Результаты анализа с использованием переменных Дородницына обобщаются на случай течения сжимаемой жидкости.

Автор глубоко признателен Ю. А. Демьянову за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 5 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
2. *Черный Г. Г.* Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
3. *Gasal P.* Sur l'ensemble des solutions de l'équation de la couche limite. J. Mecanique, 1972, vol. 11, No 3.
4. *Корн Г. А., Корн Т. М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1973.

УДК 532.527.2.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

Л. Д. ШАПАКИДЗЕ

(Тбилиси)

Исследуется устойчивость в целом течения Куэтта между двумя вращающимися в одну сторону цилиндрами.

В случае бесконечно малых возмущений достаточное условие устойчивости течения Куэтта (условие Сайнджа) было получено в [1, 2]. В работе [3] для исследования устойчивости в нелинейном случае к этому условию добавлялись некоторые ограничения на начальную энергию и угловые скорости.

В предлагаемой работе с помощью второго метода Ляпунова получены достаточные условия устойчивости в целом, мало отличающиеся от условия Сайнджа. При этом эти условия тем больше приближаются к условию Сайнджа, чем меньше расстояние между цилиндрами.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заключена в полости между двумя концентрическими цилиндрами с радиусами R_1, R_2 $(R_2>R_1)$, вращающимися в одном направлении с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2. В цилиндрических координатах (r, θ, z) с осью z по оси цилиндра уравнения осесимметрических возмущений (в безразмерных переменных [4]) для течения Куэтта

$$u_0=w_0=0, \qquad v_0=Ar+B/r \tag{1.1}$$

$$A=\frac{\mu-\eta^2}{1-\eta^2}, \quad B=\frac{(1-\mu)\eta^2}{1-\eta^2}, \quad \eta=\frac{R_1}{R_2}, \quad \mu=\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}-\frac{\tau^{1/2}}{k^{1/2}r^2}[(1-\mu)+r^2k]v=-\frac{\partial p}{\partial r}+\Delta u-\frac{u}{r^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}+\tau^{1/2}k^{1/2}u=\Delta v-\frac{v}{r^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\Delta w, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\tau=\frac{4\Omega_1^2R_1^4k}{\nu^2(1-\eta^2)^2}, \qquad k=\frac{\mu}{\eta^2}-1$$

а граничными условиями являются

(1.3) $$u=v=w=0 \quad (r=\eta,\ 1)$$

Пусть выполняется условие Сайнджа $\mu>\eta^2$, которое обеспечивает устойчивость течения (1.1) при бесконечно малых возмущениях [1, 2].

2. Рассмотрим множество дважды непрерывно дифференцируемых векторов $\mathrm{V}(u, v, w)$, определённых в замкнутой области $\{\eta\leqslant r\leqslant 1,\ -\infty<z<+\infty\}$, осесимметрических ($u$, v, w не зависят от θ), периодических по z с периодом $2\pi/\alpha\mathrm{T}$ ($\alpha>0$, $\mathrm{T}=|1-\mu|\tau$). Расстоянием между элементами $\{\mathrm{V}\}$ и $\{0\}$ назовем неотрицательное число.

$$\rho^2=\frac{1}{2}\iint\limits_D r[u^2+v^2+w^2]\,dr\,dz, \qquad D=\{\eta\leqslant r\leqslant 1,\ -\pi/\alpha\mathrm{T}\leqslant z\leqslant\pi/\alpha\mathrm{T}\}$$

где $\mathrm{V}(u, v, w)$ соответствует возмущенному состоянию, а $0(0, 0, 0)$ — равновесному.

Сформулируем теорему Ляпунова, на которую будем опираться [4, 5].

Если существует положительно определенный функционал V, допускающий сильный бесконечно малый высший предел при $\rho\to 0$, бесконечно большой низший предел при $\rho\to\infty$, причем производная dV/dt в силу системы уравнений отрицательно определена, то тогда равновесное состояние будет равномерно асимптотически устойчивым в целом.

Возьмем функционал Ляпунова в виде

(2.1) $$V=\frac{1}{2}\iint\limits_D r[u^2+(1+\mathrm{T}r^2)v^2+w^2]\,dr\,dz$$

При $\mu>\eta^2$ $\mathrm{T}=|1-\mu|\tau>0$ и имеем неравенства

(2.2) $$a\rho^2\leqslant V\leqslant b\rho^2$$

$$a=\min[(1+\mathrm{T}r^2),\ 1], \qquad b=\max[(1+\mathrm{T}r^2),1] \qquad (\eta\leqslant r\leqslant 1)$$

Принимая во внимание (2.2), условия теоремы Ляпунова будут выполнены, если найдется некоторая функция $\gamma(\rho)$ такая, что $dV/dt\leqslant-\gamma(\rho)<0$.

