

ДВИЖЕНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СОРБИРУЕМОЙ СМЕСИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Л. К. ЦАБЕК

(Москва)

Проанализированы численные решения системы квазилинейных уравнений в частных производных, описывающей движение неизотермической многокомпонентной сорбируемой смеси газов (жидкостей) через состоящую из пористых зерен пористую насыщенную недеформируемую среду; получены условия сходимости итерационного процесса разностной схемы и устойчивости численных решений; проанализированы необходимые и достаточные условия существования решений типа бегущей волны, которые допускает система уравнений движения.

1. Система уравнений представляет собой уравнения непрерывности для каждого компонента смеси, термические уравнения для равновесных концентраций, модельные уравнения кинетики сорбции в пористых зернах для каждого компонента смеси, уравнение непрерывности для тепла, модельное уравнение кинетики теплообмена и соответствующие начальные и граничные условия

$$(1.1) \quad \alpha_k \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial c_k}{\partial z} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$(1.2) \quad q_k = f_k(c_1', c_2', \dots, c_n', T^*)$$

$$(1.3) \quad \alpha_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = \Omega_k(q_k/q_k^*) [c_k - \Phi_k(q_1, \dots, q_n, T^*)], \quad \Phi_k = f_k^{-1}$$

$$\Omega_k(x) = \{\alpha_{0k} + \gamma_k [\omega_k(x)]^{-1}\}^{-1}$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -m_1(T - T^*) - m_2 T$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = m_3(T - T^*) + \sum_{k=1}^n Q_k \frac{\partial q_k}{\partial t}$$

$$(1.6) \quad c_k(z, 0) = b_k + (a_k - b_k) \exp[-z \Omega_k(b_k/q_k^*)], \quad b_k = \text{const}$$

$$(1.7) \quad c_k(0, t) = F_k(t), \quad q_k = f_k(b_1, \dots, b_n, 0), \quad T(z, 0) = T^*(z, 0) = T(0, t) = 0$$

Здесь c_k — концентрация вещества k -го компонента смеси в потоке, q_k — концентрация поглощенного в пористых зернах вещества k -го компонента смеси, γ_k — относительный кинетический коэффициент k -го компонента смеси, α_{0k} — относительный коэффициент эффективного продольного перемешивания, ω_k — функции заполнения пористого зерна, $\alpha_k = K_k/K_0$, $K_k = \max(q_k)/\max(c_k')$, $K_0 = \min K_k$, c_k' — равновесные начальные концентрации, m_1, m_3 — относительные коэффициенты теплообмена между потоком газа (жидкости) и пористыми зернами, m_2 — относительный коэффициент теплообмена с внешней поверхностью канала, состоящего из пористых зерен, Q_k — тепловой эффект при сорбции — десорбции, T^* — относительная температура твердой фазы пористой среды, T — относительная температура газа (жидкости) в потоке, z, t — координата и время соответственно.

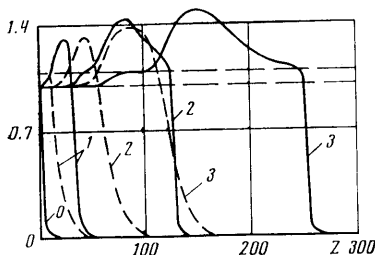
Метод определения функций ω_k приведен в [1], где получены аналитические выражения для функций заполнения при сорбции и десорбции.

В общем случае для произвольных начальных и граничных условий и произвольного вида функций f_k система квазилинейных уравнений (1.1) — (1.7) может быть проинтегрирована численно с помощью разностных схем [2]. Запишем неявную монотонную итерационную консервативную разностную схему точности $O(h^2 + \tau)$ в виде

