

УДК 532.528

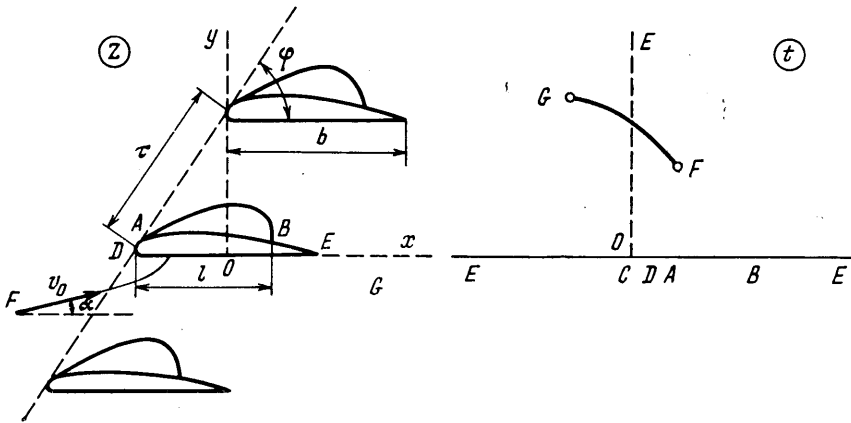
**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О КАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ  
КОСОЙ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ**

И. А. ХРАБРОВ

(Ленинград)

Приводится решение прямой и обратной задач об обтекании плоской решетки профилей с частичной и суперкавитацией при замыкании каверн на одну вихревую особенность. На основе этого решения дается метод проектирования оптимальной с точки зрения гидродинамического качества решетки.

**1. Прямая задача в нелинейной постановке.** Рассматривается обтекание решетки профилей с частичной кавитацией и суперкавитацией. Задача решается методом



Фиг. 1

Жуковского — Седова [1] при замыкании каверны по схеме Тулина на вихревую особенность [2, 3].

Область течения жидкости в физической плоскости  $z$  (см. фиг. 1, где приводится случай частичной кавитации) конформно отображается на риманову поверхность, составленную из листов верхней полуплоскости  $t$  с точками ветвления  $f=f_1+it_2$  и  $g=g_1+ig_2$  — образами бесконечно удаленных точек перед и за решеткой. Первая критическая точка  $C$  при отображении переходит в начало координат, а вторая (задняя кромка для случая частичной кавитации и точка замыкания каверн при суперкавитации) — в бесконечность. По известным полюсам и нулям в этом случае для функции скорости можно записать

$$(1.1) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{Ct}{(t-f)(t-\bar{f})(t-g)(t-\bar{g})}$$

В параметрической плоскости  $t$  функция Жуковского  $\omega = \ln(v_0^{-1}dw/dz)$  ( $v_0$  — скорость на границе каверны) должна удовлетворять следующим граничным условиям: а) на отрезке действительной оси ( $AB$ ) (граница каверны)  $\operatorname{Re} \omega(t) = 0$ ; б) на смоченной части профиля ( $EA$  и  $BE$ )  $\operatorname{Im} \omega(t) = \theta(t)$ , где  $\theta$  — угол, составленный касательной к профилю и осью  $x$ .

Эту смешанную краевую задачу для верхней полуплоскости можно решить с помощью формулы Келдыша — Седова [1]. Для искомой функции, ограниченной в бесконечности (удовлетворяющей, следовательно, постулату Жуковского — Чаплыгина), в случае частичной кавитации названная формула дает

$$(1.2) \quad \omega = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[ \int_{-\infty}^a \frac{\theta(\tau)}{\tau-t} \sqrt{\frac{\tau-b}{\tau-a}} d\tau + \int_b^{\infty} \frac{\theta(\tau)}{\tau-t} \sqrt{\frac{\tau-b}{\tau-a}} d\tau \right] + \frac{Mt+N}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}$$

Аналогично записывается выражение для функции Жуковского при суперкавитации.

Таким образом, задача сводится к решению следующего интегродифференциального уравнения для отображающей функции

$$(1.3) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{dz}{dt} v_0 \exp \omega(t)$$

Для нахождения десяти входящих в него параметров пмееются условия для скорости набегающего потока, для периода решетки, однозначности отображения, для хорды профиля и для начальной точки каверны.

