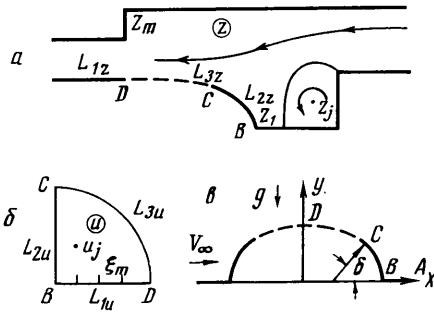


## ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Л. М. КОТЛЯР

(Казань)

Исследуется в точной нелинейной постановке задача о плоском установившемся течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченном непроницаемым полигональным участком, участком криволинейной дуги и участком свободной поверхности конечной протяженности. В потоке могут быть гидродинамические особенности. Большой класс кавитационных задач теории струй сводится к изучению такого рода течений. Доказывается однозначная разрешимость исследуемой задачи при достаточно больших числах Фруда и малой кривизне дуги. Дается метод решения и рассчитывается пример. Подобные задачи решались ранее численными методами [1-3]. Некоторые задачи о струйных течениях тяжелой жидкости с полигональными твердыми границами исследовались аналогичным методом в [4, 5].



Фиг. 1

Im  $u > 0$ , Re  $u > 0$ ) (фиг. 1, б), причем точкам на полигоне, в которых скачком меняется направление вектора скорости, соответствуют точки  $u_m = \xi_m$ , изолированные гидродинамические особенности расположены в точках  $u_j$  и  $L_{nz}$  ( $n=1,3$ ).

Будем считать известной производную комплексного потенциала скорости  $w$  в области  $D$

$$(1.1) \quad \frac{dw}{du} = \varphi_0 F(u),$$

где  $\varphi_0$  — постоянная, имеющая размерность потенциала скорости.

Рассмотрим функцию Н. Е. Жуковского  $\chi(u) = \ln(dw/V_0 dz) = \ln V/V_0 - i\theta = r - i\theta$ , где  $V$  — модуль скорости,  $V_0$  — модуль скорости в точке схода потока,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс.

Пусть на  $L_{2z}$  задана непрерывная функция  $\theta(s)$  ( $s$  — длина дуги, отсчитываемая от точки  $B$  и отнесенная к длине  $l$  дуги  $L_{2z}$ ). На участке  $L_{1z}$

$$(1.2) \quad \theta(\xi) = \theta_m, \quad \xi_m < \xi < \xi_{m+1}$$

где  $\theta_m$  — угол наклона вектора скорости при  $z = z_m z_{m+1}$ . На свободной поверхности из уравнения Бернулли получим граничное условие, связывающее вещественную и мнимую части функции  $\chi(u)$

$$(1.3) \quad e^{3r} r'_\sigma = \gamma_1 |F(e^{i\sigma})| \sin \theta, \quad u = e^{i\sigma} \in L_{3u}$$

где  $\gamma_1 = g\varphi_0/V_0^3$  — безразмерный параметр, обратно пропорциональный числу Фруда,  $g$  — ускорение силы тяжести.

На криволинейной дуге получим следующее граничное условие:

$$(1.4) \quad \theta_{\eta'} = \gamma_2 \kappa(\theta) |F(\eta)| e^{-\tau(\eta)}, \quad u = i\eta \in L_{2u}$$

где  $\gamma_2 = \varphi_0/V_0 l$ ,  $\kappa(\theta) = K(\theta)l$  — безразмерная кривизна дуги  $L_{2u}$ ,  $K(\theta)$  — кривизна дуги  $L_{2u}$ .

Таким образом, функция  $\chi(u)$  должна удовлетворять граничным условиям (1.2) — (1.4). Особенности  $\chi(u)$  в области  $D$  легко определяются по соответствующим особенностям функции  $F(u)$ .

