

$$(2.11) \quad \frac{\varphi_k(q_1, \dots, q_n, G(q)) - c_k^{(p)}}{q_k - q_k^{(p)}} > \alpha_k^* w_p > \frac{\varphi_k(q_1, \dots, q_n, G(q)) - c_k^{(p+1)}}{q_k - q_k^{(p+1)}}$$

Следовательно, необходимыми и достаточными условиями существования у системы (1.1)–(1.5) или системы (2.1) $n+1$ инвариантных непрерывных или разрывных решений типа бегущих волн являются выполнение условий (2.5), (2.9), (2.11). Для термических функций Ленгмюра при выполнении условий (2.9) условия (2.11) выполняются всегда. Можно показать, что для монотонных термических функций, у которых

$$\partial^2 q_k / \partial c_k'^2 < 0, \quad \partial^2 q_k / \partial c_k' m^2 |_{k \neq m} > 0, \quad \partial^2 q_k / \partial T^2 > 0$$

при выполнении (2.9) условия (2.11) также всегда выполняются и допускается существование $n+1$ инвариантных решений типа бегущих волн.

Поступила 21 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Цабек Л. К. Интегрирование квазилинейных уравнений движения смеси через пористую недеформируемую среду. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М., «Наука», 1973.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений, М., «Наука», 1968.

УДК 532.546

О «ВИСЯЧИХ» СКАЧКАХ НАСЫЩЕННОСТИ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. В. КОРОЛЕВ, Б. В. ШАЛИМОВ, М. И. ШВИДЛЕР

(Москва)

Рассматривается задача о течении в пористой среде двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей. Исследуются «висячие» скачки насыщенности, возникающие в точках разрыва абсолютной проницаемости при учете капиллярных сил и силы тяжести.

Уравнения одномерной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей с учетом капиллярных и гравитационных сил [1, 2] можно записать в виде

$$(1) \quad w = -k(x) \left[\frac{f_1(s)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2} \right] \frac{\partial p_1}{\partial x} - k(x) \frac{f_2(s)}{\mu_2} \frac{\partial p_k}{\partial x} - \\ - k(x) \left[\frac{f_1(s)\gamma_1}{\mu_1} + \frac{f_2(s)\gamma_2}{\mu_2} \right] \cos \alpha, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$(2) \quad w_1 = w\varphi(s) + k(x) \frac{f_2(s)}{\mu_2} \varphi(s) \left(\frac{\partial p_k}{\partial x} - \Delta\gamma \cos \alpha \right), \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = -m \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$p_k = p_2 - p_1 = \frac{\sigma \sqrt{m} \cos \theta}{\sqrt{k}} J(s), \quad \varphi = f_1 / (f_1 + \mu_0 f_2)$$

Здесь $k(x)$ — абсолютная проницаемость пористой среды; s , w_1 — насыщенность и скорость фильтрации смачивающей фазы; $f_i(s)$, p_i , μ_i , γ_i — относительная фазовая проницаемость, давление, вязкость, удельный вес i -й фазы; m — пористость; α — угол между положительным направлением оси x и вертикалью, направленной против силы тяжести; $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$; w — суммарная скорость фильтрации; σ — межфазное натяжение; θ — краевой угол; $J(s)$ — безразмерная функция Леверетта; $\mu_0 = \mu_1 / \mu_2$.

Дифференциальные уравнения (1), (2) имеют смысл в интервалах достаточной гладкости функции $k(x)$. В точках ее разрыва должны выполняться условия сопряжения

$$(3) \quad [p_i] = 0, \quad [w_i] = 0$$

Здесь квадратные скобки означают разность предельных значений слева и справа. Из первого условия (3) следует, что в точках разрыва $k(x)$ должны существовать скачки насыщенности, причем предельные значения проницаемости и насыщенности слева — k^- , s^- и справа — k^+ , s^+ связаны между собой

$$(4) \quad J(s^+) \sqrt{k^-} = J(s^-) \sqrt{k^+}$$

С другой стороны, непрерывность фазовых скоростей фильтрации приводит к условию

$$(5) \quad w\varphi(s^-) + k^- \frac{f_2(s^-)}{\mu_2} \varphi(s^-) \left(\frac{\partial p_k^-}{\partial x} - \Delta\gamma \cos \alpha \right) = \\ = w\varphi(s^+) + k^+ \frac{f_2(s^+)}{\mu_2} \varphi(s^+) \left(\frac{\partial p_k^+}{\partial x} - \Delta\gamma \cos \alpha \right)$$