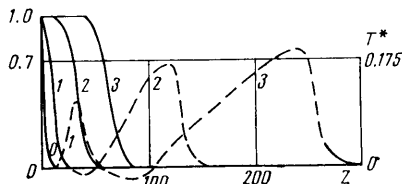
$$(1.8) \quad \begin{aligned} c_{k, i+1}^{(s+1)} &= c_{k, i}^{(s+1)} - h \Omega_{k, i+1/2}^{(s+1)} [c_{k, i+1/2}^{(s+1)} - \Phi_k(q_{1, i+1/2}^{(s+1)}, \dots, T_{i+1/2}^{*(s+1)})] \\ q_{k, i+1}^{(s+1)} &= q_{k, i+1}^j + \frac{\tau}{\alpha_k} \Omega_{k, i+1/2}^{(s)} [c_{k, i+1/2}^{(s)} - \Phi_k(q_{1, i+1/2}^{(s)}, \dots, T_{i+1/2}^{*(s)})] \\ T_{i+1}^{(s+1)} &= T_i^{(s)} - h(m_1 + m_2) T_{i+1/2}^{(s)} + m_1 h T_{i+1/2}^{*(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{(s+1)}{T}_{i+1}^* &= \overset{*}{T}_{i+1}^j + \tau m_3 \left(\overset{(s+1)}{T}_{i+1/2}^{j+1} - \overset{(s)}{T}_{i+1/2}^{j+1} \right) + \\ &+ \tau \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\alpha_k} \overset{(s)}{\Omega}_{k, i+1/2}^{j+1} \left[c_{k, i+1/2}^{j+1} - \varphi_k \left(q_{1, i+1/2}^{j+1}, \dots, \overset{(s)}{T}_{i+1/2}^{j+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Для схемы (1.8) сквозной счет сходится в классе разрывных коэффициентов. Из анализа линеаризованной разностной схемы можно показать, что необходимым и достаточным условием сходимости итерационного процесса, а также абсолютной



Фиг. 1



Фиг. 2

устойчивости и сходимости численных решений является выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} \tau_k &\leq \alpha_k \left\{ \max \left| F_{*k} F_k^* \left(\frac{q_k}{q_k^*} \right) \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial T} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_m} \right) \left[1 + \Omega_k \left(1 + \frac{1}{2} h \Omega_k \right) \right] + \right. \\ &\left. + F_k^* (1 + h \Omega_k) (2 + h \Omega_k)^{-1} \right\}^{-1} \\ (1.9) \quad \tau_0 &\leq \left\{ \max \left| 2m_3 + \sum_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{1}{2} h \Omega_k \right) \frac{Q_k}{\alpha_k} \Omega_k + \frac{Q_k}{\alpha_k} F_k^* \left(1 + \frac{1}{2} h \Omega_k \right)^{-1} + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{Q_k}{\alpha_k} F_k^* \left(\frac{q_k}{q_k^*} \right) \frac{\partial q_k^*}{\partial T} + F_{*k} F_k^* \left(\frac{q_k}{q_k^*} \right) \sum_{m=1}^n \frac{\partial q_m^*}{\partial q_m} + F_{*k} \Omega_k \sum_{m=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_m} \right] \right\}^{-1} \\ F_{*k} &= (3 + h \Omega_k) (2 + h \Omega_k)^{-1}, \quad \tau = \min_k (\tau_k, \tau_0) \\ \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) h &< 1, \quad F_k^* = (c_k - \varphi_k) \Omega_k' (q_k^*)^{-1} \end{aligned}$$

В качестве примера по разностной схеме (1.8) для термических функций Ленгмюра на ЭВМ БЭСМ-6 было рассчитано распространение ступенчатого возмущения через пористую среду при следующих параметрах: $\alpha_1=1.0$, $\alpha_2=1.5$, $\alpha_3=2.5$, $\alpha_{0k}=0.03$, $\Omega_k=1.0$, $b_k=0$, $F_k(t)=a_k=1.0$, $h=3$,

$$f_k = p_k c_k \left[1 + \sum_{h=1}^n p_k c_k \right]^{-1}, \quad \varphi_k = q_k (p_k)^{-1} \left[1 - \sum_{h=1}^n q_k \right]^{-1}, \quad p_{01}=1.0,$$

$p_{02}=2.0$, $p_{03}=4.0$, $m_1=0.2$, $m_2=0$, $m_3=1.0$, $p_k=p_{0k}[-Q_{*k}T^*(1+T^*)^{-1}]$, $Q_{*k}=5.0$, $Q_3=0.1$, $Q_1=0.2$, $Q_2=0.3$, $\gamma_1=1.0$, $\gamma_2=0.25$, $\gamma_3=0.5$.

Результаты численного интегрирования показаны на фиг. 1 (сплошными линиями обозначены c_1 , пунктирными — c_2) и на фиг. 2 (сплошными линиями обозначены c_3 , пунктирными — T^* ; $0-t=0$, $1-t=10$, $2-t=40$, $3-t=80$).

Для рассмотрения примера режим бегущих волн отсутствует, так как не выполняется полученное далее условие (2.9) и тепловая волна расплывается, что приводит к и расплыванию волн концентраций.