**2. Линеаризация задачи.** Значительных упрощений в решении задачи можно добиться, рассматривая ее в рамках обычных допущений линейной теории кавитации [2, 3].

В этом случае за физическую плоскость может быть принята плоскость комплексного потенциала  $w$ , а значит, отображающая функция находится сразу интегрированием уравнения (1.1).

Вводя малую по сравнению со скоростью основного потока скорость возмущенного движения  $v_{-\infty}(u+i\vartheta)$ , кавитационное число  $\sigma = (v_0/v_{-\infty})^2 - 1$  и совмещая начало каверны, как это принято в линейной теории кавитации, с передней кромкой, можно получить следующее уравнение:

$$(2.1) \quad u - \frac{\sigma}{2} - i\vartheta - i\alpha = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{t}{t-b}} \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{\theta(\tau)}{\tau-t} \sqrt{\frac{\tau-b}{\tau}} dt + \right. \\ \left. + \int_b^{\infty} \frac{\theta(\tau)}{\tau-t} \sqrt{\frac{\tau-b}{\tau}} d\tau \right] + \frac{Mt+N}{\sqrt{t(t-b)}}$$

(приводится уравнение для случая частичной кавитации. Аналогично записывается уравнение при суперкавитационном обтекании решетки.)

Решение задачи в такой постановке может быть доведено до конца для некоторых простейших профилей. В частности, для случая решетки плоских пластин ( $\theta(t)=0$ ) решение дает следующие простые зависимости:

$$(2.2) \quad \frac{\sigma}{\alpha} = 2 \frac{[\sin(\varphi-\gamma_2/2) + m(1+n)\cos(\varphi-\gamma_2/2)] \sin \gamma_1/2 - n \cos(\varphi-\gamma_2/2) \cos \gamma_1/2 + R \cos \varphi}{[\sin(\varphi-\gamma_2/2) + m(1+n)\cos(\varphi-\gamma_2/2)] \cos \gamma_1/2 + n \cos(\varphi-\gamma_2/2) \sin \gamma_1/2 - R \sin \varphi}$$

$$\frac{C_y}{\alpha} = \frac{2}{b/\tau \cos(\varphi-\gamma_2/2)} \left\{ \left( \frac{1}{R} \cos \gamma_1/2 - \cos \gamma_2/2 \right) \frac{\sigma}{2\alpha} - \left( \frac{1}{R} \sin \gamma_1/2 - \sin \gamma_2/2 \right) \right\}$$

$$l/b = \frac{1}{2\pi b/\tau} \left\{ \sin \varphi \ln \frac{(m-h)^2+1}{(m+nh)^2+1} + 2 \cos \varphi [2 \operatorname{arctg} m - \operatorname{arctg}(m-h) - \operatorname{arctg}(m+nh)] \right\}$$

где в случае частичной кавитации ( $0 \leq l/b < 1$ )

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{h-2m}{1-m^2+mh}, \quad \gamma_2 = \operatorname{arctg} \frac{nh+2m}{1-m^2-mnh}, \quad R = \sqrt{\frac{(nh+2m) \sin \gamma_1}{(h-2m) \sin \gamma_2}}$$

а при суперкавитации ( $0 \leq b/l < 1$ )

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{h}{1+m^2+mnh}, \quad \gamma_2 = \operatorname{arctg} \frac{nh}{1+m^2-mnh}, \quad R = \sqrt{n \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}}$$

Здесь  $h$  — параметр, принимающий в зависимости от относительной длины каверны  $l/b$  значения от 0 до  $\infty$ . Кроме того, коэффициенты  $m=f_1/f_2$  и  $n=g_2/f_2$  с параметрами решетки связаны следующим соотношением:  $b/\tau = (2 \cos \varphi \operatorname{arctg} m - \sin \varphi \ln n)/\pi$ .