В случае пренебрежения капиллярными силами ($p_k=0$) в точках разрыва абсолютной проницаемости существуют скачки чисто гравитационного происхождения. Для них вместо (4), (5) требуется лишь одно условие

$$(6) \quad w\varphi(s^-) - k^- \frac{f_2(s^-)}{\mu_2} \varphi(s^-) \Delta\gamma \cos \alpha = \\ = w\varphi(s^+) - k^+ \frac{f_2(s^+)}{\mu_2} \varphi(s^+) \Delta\gamma \cos \alpha$$

Естественно называть неподвижные скачки насыщенности на разрывах $k(x)$ висячими. Если пренебречь влиянием и капиллярности, и силы тяжести, висячих скачков не будет. При этом предполагается, что фазовые проницаемости и кривые капиллярного давления одни и те же по разные стороны от точки разрыва $k(x)$. В противном случае скачки возможны. Конечно, условия (4), (5) или только условие (6) не дают возможности однозначно определить значения s^- и s^+ , которые могут быть получены лишь при совместном рассмотрении этих условий с исходными дифференциальными уравнениями (1), (2), начальными и граничными условиями. Из этого следует, что предельные значения насыщенности и величина висячего скачка не постоянны, а меняются во времени.

Для иллюстрации висячих скачков насыщенности рассматривается задача о вытеснении с постоянной скоростью w нефти из тонкого наклонного пласта длиной L .

Значения параметров, принятые в расчетах: $w=0.01$ м/сутки; $f_1(s)=s^2$;

$$f_2(s) = (1-s)^2; \mu_1=1 \text{ снз}; \mu_2=10 \text{ снз}; L=12 \text{ м}; m=0.2; \alpha=0$$

$$s(0, t) = s_* = 1; \quad s(x, 0) = s_0(x) = 0;$$

$$J(s) = 1-s; \quad \sigma \sqrt{m} \cos \theta = 0.02 \text{ атм (дарси)}^{1/2}.$$

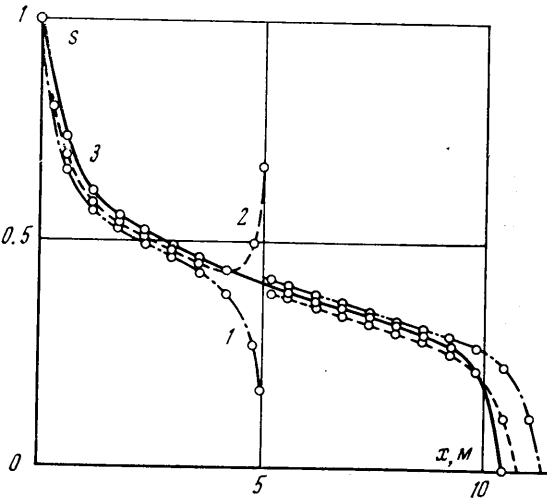
$$\gamma_1 = 1 \text{ г/см}^3; \quad \gamma_2 = 0.9 \text{ г/см}^3.$$

Рассматривались два варианта распределения абсолютной проницаемости по длине пласта

$$k_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ дарси}, & x \leq 5 \text{ м} \\ 0.1 \text{ дарси}, & x > 5 \text{ м} \end{cases}, \quad k_{II}(x) = \begin{cases} 0.1 \text{ дарси}, & x \leq 5 \text{ м} \\ 1 \text{ дарси}, & x > 5 \text{ м} \end{cases}$$

На плоскости xt выбрана разностная сетка с узлами (x_i, t^n) , $x_i = ih$, $t^n = n\tau$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, $Nh=L$, $n=0, 1, 2, \dots$, на которой построена явная консервативная разностная схема, аппроксимирующая закон сохранения первой фазы (воды) в интегральной форме. Условия сопряжения (3), записанные в разностном виде, при этом автоматически выполняются. В предположении $w \geq 0$, $\Delta\gamma \cos \alpha \geq 0$ схема имеет вид

$$(7) \quad w \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h} + k_{i+1/2} \frac{(f_{2,i}^n \varphi_{i+1}^n + f_{2,i+1}^n \varphi_i^n) p_{k,i+1}^n - p_{k,i}^n}{2\mu_2} - \frac{p_{k,i+1}^n - p_{k,i}^n}{h^2}$$



