4. *Кузнецов А. В., Киселев О. М., Котляр Л. М., Терентьев А. Г.* Теоретическое исследование нелинейных задач течения жидкости со свободными границами. В сб. «Неустановившиеся течения воды с большими скоростями». М., «Наука», 1973.
5. *Киселев О. М., Котляр Л. М.* К задаче о течении тяжелой жидкости с двумя свободными поверхностями. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
6. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.

УДК 532.526.2

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЛАЗИУСА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

А. Н. ПОКРОВСКИЙ

(Москва)

В известных работах, посвященных задаче Блазиуса [1–3], исследование решений проведено либо численным методом, либо склеиванием решения в рядах для малых значений аргумента с асимптотическим разложением для больших значений. В данной работе дан новый способ представления решений для различных краевых задач, связанных с уравнением Блазиуса. Проанализированы свойства полученных решений.

1. Как известно, задача Блазиуса состоит в решении дифференциального уравнения с граничными условиями

$$f'''+ff''=0, \qquad f'=\frac{df}{d\eta} \tag{1.1}$$

$$f=d, \quad f'=\lambda \quad (\eta=0); \qquad f'\to 1 \quad (\eta\to\infty) \tag{1.2}$$

Здесь $f=\psi(2\nu Ux)^{-0.5}$ – безразмерная функция тока; $\eta=yU^{0.5}(2\nu x)^{-0.5}$ – безразмерная поперечная координата; x и y – координаты вдоль пластины и по нормали к ней соответственно; U – скорость внешнего потока; ψ – функция тока; ν – кинематический коэффициент вязкости.

При $d=\lambda=0$ (условия прилипания) точное решение краевой задачи (1.1), (1.2) может быть представлено в виде

$$f=\alpha\int_0^{\eta}\int_0^{\eta_1}\exp\left\{-\alpha\int_0^{\eta_2}\int_0^{\eta_3}\int_0^{\eta_4}\exp\left\{-\alpha\int_0^{\eta_5}\int_0^{\eta_6}\int_0^{\eta_7}\exp\{\ldots\}d\eta_8\,d\eta_7\,d\eta_6\right\}d\eta_5\,d\eta_4\,d\eta_3\right\}d\eta_2\,d\eta_1 \tag{1.3}$$

Используя это выражение, можно получить асимптотическое поведение f' при больших η

$$f'=1+\alpha\int_{\infty}^{\eta}\exp\left(-\frac{\eta_1^2}{2}+\Delta^*\eta_1+\Delta(\eta_1)\right)d\eta_1$$

$$\Delta^*=\alpha\int_0^{\infty}\int_{\eta}^{\infty}\exp\left\{-\alpha\int_0^{\eta_2}\int_0^{\eta_3}\int_0^{\eta_4}\exp\{\ldots\}d\eta_5\,d\eta_4\,d\eta_3\right\}d\eta_2\,d\eta$$

$$\Delta(\eta_1)=\alpha\int_0^{\eta_1}\int_{\eta_2}^{\infty}\int_{\eta_3}^{\infty}\exp\left\{-\alpha\int_0^{\eta_4}\int_0^{\eta_5}\int_0^{\eta_6}\exp\{\ldots\}d\eta_7\,d\eta_6\,d\eta_5\right\}d\eta_4\,d\eta_3\,d\eta_2$$

Здесь Δ^* – толщина вытеснения.

Положим $z_i=\sqrt[3]{\alpha}\eta_i$, тогда

$$f=\sqrt[3]{\alpha}\int_0^{z}\int_0^{z_1}\exp\left\{-\int_0^{z_2}\int_0^{z_3}\int_0^{z_4}\exp\{\ldots\}dz_5\,dz_4\,dz_3\right\}dz_2\,dz_1 \tag{1.4}$$

Это групповое свойство уравнения Блазиуса хорошо известно [2]. Решение в форме (1.3) или (1.4) содержит бесконечное количество интегралов, входящих в подынтегральные выражения. Введем процедуру «обрезания» интегралов, позволяющую получать последовательность решений равномерно-пригодных во всей области η и быстро стремящихся к точному решению краевой задачи. Обрезание интеграла состоит в замене подынтегрального выражения первым членом разложения в степенной ряд и интегрировании полученного выражения, т. е.

$$\int_0^{\eta_i}\int_0^{\eta_{i+1}}\int_0^{\eta_{i+2}} \exp\{\ldots\} d\eta_{i+3}\, d\eta_{i+2}\, d\eta_{i+1} = \frac{\eta_i^3}{6}$$

Проводя обрезание интеграла по переменным z_2; z_3; z_4 в формуле (1.4), получим простое выражение

$$f' = \alpha^{2/3}\int_0^z \exp\left(-\frac{z_1^3}{6}\right) dz_1 = \alpha^{2/3} 6^{1/3}\Gamma_z\left(\frac{4}{3}\right)$$

где через $\Gamma_z(4/3)$ обозначена неполная Г-функция [4]. Принимая во внимание условие при $z\to\infty$ и используя таблицы Г-функции [4], получим $\alpha=6^{-1/2}(\Gamma(4/3))^{-1.5}=$ $=0.4838$. Заметим, что это значение отличается от точного (0.4696) приблизительно на 3%.