Будем искать  $\chi(u)$  в виде  $\chi(u) = \chi_0(u) + f_1(u) + if_2(u)$ , где  $\chi_0(u)$  — функция Н. Е. Жуковского для задачи о течении невесомой жидкости, когда дуга  $L_{2z}$  заменяется отрезком прямой ( $\theta(u) = \theta(s)|_{s=0}$ ,  $u \in L_{2u}$ ),  $f_k = \mu_k + i\tau_k$  — аналитические в  $D$  и непрерывные в  $\bar{D}$  функции. Функция  $\chi_0(u)$  легко строится [6].

$$(1.5) \quad \chi_0(u) = \ln \prod_m \left[ \frac{(u - \xi_m)(u + \xi_m)}{(u\xi_m - 1)(u\xi_m + 1)} \right]^{\alpha_m} \times \\ \times \prod_j \left[ \frac{(u - u_j)(u - \bar{u}_j)(u + u_j)(u + \bar{u}_j)}{(uu_j - 1)(uu_j + 1)(u\bar{u}_j - 1)(u\bar{u}_j + 1)} \right]^{\beta_j} + A + iB,$$

где  $\alpha_m = (\theta_{m-1})/\tau$ ,  $\beta_j$  — порядок особенности функции  $F(u)$  в точке  $u = u_j$ ,  $A$  и  $B$  — постоянные, которые находятся из соотношений

$$2 \sum_m \alpha_m \xi_m + 4 \sum_j \beta_j u_j + A = 0, \quad \pi \sum_m \alpha_m + \pi \sum_j \beta_j + B + \theta_0 = 0 \\ \theta_0 = \theta_0(u)|_{u=i} = \theta(s)|_{s=0}$$

Потребуем выполнения следующих граничных условий для функций  $f_k(u)$  ( $k = 1, 2$ ):

$$(1.6) \quad \operatorname{Im} f_1(u) = \operatorname{Re} f_2(u) = 0, \quad u \in L_{1u}, \quad \operatorname{Im} f_1(u) = 0, \quad u \in L_{2u}$$

$$\operatorname{Im} f_2(u) = 0, \quad u \in L_{3u}, \quad \operatorname{Re} f_1(u) = 0, \quad u \in L_{2u} \cap L_{3u}$$

Учитывая (1.5) и (1.6), получим из (1.3), (1.4)

$$(1.7) \quad \mu_{1\sigma}' = \frac{\gamma_1 |F(\sigma)| \sin(T + \tau_1 + \mu_1)}{1 - 3\gamma_1 \int_0^{\pi/2} |F| \sin(T + \tau_1 + \mu_1) d\sigma} \\ (u = e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi; \quad T = \operatorname{Im} \chi_0(e^{i\sigma})) \\ \mu_{2\eta}' = -\gamma_2 |F(\eta)| \kappa(\theta) \exp(-\mu_1 + \tau_2) \quad (u = i\eta, \quad 0 \leq \eta \leq 1)$$

Таким образом, для неизвестных функций  $f_k(u)$  ( $k = 1, 2$ ) имеем краевые задачи, определенные граничными условиями (1.6), (1.7).

Пусть  $h(\eta) \in C[0, 1]$ ,  $p(\sigma) \in C[0, \pi/2]$  ( $C$  — пространство непрерывных функций). Введем операторы

$$(1.8) \quad C_1 p = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} p(\sigma) \operatorname{arctg} \left( \frac{1+u^2}{1-u^2} \operatorname{tg} \sigma \right) d\sigma$$

Используя обозначения

$$\lambda_1 = -d\mu_1/d\sigma, \quad \lambda_2 = d\mu_2/d\eta, \quad \nu_1(\sigma) = -|F(e^{i\sigma})|, \quad \nu_2(\eta) = |F(i\eta)|$$

и операторы

$$K_1 p = \operatorname{Re}(C_1 p|_{u=i\eta}), \quad K_2 h = \operatorname{Re}(C_2 h|_{u=e^{i\sigma}})$$

$$D_1 p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} p(\sigma_0) \ln \left| \frac{\sin(\sigma + \sigma_0)}{\sin(\sigma - \sigma_0)} \right| d\sigma_0,$$

$$D_2 h = \frac{1}{\pi} \int_0^1 h(\eta_0) \ln \left| \frac{\eta_0 - \eta}{1 - \eta_0^2 \eta^2} \right| d\eta_0, \quad I h = \int_1^\eta h(\eta) d\eta$$

