

## ОХЛАЖДЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

А. Г. МЕРЖАНОВ, К. В. ПРИБЫТКОВА, Э. А. ШТЕССЕЛЬ

(Москва)

В настоящее время большое число теоретических и экспериментальных работ посвящено вопросам возникновения и развития естественной конвекции [1-4]. Однако изучение закономерностей затухания естественной конвекции до сих пор не привлекало внимания исследователей. В данной работе численными методами решается задача об охлаждении жидкости при наличии естественной конвекции.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается область квадратного сечения, заполненная жидкостью. Горизонтальные границы области поддерживаются при постоянной во времени температуре  $T_0$ . Вертикальные границы области теплоизолированы. Полость считается бесконечной вдоль одного из горизонтальных направлений, т. е. задача рассматривается в двумерном приближении.

В начальный момент жидкость покоится и имеет температуру  $T_* > T_0$ . В обычных предположениях процесс описывается уравнениями, начальными и граничными условиями

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \text{Pr}(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \text{Pr} \Delta \mathbf{v} - \text{Ra} \theta \mathbf{i}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \text{Pr} \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \Delta \theta, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(1.2) \quad \tau = 0, \quad \theta = 1, \quad \mathbf{v} = 0$$

$$(1.3) \quad \eta = 0, 1; \quad \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = 0, 1; \quad \mathbf{v} = 0; \quad \theta = 0$$

При переходе к безразмерным переменным были использованы следующие масштабы времени, расстояния, скорости, давления и температуры соответственно:  $h^2/a$ ,  $h$ ,  $\nu/h^2$ ,  $\rho \nu a/h^2$ ,  $T_* - T_0$ .

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость,  $T$  — температура,  $P$  — давление,  $\tau$  — время,  $\eta$  — горизонтальная координата,  $\xi$  — вертикальная координата,  $h$  — сторона квадрата,  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости.

В уравнении (1.1)  $\text{Ra} = g\beta(T_* - T_0)h^3/\nu a$  — число Рэлея,  $\text{Pr} = \nu/a$  — число Прандтля,  $\mathbf{i}$  — вектор, направленный против вектора  $\mathbf{g}$ .

Задача решалась методом переменных направлений [4]. Диапазон изменения параметров:  $\text{Pr} = 1 \div 50$ ,  $\text{Ra} = 4 \cdot 10^3 \div 4 \cdot 10^5$ . Находились функции  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau, \eta, \xi, \text{Pr}, \text{Ra})$ ,  $\theta = \theta(\tau, \eta, \xi, \text{Pr}, \text{Ra})$ . Кроме того, рассчитывалось эффективное интегральное число Нуссельта по формуле

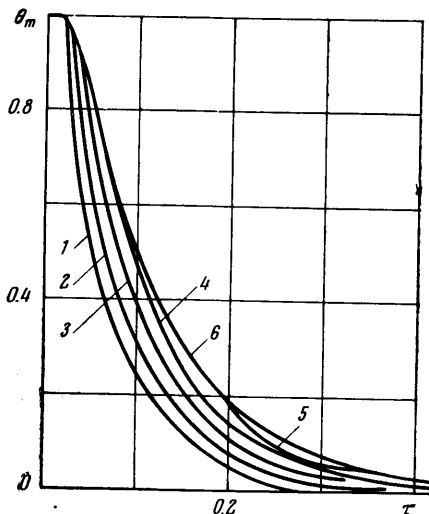
$$(1.4) \quad \text{Nu}(\tau, \text{Pr}, \text{Ra}) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\theta_m} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \right] \right\} d\eta$$

Здесь  $\theta_m$  — максимальная температура в каждом вертикальном сечении области, т. е. в сечении  $\eta = \text{const}$ . Вычисления производились на ЭВМ БЭСМ-6.

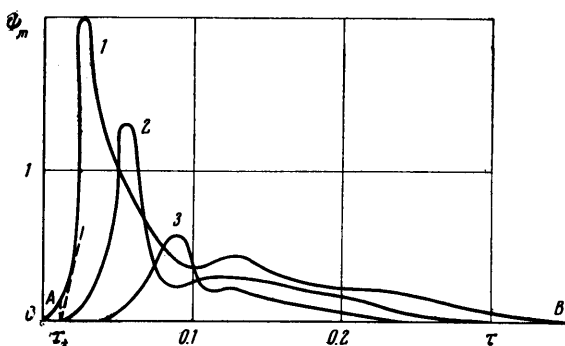
**2. Картина развития процесса.** На фиг. 1 показаны зависимости максимальной температуры в полости от времени для различных значений  $Ra$  при  $Pr=20$ . Кривая 6 соответствует значению  $Ra=0$  (теплопроводность без конвекции). Кривые 1–5 соответствуют значениям  $Ra=4 \cdot 10^5$ ,  $2 \cdot 10^5$ ,  $10^5$ ,  $5 \cdot 10^4$ ,  $2.5 \cdot 10^4$ .