Если обрезать интеграл по переменным z_5, z_6, z_7 в (1.4), то придем к виду

$$f' = \alpha^{2/3}F_2(z) = \alpha^{2/3}\int_0^z \exp\left\{-\int_0^{z_2}\int_0^{z_3}\int_0^{z_4} \exp\left\{-\frac{z_5^3}{6}\right\} dz_5\, dz_4\, dz_3\right\} dz_2$$

Значения этого интеграла F_2 были вычислены на ЭВМ М-220, причем при $z\to\infty$, $F_2\to 1.65572$, откуда следует, что $\alpha=0.4694$ и отличие от точного значения составляет $\sim 0.04\%$.

Следующее приближение дает $\alpha=0.4696$, что с точностью до четырех значащих цифр совпадает с точным значением. Четвертое приближение изменяет лишь шестую цифру после запятой, а пятое – восьмую.

2. Пусть теперь $\lambda=0$, а $d\neq 0$ ($d<0$ соответствует вдуву, а $d>0$ – отсосу газа с поверхности). Решение краевой задачи (1.1), (1.2) в этом случае представляется в виде

$$f = d + \alpha_1\int_0^{\eta}\int_0^{\eta_1} \exp\left\{-d\eta_2 - \alpha_1\int_0^{\eta_2}\int_0^{\eta_3}\int_0^{\eta_4} \exp\{\ldots\} d\eta_5\, d\eta_4\, d\eta_3\right\} d\eta_2\, d\eta_1$$

Проводя обрезание интегралов так же, как это сделано в п. 1, получим для первого приближения

$$f' = \alpha_1\int_0^{\eta} \exp\left[-d\eta_2 - \alpha_1\frac{\eta_2^3}{6}\right] d\eta_2 = \frac{\alpha_1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-d)^k}{k!}\left(\frac{6}{\alpha_1}\right)^{1/3(k+1)}\Gamma_\eta\left(\frac{k+1}{3}\right)$$

Удовлетворяя граничному условию при $\eta\to\infty$, получим уравнение

$$1 = \frac{\alpha_1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-d)^k}{k!}\left(\frac{6}{\alpha_1}\right)^{1/3(k+1)}\Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right)$$

из которого следует зависимость $\alpha_1=\alpha_1(d)$ для первого приближения. Таким образом, в данном случае нет необходимости численно решать дифференциальное уравнение (1.1), чтобы удовлетворить краевым условиям (1.2).

Из первого приближения следуют также основные свойства решений: $\alpha_1>0$ для любых d и есть такое $d^*<0$, что для всех $d<d^*$ решение краевой задачи не существует.

Аналогично тому, как это сделано в п. 1, можно получать дальнейшие приближения. Ниже приведено сравнение значений α_1, полученных для первого, второго и третьего приближений (α_1^{I}, α_1^{II}, α_1^{III}) с точным (α_1^*). При $d=-0.5$, -0.6, -0.7 решение для первого приближения не существует.

Наблюдается удовлетворительное совпадение начиная с третьего приближения.

d	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	—0.1
α_1 *	1.2836	1.1100	0.9407	0.7766	0.6190	0.3986
α_1^{I}	1.3607	1.1811	1.0032	0.8277	0.6546	0.3991
α_1^{II}	1.2826	1.1090	0.9396	0.7756	0.6182	0.3989
α_1^{III}	1.2837	1.1101	0.9408	0.7767	0.6191	0.3986

d	—0.2	—0.3	—0.4	—0.5	—0.6	—0.7
α_1*	0.3305	0.2657	0.2049	0.1485	0.0975	0.0531
α_1^{I}	0.3143	0.2284	0.1379			
α_1^{II}	0.3315	0.2678	0.2084	0.1540	0.1055	0.0644
α_1^{III}	0.3304	0.2656	0.2048	0.1484	0.0972	0.0527

3. Рассмотрим теперь случай $d=0$, $\lambda\neq 0$, который соответствует пограничному слою на движущейся стенке. Точное решение краевой задачи (1.1), (1.2) в этом случае представляется в форме

$$f=\lambda\eta+\alpha_2\int_0^{\eta}\int_0^{\eta_1}\exp\left\{-\frac{\lambda\eta_2^2}{2}-\alpha_2\int_0^{\eta_2}\int_0^{\eta_3}\int_0^{\eta_4}\exp\{\ldots\}d\eta_5\,d\eta_4\,d\eta_3\right\}d\eta_2\,d\eta_1 \tag{3.1}$$

