Приведенные графики показывают, что при больших числах кавитации (фиг. 2, соответствующая $\sigma=0.20$) оптимальным является вариант некавитирующей решетки (касание происходит в угловой точке, соответствующей переходу от некавитирующих решеток — горизонтальный участок кривых $\varepsilon=\text{const}$ — к кавитирующим). При числах кавитации, меньших некоторого предела, наименьший коэффициент обратного качества достигается на суперкавитирующих решетках (фиг. 3, где $\sigma=0.05$).

Поступила 23 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. *Guerst J. A.* Linearised theory for partially cavitated hydrofoils. Internat. Shipbuilding Progress, 1959, vol. 6.
3. *Guerst J. A.* Linearised theory for fully cavitated hydrofoils. Internat. Shipbuilding Progress, 1960, vol. 7.
4. *Губрий В. И.* Прямая задача для решетки суперкавитирующих профилей. Гидродинамика, вып. 15. Киев, «Наукова думка», 1969.
5. *Егоров И. Т., Садовников Ю. М., Исаев И. И., Басин М. А.* Искусственная кавитация. Л., «Судостроение», 1971.

УДК 532.529.6:541.12

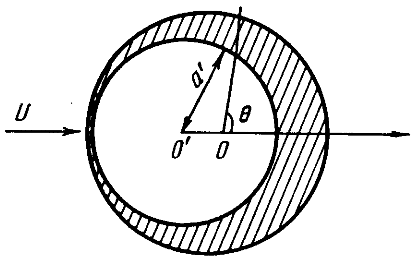
ДИФФУЗИЯ К ЧАСТИЦЕ, ПОКРЫТОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКОЙ

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, А. Т. ЧАЛЮК

(Москва)

Устанавливаются формулы для расчета диффузионного притока вещества к поверхности жидкой пленки на частице, находящейся в ламинарном потоке несжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. Предполагается, что на поверхности пленки происходит полное поглощение диффундирующего вещества. При решении задачи для поля скоростей обтекания используется выражение, установленное в [1]. Полученные результаты обобщают выражения для диффузионного притока вещества к капле, найденные в работе [2].

Определение поля концентраций и диффузионного притока к покрытой пленкой частице проведем в приближении диффузионного пограничного слоя, что соответствует предположению $P=Ua/D\gg1$ (U — скорость потока на бесконечности, a — радиус сферической поверхности, совпадающей с поверхностью пленки, D — коэффициент диффузии, P — число Пекле). В этом случае безразмерное уравнение конвективной диффузии и граничные условия в сферической системе координат (фиг. 1) можно записать в виде



Фиг. 1

$$v_r\frac{\partial c}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial c}{\partial\theta}=\frac{1}{P}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right)$$

$$r=1,\ c=0;\ r\to\infty,\ c=1$$

Здесь c — концентрация вещества в потоке, отнесенная к значению концентрации вдали от частицы.

Введя функцию тока ψ и перейдя от переменных r, θ к переменным ψ, θ, получим (с учетом дополнительного условия в точке набегания)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial c}{\partial\theta}=-\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)$$

$$\psi=0,\quad c=0;\quad \psi\to\infty,\quad c=1;\quad \theta=\pi,\ c=1 \tag{1}$$

$$\left(v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

Для функции тока ψ используем двучленное разложение, найденное в работе [1]. Считая толщину диффузионного пограничного слоя малой и вводя координату $y=r-1\ll 1$, имеем

$$\psi={}^1/_2 y(My+N)\sin^2\theta \tag{2}$$

$$M=(1+R_1)(1+2K-3eb_2{}^e\cos\theta)-R_1\cos\theta(1-2K+3b_2{}^{R_1})+$$
$$+eR\left\{\frac{b_2{}^e}{120}(2+K)-\frac{5\cos^2\theta-1}{4}\left[5b^{eR}+\frac{b_2{}^e}{10}(1+3K)\right]\right\}$$
$$N=(1+R_1)(1-K+2eb_2{}^e\cos\theta)-R_1\cos\theta(1-2b_2{}^{R_1})+$$
$$+eR\left\{\frac{b_2{}^e}{30}(K-7)+\frac{5\cos^2\theta-1}{4}\left[2b^{eR}+\frac{1}{20}b_2{}^e(3+K)\right]\right\}$$