2. При $\Omega_k, m_1, m_3 \rightarrow \infty, \alpha_k/Q_k = \alpha_k^*$ и $m_2 = 0$ система (1.1)–(1.5) превращается в следующую систему уравнений:

$$(2.1) \quad \alpha_k^* \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial c_k}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + a \frac{\partial T}{\partial z} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial t}, \quad a = m_3/m_1$$

Для приложений [3] представляет интерес проанализировать решения уравнений движения смеси, когда функция f_k описывается, как в рассмотренном в п. 1 примере, термическим уравнением Ленгмюра. В этом случае характеристические значения λ системы (2.1) определяются из уравнения

$$(2.2) \quad H(\lambda, q) = \sum_{k=1}^n \frac{q_k V^2}{\alpha_k^* p_k} A_k B_k^{-1} = a - \lambda, \quad A_k = \lambda - a + \lambda p_k \frac{\partial(1/p_k)}{\partial T} V$$

$$B_k = \frac{1}{\alpha_k^* p_k V} - \lambda, \quad V = 1 - \sum_{k=1}^n q_k$$

Пронумеруем коэффициенты уравнений Ленгмюра следующим образом:

$$(2.3) \quad \alpha_1 p_{01} > \alpha_2 p_{02} > \dots > \alpha_n p_{0n}$$

Функция $H(\lambda, q)$ имеет полюсы в точках $\lambda_k^* = (\alpha_k^* p_k V)^{-1}$. Если выполняются условия

$$(2.4) \quad A_1 > 0 \text{ при } 0 < \lambda < \lambda_1^*, \quad A_n > 0 \text{ при } \lambda > \lambda_n^*$$

то функция $H(\lambda, q)$ в этих областях монотонно возрастает, так как в этих областях $\partial H(\lambda, q)/\partial \lambda > 0$. Поскольку $H(0, q) = V^{-1} - 1 > 0$, $H(\lambda_1^* - 0) \rightarrow \infty$, $H(\lambda_n^* + 0) \rightarrow -\infty$, $H|_{\lambda \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0$, то кривая H в плоскости (H, λ) имеет $n+1$ точек пересечения с прямой $(a - \lambda)$, и поэтому уравнение (2.2) допускает существование $n+1$ действительных положительных различных корней λ .

$$(2.5) \quad 0 < \lambda_1^* < \lambda_1 < \lambda_2^* < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_n^* < \lambda_{n+1}$$

Из (2.5) следует, что для термических функций Ленгмюра указанного типа при выполнении условий (2.4) система уравнений (2.1) гиперболическая в узком смысле [4]. При нарушении одного или обоих неравенств (2.4) система (2.1) допускает соответственно $n, n-1$ положительных различных собственных значений. Условия (2.5) являются необходимыми условиями [4] существования $n+1$ разрывных решений типа бегущих волн ($y = z - w_p t$, w_p – скорость бегущих волн) для системы (2.1) и соответственно непрерывных решений типа бегущих волн для системы (1.1)–(1.5). Для получения достаточных условий существования решений типа бегущих волн проинтегрируем систему (2.1) с учетом граничных условий. После преобразований найдем

$$(2.6) \quad c_k = \alpha_k^* w_p [q_k - q_k^{(p)}] + c_k^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad c_{n+1} = \alpha_{n+1}^* w_{n+1} q_{n+1}$$

$$(2.7) \quad w_1 = \frac{b_1 - c_1^{(1)}}{\alpha_1^* (q_1^{(0)} - q_1^{(1)})}, \quad w_k = \frac{c_k^{(k)}}{\alpha_k^* q_k^{(k)}}, \quad q_k^{(0)} = f_k(b_1, \dots, b_n, 0), \quad c_k^{(0)} = a_k$$

$$(2.8) \quad T = \sum_{k=1}^n \frac{q_k - q_k^{(0)}}{1 - a/w_1} = G_1(q), \quad T = T^{(p)} + \sum_{k=1}^n \frac{q_k - q_k^{(p)}}{1 - a/w_p} = G(q), \quad p = 2, \dots, n+1$$