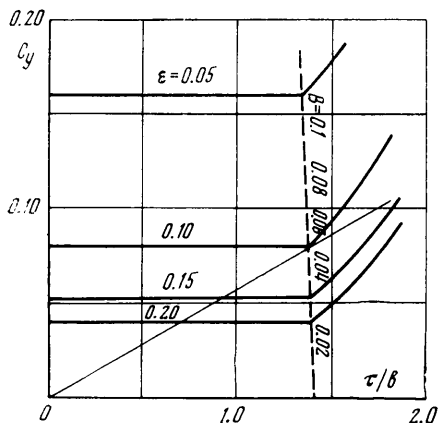
Формулы (2.2), дающие решение для решетки кавитирующих пластин, при  $b/\tau \rightarrow 0$  переходят в формулы для частично и суперкавитирующих пластин [2, 3], при  $l/b \rightarrow 0$  — в соотношения для решетки некавитирующих плоских пластин [4], а при  $l/b \rightarrow \infty$  — в зависимости для суперкавитирующей решетки пластин с беспредельными кавернами [4]. При неограниченном увеличении густоты решетки  $C_y/\alpha \rightarrow 2\tau/b \sin \varphi$  и не зависит от степени развития кавитации.

**3. Обратная задача.** На тех же предпосылках может быть построено решение обратной задачи в нелинейной постановке и проведена его линеаризация. В этом случае функция Жуковского в верхней плоскости задается интегралом Шварца

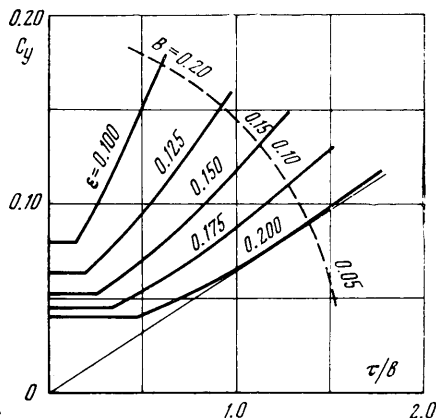
$$(3.1) \quad \omega = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^b \frac{F(\tau)}{\tau-t} d\tau + i(Mt+N)$$

где  $F(\tau)$  — функция, определяющая закон распределения давления на смоченной части профиля ( $-a, b$ ).

Решение этой задачи при любой степени развития кавитации позволяет искать оптимальные (с точки зрения гидродинамического качества) параметры решетки при любом заранее заданном законе распределения нагрузки по хорде профиля.



Фиг. 2



Фиг. 3

Наибольший практический интерес представляют собой решетки, составленные из профилей с равномерным распределением нагрузки вдоль их хорды. Широкий класс таких профилей (при линейной постановке задачи), обеспечивающих заданные гидродинамические и прочностные характеристики, может быть получен методом суперпозиций профилей с безотрывным обтеканием засасывающей стороны и тупой задней кромкой двух типов: профилей, обтекаемых с циркуляцией и обеспечивающих заданную подъемную силу, и профилей, имеющих ту же относительную длину каверн, но при бесциркуляционном обтекании.

Решение для первого из названных профилей получится, если в уравнении (3.1) положить на засасывающей стороне профиля  $F=0$ , а на нагнетающей  $F=-C_y/2$ .

Решетка профилей второго рода получается, если положить  $F=-\pi/2\kappa\Delta(t)$ , где  $\Delta(t)$  — функция Дирака, а  $\kappa$  — параметр, определяющий необходимую толщину профиля.

Полученное таким образом решение в качестве предельных случаев содержит следующие известные результаты: а) при  $b/\tau=0$  и  $b/l=0$  (что соответствует  $\sigma=0$ ) — решение для вентилируемого изолированного профиля [5]; б) при  $b/\tau=0$  и  $b/l=1$  — известный профиль *NACA* с равномерным распределением нагрузки вдоль хорды.