Здесь $R=Ua/\nu$ — число Рейнольдса, ν — коэффициент кинематической вязкости в потоке, e — безразмерное расстояние OO' (фиг. 1), $\varkappa$ — отношение коэффициентов динамической вязкости в потоке и в пленке. Коэффициенты $b_2{}^e$, $K,\ldots$ приведены в общем виде в [1]. Выпишем их вид в приближении тонкой пленки ($h_0=(a-a')/a\ll\ll 1$, где a' — радиус твердой сферы)

$$R_1={}^1/_4(1+{}^1/_2K)R,\qquad b_2{}^{R_1}={}^1/_2KK_1(1+\varkappa h_0),\qquad b_2{}^e={}^3/_8\varkappa KK_1$$
$$b^{eR}={}^1/_{24}b_2{}^eK_2(3K-5-10K^{-1})$$
$$K^{-1}=1+{}^3/_4\varkappa h_0,\qquad K_1{}^{-1}=1+{}^5/_4\varkappa h_0,\qquad K_2{}^{-1}=1+{}^7/_4\varkappa h_0$$

Решение задачи (1), (2) может быть получено в аналитической форме в тех случаях, когда в первом выражении в (2) допустимо пренебрежение одним из слагаемых в круглых скобках. Так, для твердой частицы в отсутствие пленки $\varkappa=0$, $b_2{}^{R_1}={}^1/_2$, $N=0$. Для капли и для частицы, покрытой жидкой пленкой, в случае, когда вязкость жидкости в капле (пленке) мала по сравнению с вязкостью внешней жидкости, можно пренебречь первым слагаемым. Тогда в результате решения задачи (1), (2) поле концентраций определяется в следующем виде:

$$c=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta\exp(-\eta^2)\,d\eta,\qquad \eta=\frac{\psi}{2\sqrt{t}}$$

$$t=\frac{1}{2P}\int_\theta^\pi(q_0+q_1\cos\theta+q_2\cos^2\theta)\sin^3\theta\,d\theta$$

Здесь

$$q_0=(1+R_1)(1-K)+eR\left[\frac{1}{48}b_2{}^e(K-13)-\frac{1}{2}b^{eR}\right]$$
$$q_1=2(1+R_1)eb_2{}^e-R_1(1-2b_2{}^{R_1})$$
$$q_2=eR\left[\frac{5}{2}b^{eR}+\frac{1}{16}b_2{}^e(3+K)\right]$$

Отсюда выражение для локального диффузионного потока на частицу, покрытую жидкой пленкой, имеет вид

$$j=\frac{Dc_0}{a}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{Dc_0}{2a\sqrt{\pi t}}(q_0+q_1\cos\theta+q_2\cos^2\theta)\sin^2\theta \tag{3}$$

Из (3) получаем выражение для среднего по поверхности числа Шервуда

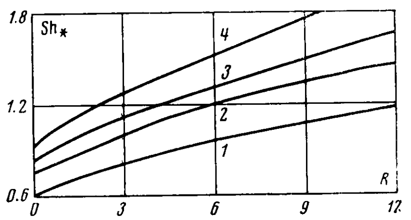
$$\mathrm{Sh}=-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0}\sin\theta\,d\theta=\left[\frac{2P}{3\pi}\left(q_0+\frac{1}{5}q_2\right)\right]^{1/2}= \tag{4}$$
$$=\left(\frac{2}{3\pi}P\right)^{1/2}\left\{\left[1+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}K\right)R\right](1-K)+eRb_2{}^e\frac{K-7}{30}\right\}^{1/2}$$