Так как $T > 0$, $q_k^{(0)} > q_k^{(1)}$, $q_k^{(p+1)} > q_k^{(p)}$, то из (2.8) следует, что $w_1 < a$, $w_p > a$. С учетом этих неравенств и неравенств (2.3) запишем

$$(2.9) \quad w_1 < a < w_2 < \dots < w_{n+1}$$

Неравенства (2.9) наряду с неравенствами (2.5) являются необходимыми условиями для существования $n+1$ решений типа бегущих волн. Систему уравнений (1.3) с учетом (2.6)–(2.8) перепишем в виде

$$(2.10) \quad \frac{dq_k}{dy} = \Omega_k(q_k/q_k^*) \{q_k^{(p)} - q_k + [\Phi_k(q_1, \dots, q_n, G(q)) - c_k^{(p)}] (\alpha_k^* w_p)^{-1}\} = \Phi_k(q),$$

$$\Phi_k(q^{(p)}) = \Phi_k(q^{(p+1)}) = 0$$

Если функции $\Phi_k(q)$ на интервале $(q_k^{(p)}, q_k^{(p+1)})$ не изменяют знака, то решения q_k на этом интервале будут монотонными. Из этих условий находим

$$(2.11) \quad \frac{\varphi_k(q_1, \dots, q_n, G(q)) - c_k^{(p)}}{q_k - q_k^{(p)}} > \alpha_k^* w_p > \frac{\varphi_k(q_1, \dots, q_n, G(q)) - c_k^{(p+1)}}{q_k - q_k^{(p+1)}}$$

Следовательно, необходимыми и достаточными условиями существования у системы (1.1)–(1.5) или системы (2.1) $n+1$ инвариантных непрерывных или разрывных решений типа бегущих волн являются выполнение условий (2.5), (2.9), (2.11). Для термических функций Ленгмюра при выполнении условий (2.9) условия (2.11) выполняются всегда. Можно показать, что для монотонных термических функций, у которых

$$\partial^2 q_k / \partial c_k'^2 < 0, \quad \partial^2 q_k / \partial c_k' m^2 |_{k \neq m} > 0, \quad \partial^2 q_k / \partial T^2 > 0$$

при выполнении (2.9) условия (2.11) также всегда выполняются и допускается существование $n+1$ инвариантных решений типа бегущих волн.

Поступила 21 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Цабек Л. К. Интегрирование квазилинейных уравнений движения смеси через пористую недеформируемую среду. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М., «Наука», 1973.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений, М., «Наука», 1968.

УДК 532.546

О «ВИСЯЧИХ» СКАЧКАХ НАСЫЩЕННОСТИ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. В. КОРОЛЕВ, Б. В. ШАЛИМОВ, М. И. ШВИДЛЕР

(Москва)

Рассматривается задача о течении в пористой среде двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей. Исследуются «висячие» скачки насыщенности, возникающие в точках разрыва абсолютной проницаемости при учете капиллярных сил и силы тяжести.

Уравнения одномерной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей с учетом капиллярных и гравитационных сил [1, 2] можно записать в виде

$$(1) \quad w = -k(x) \left[\frac{f_1(s)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2} \right] \frac{\partial p_1}{\partial x} - k(x) \frac{f_2(s)}{\mu_2} \frac{\partial p_k}{\partial x} -$$

$$- k(x) \left[\frac{f_1(s)\gamma_1}{\mu_1} + \frac{f_2(s)\gamma_2}{\mu_2} \right] \cos \alpha, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$(2) \quad w_1 = w\varphi(s) + k(x) \frac{f_2(s)}{\mu_2} \varphi(s) \left(\frac{\partial p_k}{\partial x} - \Delta\gamma \cos \alpha \right), \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = -m \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$p_k = p_2 - p_1 = \frac{\sigma \sqrt{m} \cos \theta}{\sqrt{k}} J(s), \quad \varphi = f_1 / (f_1 + \mu_0 f_2)$$

Здесь $k(x)$ — абсолютная проницаемость пористой среды; s , w_1 — насыщенность и скорость фильтрации смачивающей фазы; $f_i(s)$, p_i , μ_i , γ_i — относительная фазовая проницаемость, давление, вязкость, удельный вес i -й фазы; m — пористость; α — угол между положительным направлением оси x и вертикалью, направленной против силы тяжести; $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$; w — суммарная скорость фильтрации; σ — межфазное натяжение; θ — краевой угол; $J(s)$ — безразмерная функция Леверетта; $\mu_0 = \mu_1 / \mu_2$.

Дифференциальные уравнения (1), (2) имеют смысл в интервалах достаточной гладкости функции $k(x)$. В точках ее разрыва должны выполняться условия сопряжения

$$(3) \quad [p_i] = 0, \quad [w_i] = 0$$

Здесь квадратные скобки означают разность предельных значений слева и справа. Из первого условия (3) следует, что в точках разрыва $k(x)$ должны существовать скачки насыщенности, причем предельные значения проницаемости и насыщенности слева — k^- , s^- и справа — k^+ , s^+ связаны между собой

$$(4) \quad J(s^+) \sqrt{k^-} = J(s^-) \sqrt{k^+}$$