образом, в случае, когда область начальных возмущений перед простой волной ограничена, возмущения скорости и давления в простой волне при $t > \tau_1$ стремятся к нулю вдоль прямолинейных характеристик, как $1/t$, а s' равно нулю. Если же в начальный момент возмущения вся область перед простой волной, то, согласно (1.6), возмущения будут оставаться малыми.

2. Рассмотрим случаи, когда невозмущенное течение в области $\xi^{**}(t) \leqslant \xi \leqslant \xi^*(t)$ является комбинированной простой волной. В комбинированной простой волне в областях непрерывности невозмущенного течения для I^+, I^-, s' будут иметь место уравнения (1.3), характеристики которых, как и в п.1, можно считать известными, а χ, ψ, a/V – известными функциями t на характеристиках. Линеаризованные условия для возмущений на прямом скачке можно представить в виде

$$\frac{I_2^- - \alpha_2 I_2^+}{1-\alpha_2} + (V_1 - V_2)j' = \frac{I_1^- - \alpha_1 I_1^+}{1-\alpha_1}$$

$$\frac{I_2^- - \alpha_2^2 I_2^+}{1-\alpha_2^2} + \frac{j\theta_2}{2}s_2' = \frac{I_1^- - \alpha_1^2 I_1^+}{1-\alpha_1^2} + \frac{j\theta_1}{2}s_1' \tag{2.1}$$

$$j(V_1-V_2)\left(\frac{I_2^- - \alpha_2 I_2^+}{1-\alpha_2} - \frac{I_1^- + \alpha_1 I_1^+}{1+\alpha_1}\right) + T_2 s_2' = [T_1 + \theta_1(p_2-p_1)]s_1'$$

$$\alpha = \frac{1-M}{1+M}, \qquad M = \frac{W}{a} \qquad j = \frac{W_1}{V_1} = \frac{W_2}{V_2}, \qquad \theta = \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p$$

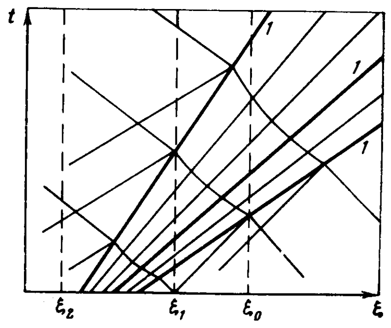
где W – скорость распространения скачка по частицам, T – температура; индексом 1 отмечены параметры перед фронтом, а индексом 2 – за фронтом скачка.

Ниже будут рассматриваться только эволюционные скачки. На эволюционных скачках $|M_1| \geqslant 1$, $|M_2| \leqslant 1$ и определитель системы (2.1), рассматриваемой как система уравнений относительно j' и возмущений, уходящих от разрыва (I_2^-, s_2'), отличен от нуля.

На передней границе комбинированной простой волны $(\xi=\xi^*(t))$, являющейся эволюционным скачком, $M_1{\equiv}M_0{\geqslant}1$, $M_2=1$, а на задней границе $(\xi=\xi^{**}(t))$ $M_1=1$, $M_2\leqslant1$. На C^+-характеристиках в области $\xi^{**}(t)<\xi<\xi^*(t)$, являющихся сильными разрывами, $M_1=M_2=1$.

Очевидно, что возмущения в той части области $\xi\geqslant\xi^*(t)$, $t>t_0$, где они отличны от нуля, будут малыми.

Из (2.1) следует, что если на скачке $M_1=$ $=M_2=1$, $s_1'=0$, $I_1^-=0$, а также когда $M_2=1$, $M_1>1$ и $I_1^+=I_1^-=0$, $s_1'=0$, то $I_2^-=0$, $s^{2\prime}=0$, $j'=0$. Поэтому в комбинированной простой волне $s'=0$, $I^-=0$ при $\xi\geqslant\xi_0$; причем $\xi_0=\xi_1$, когда на передней границе $M_1{\equiv}M_0=1$ если же на передней границе $M_1{\equiv}M_0>1$, то $\xi_0=[M_0\xi_1-$ $-\xi^*(t_0)]/(M_0-1)$ (фиг. 2). Следовательно, на каждой C^+-характеристике в области $\xi^{**}(t)+$ $+0\leqslant\xi\leqslant\xi^*(t)-0$, $\xi\geqslant\xi_0$ имеет место соотношение (1.7), где в рассматриваемых случаях под τ_1 понимается значение t на C^+-характеристике при $\xi=\xi_0$.