Заметим, что приведенные результаты содержат в качестве частного слоя формулы для локального диффузионного потока и числа Шервуда для капли. Для получения этих формул необходимо устремить радиус твердой частицы к нулю в выражениях коэффициентов K, b_2^e, ... (см. [1]). Тогда значения q_0, q_1, q_2 в формуле (3) и числа Шервуда для этого случая принимают вид [2]

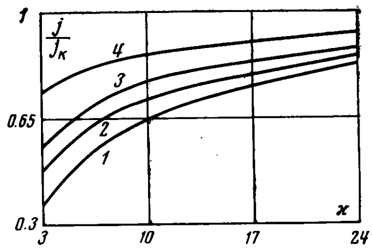
$$q_{0k}=\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\left[1+\frac{2\varkappa+3}{8(\varkappa+1)}R\right],\qquad q_{1k}=\frac{(2\varkappa+3)(5\varkappa+4)\varkappa}{40(\varkappa+1)^3}R,\qquad q_{2k}=0 \tag{5}$$

$$\mathrm{Sh}_k=0.46P^{1/2}\left[\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\left(1+\frac{2\varkappa+3}{8(\varkappa+1)}R\right)\right]^{1/2}$$

Если изменить направление набегающего потока на противоположное (при этом пленка будет смещена относительно частицы навстречу потоку), то во всех получен-



Фиг. 2



Фиг. 3

ных формулах члены, пропорциональные эксцентриситету e, изменят знак. В этом случае, как видно из (4), диффузионный поток возрастает.

В приближении тонкой пленки выражение (4) для числа Шервуда принимает вид

$$\mathrm{Sh}=0.46P^{1/2}\left\{\frac{{}^3/_4\varkappa h_0}{1+{}^3/_4\varkappa h_0}\left[1+\frac{3R}{8}\frac{1+{}^1/_2\varkappa h_0}{1+{}^3/_4\varkappa h_0}-\right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left.-\frac{eR}{10h_0}\frac{1+{}^7/_8\varkappa h_0}{(1+{}^3/_4\varkappa h_0)(1+{}^5/_4\varkappa h_0)}\right]\right\}^{1/2}=0.46P^{1/2}\,\mathrm{Sh}_*$$

В качестве примера на фиг. 2 приведена зависимость числа Шервуда Sh_* от числа Рейнольдса для разных значений $\varkappa$ при $h_0=e=0.2$. Кривым *1–4* соответствуют значения $\varkappa$, равные 4, 10, 20, 100. Видно, что полный поток на частицу, покрытую пленкой, растет с ростом R и $\varkappa$.

Возвращаясь к выражению (3) для локального диффузионного потока на частицу, покрытую пленкой, рассмотрим отношение его к локальному потоку на каплю в передней критической точке $\theta=\pi$. Зависимость $(j/j_k)_{\theta=\pi}$ от $\varkappa$ приведена на фиг. 3 при $h_0=e=0.2$. Кривым *1–4* соответствуют числа Рейнольдса, равные 0, $^1/_2$, 1, 8. Видно, что отношение $(j/j_k)_{\theta=\pi}$ растет с увеличением $\varkappa$ и R, оставаясь меньшим единицы для конечных $\varkappa$, причем при $\varkappa\to\infty$, $(j/j_k)_{\theta=\pi}\to 1$.

Анализ отношения $\mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_k$, согласно формулам (5), (6), показывает, что полный диффузионный поток на частицу, покрытую пленкой, меньше полного потока на каплю (в предельном случае $\mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_k\to 1$ при $\varkappa\to\infty$). Это связано с более интенсивным конвективным переносом вещества вблизи поверхности капли за счет больших скоростей потока в пограничном слое капли по сравнению со скоростями в пограничном слое покрытой пленкой частицы.

Авторы благодарят В. С. Бермана за ценные замечания.

Поступила 10 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т.* Обтекание покрытой жидкой пленкой сферы при малых числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
2. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т.* Диффузия к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.