Фиг. 2, 3 иллюстрируют результаты расчетов, основанных на таком решении и могут быть использованы для выбора оптимальных элементов решетки при заданных значениях  $\sigma$ ,  $C_y b$ ,  $\tau$  и моменте сопротивления профиля  $W$  (при расчетах гребных винтов, насосов и т. п. эти параметры являются заданными). Перечисленные данные позволяют вычислить безразмерные коэффициенты

$$A = \delta(b/\tau)^{3/2} \cong \frac{3}{\tau} \sqrt{\frac{W}{\tau}}, \quad B = \frac{C_y b}{\tau}$$

Заданным значениям  $A$  и  $B$  на фиг. 2, 3 (графики построены для  $\varphi=30^\circ$  и  $A=0.06$ ) соответствуют прямые, проходящие через начало координат. Точка касания этих прямых с линиями постоянных значений коэффициента обратного качества профилей  $\epsilon=C_x/C_y$  (при определении последнего к коэффициенту кавитационного сопротивления профиля добавлялся постоянный коэффициент вязкостного сопротивления  $C_{xj}=0.008$ ) и определяет оптимальный вариант решетки.

Приведенные графики показывают, что при больших числах кавитации (фиг. 2, соответствующая  $\sigma=0.20$ ) оптимальным является вариант некавитирующей решетки (касание происходит в угловой точке, соответствующей переходу от некавитирующих решеток — горизонтальный участок кривых  $\varepsilon=\text{const}$  — к кавитирующим). При числах кавитации, меньших некоторого предела, наименьший коэффициент обратного качества достигается на суперкавитирующих решетках (фиг. 3, где  $\sigma=0.05$ ).

Поступила 23 IV 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. *Guerst J. A.* Linearised theory for partially cavitated hydrofoils. Internat. Shipbuilding Progress, 1959, vol. 6.
3. *Guerst J. A.* Linearised theory for fully cavitated hydrofoils. Internat. Shipbuilding Progress, 1960, vol. 7.
4. *Губрий В. И.* Прямая задача для решетки суперкавитирующих профилей. Гидродинамика, вып. 15. Киев, «Наукова думка», 1969.
5. *Егоров И. Т., Садовников Ю. М., Исаев И. И., Басин М. А.* Искусственная кавитация. Л., «Судостроение», 1971.

УДК 532.529.6:541.12

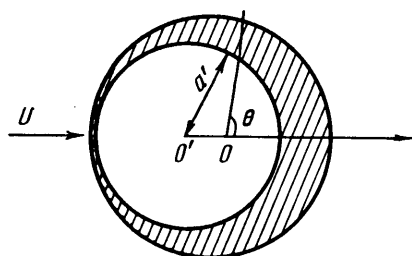
### ДИФфуЗИЯ К ЧАСТИЦЕ, ПОКРЫТОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКОЙ

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, А. Т. ЧАЛЮК

(Москва)

Устанавливаются формулы для расчета диффузионного притока вещества к поверхности жидкой пленки на частице, находящейся в ламинарном потоке несжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. Предполагается, что на поверхности пленки происходит полное поглощение диффундирующего вещества. При решении задачи для поля скоростей обтекания используется выражение, установленное в [1]. Полученные результаты обобщают выражения для диффузионного притока вещества к капле, найденные в работе [2].

Определение поля концентраций и диффузионного притока к покрытой пленкой частице проведем в приближении диффузионного пограничного слоя, что соответствует предположению  $P=Ua/D \gg 1$  ( $U$  — скорость потока на бесконечности,  $a$  — радиус сферической поверхности, совпадающей с поверхностью пленки,  $D$  — коэффициент диффузии,  $P$  — число Пекле). В этом случае безразмерное уравнение конвективной диффузии и граничные условия в сферической системе координат (фиг. 1) можно записать в виде



Фиг. 1

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{1}{P} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right)$$

$$r=1, c=0; \quad r \rightarrow \infty, c=1$$

Здесь  $c$  — концентрация вещества в потоке, отнесенная к значению концентрации вдали от частицы.

Введя функцию тока  $\psi$  и перейдя от переменных  $r, \theta$  к переменным  $\psi, \theta$ , получим (с учетом дополнительного условия в точке набегающего)

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial c}{\partial \theta} = - \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \psi} \right)$$

$$(1) \quad \psi=0, \quad c=0; \quad \psi \rightarrow \infty, \quad c=1; \quad \theta=\pi, \quad c=1$$

$$\left( v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$