Фиг. 2

Используя уравнения (1.3) и условия на скачках (2.1), можно построить решение в области $\xi^{**}(t)+0\leqslant\xi\leqslant{}^*(t)$, $\xi\leqslant\xi_0$ и получить оценки для s', I^+, I^- в этой области. Эти оценки будут иметь вид

$$|s'|<N_1\varepsilon,\qquad |I^-|<N_2\varepsilon,\qquad |I^+|<N_3\varepsilon$$

где N_1, N_2, N_3 при наличии скачков в области $\xi^{**}(t)\leqslant\xi\leqslant\xi^*(t)$ невозмущенного потока зависят от коэффициентов, входящих в соотношения на скачках (2.1), и в принятых предположениях ограничены. Следовательно, о поведении возмущений в комбинированной простой волне можно сделать заключение, аналогичное сформулированному в п.1.

Если задняя граница волны является скачком, то это обстоятельство не будет влиять на расчет и эволюцию возмущений в области $\xi\geqslant\xi^{**}(t)$ в том смысле, что не будет возмущений, уходящих от скачка вперед. Однако течение в целом будет неустойчивым, если возмущения за комбинированной простой волной в примыкающей к ее задней границе области будут возрастать. Такая ситуация имеет место, например, когда поток за комбинированной простой волной ограничен поршнем, а ее задняя граница – скачок, на котором $M_2<1$ и коэффициент K отражения приходящих на скачок из области $\xi<\xi^{**}(t)$ возмущений по модулю больше единицы – $|K|\equiv|I_2^-/I_2^+|>$ >1. В этом случае амплитуда возмущений в результате многократного отражения от скачка будет неограниченно возрастать. Если $|K|<1$ и амплитуда приходящих на скачок из области $\xi>\xi^{**}(t)$ возмущений начиная с некоторого момента равна нулю или стремится к нулю асимптотически, то возмущения скорости и давления между ударной волной и поршнем и возмущение энтропии на скачке будут асимптотически затухать. При $|K|=1$ возмущения не затухают, но будут оставаться малыми.

Если на задней границе $M_2=1$, а также когда $M_2<1$ и за комбинированной простой волной нет отражающих возмущения поверхностей, то s', I^-, I^+ за волной в тех областях, где они отличны от нуля, будут того же порядка, что и в области $\xi^{**}(t)\leqslant$ $\leqslant\xi\leqslant\xi^*(t)$, $\xi<\xi_0$.

Таким образом, при исследовании устойчивости течения специального рассмотрения требуют лишь те случаи, когда возможно многократное отражение возмущений от задней границы комбинированной простой волны. Из полученных выше результатов следует, что во всех таких случаях, не ограничивая общности, можно считать начальные возмущения в области $\xi\geqslant\xi^{**}(t_0)$ равными нулю. Нетрудно получить критерии устойчивости течения, когда отражающей возмущения поверхностью является не поршень, а контактный разрыв или скачок, распространяющийся в направлении, противоположном направлению распространения комбинированной простой волны. Очевидно, что течение будет асимптотически устойчивым, если $|K_2K|<1$, нейтрально устойчивым, когда $|K_2K|=1$, и неустойчивым при $|K_2K|>1$. В этих критериях K_2 – коэффициент отражения возмущений от контактного разрыва или соответственно от скачка, распространяющегося налево.

Поступила 10 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Г. Я.* О распространении возмущений в средах с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций и температуры. Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 4.