Используя уравнения (1.2), при помощи интегрирования по частям получим

(2.3) $$\frac{dV}{dt}=-\iint\limits_D\Biggl\{\Biggl[r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+2\frac{u^2}{r}+\mathrm{T}\left(r^3\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2-rv^2\right)-$$
$$-\frac{\tau^{1/2}(1-\mu)}{k^{1/2}}\frac{uv}{r}\Biggr]+\Biggl[r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\mathrm{T}r^3\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\tau^{3/2}|1-\mu|k^{1/2}r^3uv\Biggr]+$$
$$+r\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+r\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{v^2}{r}+r\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\Biggr\}dr\,dz$$

Применяя методы вариационного исчисления, легко доказать следующие неравенства:

(2.4) $$\iint\limits_D\left[r^3\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2-rv^2\right]dr\,dz\geqslant A_1\iint\limits_D\frac{v^2}{r}\,dr\,dz,$$

$$\iint\limits_D r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2dr\,dz\geqslant A_2\iint\limits_D r^3u^2\,dr\,dz$$

(2.5) $$\iint\limits_D r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2dr\,dz\geqslant\pi^2(\ln\eta)^{-2}\iint\limits_D\frac{u^2}{r}\,dr\,dz,$$

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2dr\,dz\geqslant\mathrm{T}^2\alpha^2\iint\limits_D u^2\,dr\,dz$$

где A_1, A_2 — наименьшие положительные корни соответственно уравнений

(2.6) $$I_0(\sqrt{A_1}\eta^{-1})K_0(\sqrt{A_1})-I_0(\sqrt{A_1})K_0(\sqrt{A_1}\eta^{-1})=0$$

$$I_0\left(\frac{\sqrt{A_2}}{2}\right)K_0\left(\frac{\sqrt{A_2}}{2}\eta^2\right)-I_0\left(\frac{\sqrt{A_2}}{2}\eta^2\right)K_0\left(\frac{\sqrt{A_2}}{2}\right)=0$$

I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя.

Принимая во внимание неравенства (2.4), (2.5) из (2.3) получаем

$$\frac{dV}{dt}\leqslant-\iint\Big\{\frac{1}{r}\Big[(\pi^2(\ln\eta)^{-2}+2)u^2+A_1|1-\mu|\tau v^2+\frac{\tau^{1/2}(1-\mu)}{k^{1/2}}uv\Big]+$$
$$+r^3[A_2u^2+|1-\mu|\tau^3\eta^3\alpha^2v^2+\tau^{3/2}|1-\mu|k^{1/2}uv]+$$
$$+r[\mathrm{T}^2\alpha^2u^2+(\pi^2(\ln\eta)^{-2}+1+\mathrm{T}^2\alpha^2)v^2+\pi^2(\ln\eta)^{-2}w^2]\Big\}dr\,dz$$

Подынтегральное выражение будет положительно определенным, если выполняются условия

$$\mu>\eta^2M(\eta),\qquad M(\eta)=\frac{4[\pi^2(\ln\eta)^{-2}+2]A_1+1}{4[\pi^2(\ln\eta)^{-2}+2]A_1+\eta^2}\qquad(\mu<1)\tag{2.7}$$

$$\mu>\eta^2M_1(\eta),\qquad M_1(\eta)=\frac{4[\pi^2(\ln\eta)^{-2}+2]A_1-1}{4[\pi^2(\ln\eta)^{-2}+2]A_1-\eta^2}\qquad(\mu>1)\tag{2.8}$$

$$\alpha>M_2(\eta),\qquad M_2(\eta)=\frac{1}{4\eta}[\eta(\pi^2(\ln\eta)^{-2}+2)A_1A_2]^{-1/2}\tag{2.9}$$

Следовательно, при $\mu>\eta^2$ и (2.7) — (2.9) получаем, что

$$\frac{dV}{dt}\leqslant-\varepsilon\rho^2,$$

$$\varepsilon=\min[\sigma_1+\sigma_2\eta^2+\mathrm{T}^2\alpha^2,\quad\sigma_1+\sigma_2\eta^2+\mathrm{T}^2\alpha^2+\pi^2(\ln\eta)^{-2}+1,\quad\pi^2(\ln\eta)^{-2}]$$

Здесь σ_1, σ_2 — наименьшие положительные характеристические числа квадратичных форм

$$Q_1(u,v)=[\pi^2(\ln\eta)^{-2}+2]u^2+A_1|1-\mu|\tau v^2+\tau^{1/2}(1-\mu)k^{-1/2}uv$$

$$Q_2(u,v)=A_2u^2+\mathrm{T}^3\eta^3\alpha^2v^2+\tau^{3/2}|1-\mu|k^{1/2}uv$$

Вернемся к выражениям $M(\eta)$, $M_1(\eta)$, $M_2(\eta)$. Как легко усмотреть из формулы (2.7), $M(\eta)-1=O(1-\eta)$. $M_1(\eta)<1$ (см. [6]) и поэтому при $\mu>1$ условие (2.8), как вытекающее из неравенства $\mu>\eta^2$, автоматически выполняется. При η, близком единице, $M_2(\eta)$ близко к нулю.

Следовательно, достаточными условиями устойчивости в целом течения (1.1) являются условия (2.7), (2.9) при $\mu<1$, и условия $\mu>\eta^2$, (2.9) при $\mu>1$.

Если в формулы (2.7) — (2.9) подставить данные эксперимента Тейлора [7], $R_1=3.55$ *см*, $R_2=4.035$ *см*, получим следующие значения для величины $M(\eta)$ и $M_2(\eta)$: $M(\eta)\simeq1+10^{-7}$, $M_2(\eta)\simeq10^{-5}$.

Поступила 14 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Synge J. L.* On the stability of a viscous liquid between rotating coaxial cylinders. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1938, vol. 167, No. 929.
2. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic stability, Oxford, Clarendon Press, 1961.
3. *Joseph D. D., Hung W.* Contributions to the nonlinear theory of stability of viscous flow in pipes and between rotating cylinders. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1971, vol. 44, No. 1.
4. *Pritchard A. J.* A study of two of the classical problems of hydrodynamic stability by the Liapunov method. J. Inst. Math. and its Appl., 1968, vol. 4, No. 1.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
6. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1968.
7. *Taylor G.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Proc. Roy Soc., Ser. A, 1923, vol. 223, No. 289.