сведем краевые задачи (1.6), (1.7) к системе уравнений

$$(1.9) \quad \lambda_1 = \frac{\gamma_1 \nu_1 \sin(T + D_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2)}{1 - 3\gamma_1 \int_0^{\pi/2} \nu_1 \sin(T + D_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2) d\sigma} = A_1(\lambda_1, \lambda_2) \\ \lambda_2 = \gamma_2 \nu_2 \kappa(I \lambda_2) e^{-\kappa_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2} = A_2(\lambda_1, \lambda_2)$$

Вводя пространство Банаха  $B=C[0, \pi/2] \times C[0, 1] = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2); \lambda_1 \in C[0, \pi/2]; \lambda_2 \in C[0, 1]\}$  с нормой  $\|\lambda\|_B = \|\lambda_1\|_C + \|\lambda_2\|_C$  ( $\|\lambda\|_C = \max |\lambda_i|$ ) и оператор  $A\lambda = A_1(\lambda_1, \lambda_2) \times A_2(\lambda_1, \lambda_2)$ , систему (1.9) в пространстве  $B$  запишем в виде операторного уравнения (1.10)  $\lambda = A\lambda$

Доказываются теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1.10) и крайних задач (1.6), (1.7) при достаточно малых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

2. Рассмотрим в качестве примера задачу о плоском кавитационном обтекании криволинейного выступа в форме дуги круга, расположенного на горизонтальном дне, безграничным потоком идеальной весомой жидкости по схеме Рябушинского (фиг. 1, в). Сила тяжести направлена вертикально вниз. Для правой половины течения найдем

$$\frac{dw}{du} = \frac{M(1+u^2)}{[(1-u^4) - (1-u^2)^2(a^2+1/a^2) + (1+u^4)]^{3/2}} \quad \chi(u) = u \exp[f_1(u) + if_2(u)]$$

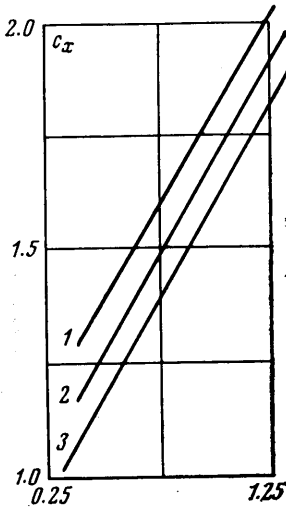
Здесь  $u=a$  — образ точки  $A$ .

Функции  $f_k(u)$  ( $k=1, 2$ ) отыскиваются в виде

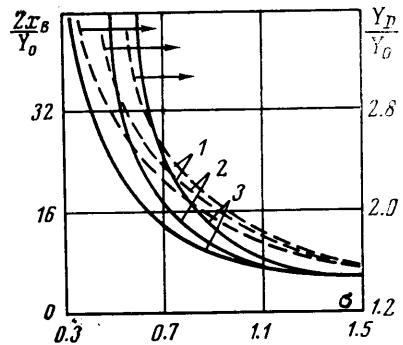
$$f_1(u) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h} u^{2h}, \quad f_2(u) = \sum_{h=0}^{\infty} b_{2h+1} \left( i \frac{1-u}{1+u} \right)^{2h+1}$$

Выбранные таким образом функции удовлетворяют первым четырем граничным условиям (1.6). Коэффициенты  $a_{2h}$  ( $k \neq 0$ ),  $b_{2h+1}$  определяются итерационным методом из системы (1.9). Последнее граничное условие (1.6) служит для определения коэффициента  $a_0$ .

На фиг. 2 изображена зависимость коэффициента сопротивления  $c_x$ , отнесенного к миделю дуги  $y_0$ , от числа кавитации  $\sigma = V_0^2/V_\infty^2 - 1$  для различных чисел Фруда ( $Fr = V_\infty/g y_0$ ) при  $\delta=l/R=0.5$  ( $R$  — радиус



Фиг. 2



Фиг. 3

дуги круга). На фиг. 3 представлены графики относительной длины  $2x_B/y_0$  и ширины  $x_D/y_0$  каверны ( $\delta=0.5$ ) линиями 1–3, так же как и на фиг. 2, соответствуют  $F=5, 10, 100$ . Из графиков видно, что при малых числах Фруда и кавитации сила тяжести значительно влияет на размер каверны и сопротивление дуги. При  $Fr=50$  результаты расчетов практически совпадают с результатами, полученными для невесомой жидкости ( $Fr = \infty, f_1(u)=0$ ) в большом диапазоне изменения чисел кавитации.