Обрезая интегралы, как показано в п. 1, получим для первого приближения

$$f'=\lambda+\alpha_2\int_0^{\eta}\exp\left(-\frac{\lambda\eta_2^2}{2}-\alpha_2\frac{\eta_2^3}{6}\right)d\eta_2=$$

$$=\lambda+\alpha_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{3\cdot 2^k\cdot k!}\left(\frac{6}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{3}(2k+1)}\Gamma_\eta\left(\frac{2k+1}{3}\right)$$

Использование краевого условия при $\eta\to\infty$ позволяет получить связь между λ и α_2

$$1=\lambda+\alpha_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{3\cdot 2^k\cdot k!}\left(\frac{6}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{3}(2k+1)}\Gamma\left(\frac{2k+1}{3}\right)$$

Из полученного уравнения можно получить основные свойства решений: $\alpha_2>0$ для любых λ; существует $\lambda^*<0$ такое, что для всех $\lambda<\lambda^*$ решение краевой задачи не существует; для всех $\lambda<0$ краевая задача имеет два решения — α_{21} и α_{22} (впервые двузначность решений при $\lambda<0$ продемонстрирована численным путем в [3]).

Если рассмотреть случай, когда $\lambda\to 1$, то можно получить, что

$$f'=\lambda+(1-\lambda)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\eta}\exp\left(-\frac{\eta_2^2}{2}\right)d\eta_2$$

которое точно совпадает с соответствующим решением работы [2].

Ниже продемонстрировано сравнение значений α_2, полученных из различных приближений (α_2^{I}, α_2^{II}, α_2^{III}, α_2^{IV}) с точными (α_2*).

λ	0.8	0.6	0.4	0.2	−0.1	−0.2	−0.3	−0.3 *	−0.2 *	−0.1 *
α_2 *	0.1490	0.2753	0.3751	0.4432	0.4610	0.4301	0.3564	0.0849	0.0222	0.0019
α_2^{I}	0.1500	0.2787	0.3825	0.4548	0.4738	0.4344	0.2755	0.2740	0.0719	0.0186
α_2^{II}	0.1490	0.2753	0.3750	0.4430	0.4609	0.4305	0.3600	0.0601	0.0112	0.0004
α_2^{III}	0.1490	0.2753	0.3751	0.4432	0.4610	0.4301	0.3564	0.0861	0.0232	0.0023
α_2^{IV}	0.1490	0.2753	0.3751	0.4432	0.4610	0.4301	0.3564	0.0848	0.0222	0.0019

* Значения, соответствующие нижней ветви решений.

Результаты анализа с использованием переменных Дородницына обобщаются на случай течения сжимаемой жидкости.

Автор глубоко признателен Ю. А. Демьянову за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 5 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
2. *Черный Г. Г.* Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
3. *Gasal P.* Sur l'ensemble des solutions de l'équation de la couche limite. J. Mecanique, 1972, vol. 11, No 3.
4. *Корн Г. А., Корн Т. М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1973.

УДК 532.527.2.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

Л. Д. ШАПАКИДЗЕ

(Тбилиси)

Исследуется устойчивость в целом течения Куэтта между двумя вращающимися в одну сторону цилиндрами.

В случае бесконечно малых возмущений достаточное условие устойчивости течения Куэтта (условие Сайнджа) было получено в [1, 2]. В работе [3] для исследования устойчивости в нелинейном случае к этому условию добавлялись некоторые ограничения на начальную энергию и угловые скорости.

В предлагаемой работе с помощью второго метода Ляпунова получены достаточные условия устойчивости в целом, мало отличающиеся от условия Сайнджа. При этом эти условия тем больше приближаются к условию Сайнджа, чем меньше расстояние между цилиндрами.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заключена в полости между двумя концентрическими цилиндрами с радиусами R_1, R_2 $(R_2>R_1)$, вращающимися в одном направлении с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2. В цилиндрических координатах (r, θ, z) с осью z по оси цилиндра уравнения осесимметрических возмущений (в безразмерных переменных [4]) для течения Куэтта

$$u_0=w_0=0, \qquad v_0=Ar+B/r \tag{1.1}$$

$$A=\frac{\mu-\eta^2}{1-\eta^2}, \qquad B=\frac{(1-\mu)\eta^2}{1-\eta^2}, \qquad \eta=\frac{R_1}{R_2}, \qquad \mu=\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}-\frac{\tau^{1/2}}{k^{1/2}r^2}[(1-\mu)+r^2k]v=-\frac{\partial p}{\partial r}+\Delta u-\frac{u}{r^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}+\tau^{1/2}k^{1/2}u=\Delta v-\frac{v}{r^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\Delta w, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\tau=\frac{4\Omega_1^2R_1^4k}{\nu^2(1-\eta^2)^2}, \qquad k=\frac{\mu}{\eta^2}-1$$