Фиг. 1

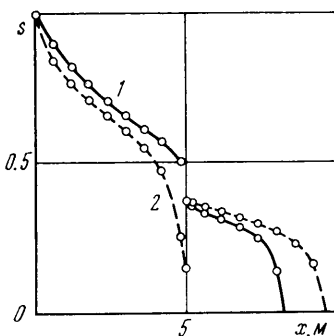
$$-k_{i-1/2} \frac{(f_{2,i-1}^n \Phi_i^n + f_{2,i}^n \Phi_{i-1}^n) \rho_{h,i} - \rho_{h,i-1}}{2\mu_2 h^2} - \frac{(k_{i+1/2} f_{2,i}^n \Phi_{i+1}^n - k_{i-1/2} f_{2,i-1}^n \Phi_i^n)}{\mu_2 h} \Delta\gamma \cos \alpha + m \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = 0$$

$$s_0^n = s_*, \quad s_i^0 = s_0(x_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots, N=60)$$

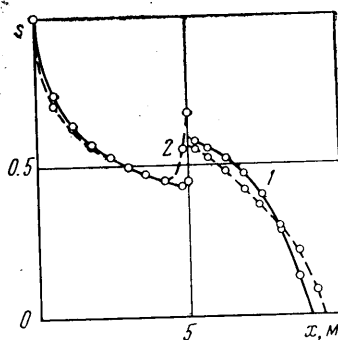
Проницаемость в промежуточной точке $i-1/2$ определяется по формуле $k_{i-1/2} = 2k_{i-1}k_i / (k_{i-1} + k_i)$.

Разностная схема (7) имеет первый порядок точности относительно h и τ , условно устойчива.

На фиг. 1–3 представлены распределения насыщенности, рассчитанные для $t=90$ суток. Значения в некоторых узлах сетки указаны точками.



Фиг. 2



Фиг. 3

Как показывают расчеты, при отсутствии силы тяжести ($\Delta\gamma \cos \alpha = 0$) и наличии капиллярных сил (фиг. 1) профили насыщенности для распределений проницаемости $k_I(x)$ и $k_{II}(x)$ (соответственно профили 1 и 2) существенно различны лишь в левой (нижней) окрестности точки разрыва $x=5$ м. Вне этой окрестности оба профиля достаточно близки к профилю 3, при расчете которого пренебрегали и капиллярными силами.

Влияние гравитационных сил на распределение насыщенности можно оценить по фиг. 2, 3. Профиль насыщенности для $k_I(x)$ при учете гравитационных сил, но без капиллярных сил (кривая 1 на фиг. 2) значительно отличается от кривой 3 на фиг. 1, построенной без учета капиллярных и гравитационных сил. Влияние силы тяжести имеет нелокальный характер. Процесс сегрегации в более проницаемой нижней части пласта идет интенсивнее, чем в верхней, что способствует вытеснению нефти из высокопроницаемой части и возникновению висячего скачка в точке разрыва проницаемости с $s^- > s^+$. Учет капиллярных сил в этом случае (фиг. 2, кривая 2) приводит к изменению характера распределения насыщенности в нижней окрестности точки разрыва проницаемости и обращению знака скачка насыщенности в точке разрыва. Однако вне этой окрестности характер вытеснения остается тем же, что и без капиллярных сил.

При вытеснении нефти из пласта с распределением проницаемости $k_{II}(x)$ (фиг. 3, кривая 1), получается картина, в некотором смысле «обратная» случаю с $k_I(x)$. Действие силы тяжести больше сказывается в верхней, высокопроницаемой части пласта, сегрегация там интенсивнее, вследствие чего возникает висячий скачок насыщенности с $s^+ > s^-$.

Капиллярные силы (фиг. 3, кривая 2), как и в предыдущих случаях, вносят локальные возмущения в характер распределения насыщенности, изменяя знак скачка.

Поступила 6 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М., «Мир», 1964.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967 гг.). М., «Наука», 1969.