Поступила 4 XII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шепеленко В. Н. К расчету кавитационных течений. ПМТФ, 1968, № 5.
2. Зуйков Ю. П., Шепеленко В. Н. Расчет плоских кавитационных течений в поперечном поле тяжести. В сб. «Материалы Всесоюзной конференции по крайним задачам». Казань, Изв. Казанск. ун-та, 1970.
3. Гузевский Л. Г. Численно-аналитический метод расчета струйного обтекания криволинейных препятствий потоком тяжелой жидкости. ПМТФ, 1972, № 6.

4. Кузнецов А. В., Киселев О. М., Котляр Л. М., Терентьев А. Г. Теоретическое исследование нелинейных задач течения жидкости со свободными границами. В сб. «Неустановившиеся течения воды с большими скоростями». М., «Наука», 1973.
5. Киселев О. М., Котляр Л. М. К задаче о течении тяжелой жидкости с двумя свободными поверхностями. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.

УДК 532.526.2

**ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ БЛАЗИУСА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ**

А. Н. ПОКРОВСКИЙ

(Москва)

В известных работах, посвященных задаче Блазиуса [1-3], исследование решений проведено либо численным методом, либо склеиванием решения в рядах для малых значений аргумента с асимптотическим разложением для больших значений. В данной работе дан новый способ представления решений для различных краевых задач, связанных с уравнением Блазиуса. Проанализированы свойства полученных решений.

1. Как известно, задача Блазиуса состоит в решении дифференциального уравнения с граничными условиями

$$(1.1) \quad f''' + ff'' = 0, \quad f' = \frac{df}{d\eta}$$

$$(1.2) \quad f = d, \quad f' = \lambda \quad (\eta = 0); \quad f' \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Здесь  $f = \psi(2\nu Ux)^{-0.5}$  – безразмерная функция тока;  $\eta = yU^{0.5}(2\nu x)^{-0.5}$  – безразмерная поперечная координата;  $x$  и  $y$  – координаты вдоль пластины и по нормали к ней соответственно;  $U$  – скорость внешнего потока;  $\psi$  – функция тока;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

При  $d = \lambda = 0$  (условия прилипания) точное решение краевой задачи (1.1), (1.2) может быть представлено в виде

$$(1.3) \quad f = \alpha \int_0^\eta \int_0^{\eta_1} \exp \left\{ -\alpha \int_0^{\eta_2} \int_0^{\eta_3} \int_0^{\eta_4} \exp \left\{ -\alpha \int_0^{\eta_5} \int_0^{\eta_6} \int_0^{\eta_7} \exp \{ \dots \} d\eta_8 d\eta_7 d\eta_6 \right\} d\eta_5 d\eta_4 d\eta_3 \right\} d\eta_2 d\eta_1$$

Используя это выражение, можно получить асимптотическое поведение  $f'$  при больших  $\eta$

$$f' = 1 + \alpha \int_0^\eta \exp \left( -\frac{\eta_1^2}{2} + \Delta^* \eta_1 + \Delta(\eta_1) \right) d\eta_1$$

$$\Delta^* = \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left\{ -\alpha \int_0^{\eta_2} \int_0^{\eta_3} \int_0^{\eta_4} \exp \{ \dots \} d\eta_5 d\eta_4 d\eta_3 \right\} d\eta_2 d\eta_1$$

$$\Delta(\eta_1) = \alpha \int_0^{\eta_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left\{ -\alpha \int_0^{\eta_4} \int_0^{\eta_5} \int_0^{\eta_6} \exp \{ \dots \} d\eta_7 d\eta_6 d\eta_5 \right\} d\eta_4 d\eta_3 d\eta_2$$

Здесь  $\Delta^*$  – толщина вытеснения.

Положим  $z_i = \sqrt[3]{\alpha} \eta_i$ , тогда

$$(1.4) \quad f = \sqrt[3]{\alpha} \int_0^z \int_0^{z_1} \exp \left\{ -\int_0^{z_2} \int_0^{z_3} \int_0^{z_4} \exp \{ \dots \} dz_5 dz_4 dz_3 \right\} dz_2 dz_1$$