Значение критического числа Рэлея для рассматриваемой задачи можно оценить из аналогии с задачей о конвекции с внутренними химическими источниками тепла [4]. Эта аналогия основана на подобии полей температур (без конвекции) в случае внутренних источников тепла и в случае охлаждения жидкости при одинаковых условиях на границе [5]. Оценки, проведенные с учетом аналогии между рассматриваемой задачей и случаем возникновения конвекции в системах с химическими источниками тепла [4], показали, что значение  $Ra_*$  близко к  $4 \cdot 10^3$ . Таким образом, проведенные расчеты относятся к области, в которой возникает конвекция.

Из фиг. 1 видно, что при  $Ra < 2.5 \cdot 10^4$  конвекция не влияет на процесс охлаждения жидкости. Это связано с тем, что за период индукции развития конвекции жидкость успевает настолько охладиться за счет теплопроводности, что затем конвекция практически не развивается. Отклонение кривых для различных  $Ra$  от кривой охлаждения за счет теплопроводности происходит через период индукции конвекции  $\tau_+(Ra, Pr)$  [3].



Фиг. 1



Фиг. 2

Зависимость максимальной функции тока  $\Psi_m$  от времени, показанная на фиг. 2, указывает на этапы развития и затухания естественной конвекции. Как и в работе [4], процесс можно разделить на три временные области. Первая область (до точки А на фиг. 2) ( $\tau < \tau_+$ ) индукционная и со-

ответствует очень малым по величине значениям функций тока. В этой области конвективное движение практически отсутствует и не влияет на профили температур.

Вторая область (до точки  $B$  на фиг. 2) ( $\tau_+ < \tau < \tau_-$ ) переходная, характеризуется резким возрастанием функций тока. В этой области конвективное движение интенсивно развивается и существенно влияет на теплоперенос.

Наконец, третья область ( $\tau > \tau_-$ ) соответствует затуханию конвекции. На фиг. 2 кривые 1–3 получены для значений чисел  $Ra = 2 \cdot 10^5, 10^5, 5 \cdot 10^4$  соответственно.

Аналогично ведет себя и число  $Nu$  во времени, показанное пунктиром на фиг. 3. Сплошными линиями показаны зависимости  $Nu$  от  $\theta$ . Кривые 1–3 соответствуют значениям чисел  $Ra = 2 \cdot 10^5, 10^5, 5 \cdot 10^4$ .

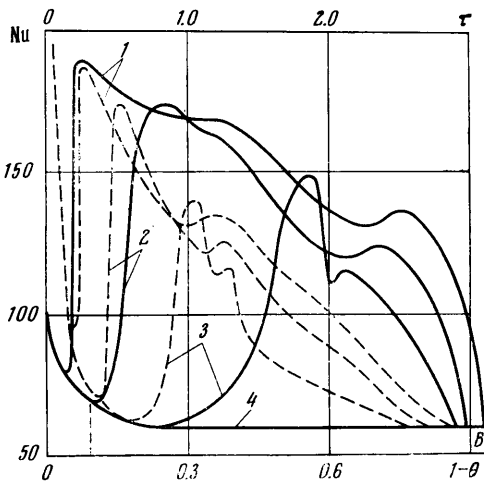
Кривая 4 на фиг. 3 соответствует охлаждению жидкости за счет теплопроводности. Видно, что число  $Nu$ , определенное по формуле (1.4), при достаточно большом времени стремится к некоторой постоянной величине. Кривые, соответствующие различным числам Рэлея, имеют два максимума (как и функции тока). Первый максимум проявляется за счет возникновения конвекции, усиливающей теплообмен. Появление второго максимума связано с тем, что вначале интенсивная конвекция перемещает максимум температур в верхнюю часть сосуда. Это ведет к появлению положительного вертикального градиента температуры, ослабляющего конвекцию. Затем профиль температуры становится более симметричным за счет теплопроводности, что опять приводит к интенсификации конвекции.

В процессах, где профиль температуры устанавливается во времени, такие колебания через определенный промежуток времени исчезают. Из зависимости числа  $Nu$  от времени легко определить границу третьей области. Из фиг. 3 следует, что конвекция вносит существенный вклад в теплоперенос в области, лежащей между точками  $A$  и  $B$ . При  $\tau > \tau_+$  конвективный теплоперенос существен, при  $\tau > \tau_-$  теплоперенос осуществляется за счет теплопроводности. Действительно, из фиг. 3 следует, что при  $\tau = \tau_-$  жидкость еще полностью не охладилась.

Зависимости  $\lg \Psi_m$  от  $\tau$  для различных значений чисел  $Ra$  позволяют сделать вывод о том, что существуют области времен, где функции тока возрастают и затухают экспоненциально, т. е. в области развития конвекции функции тока соответствует следующая зависимость от времени:  $\Psi_m \sim \exp[a_1(Ra)\tau]$ . В области затухания  $\Psi_m \sim \exp[-a_2(Ra)\tau]$ . При этом оказалось, что имеет место следующее соотношение:

$$(2.1) \quad a_1(Ra)a_2(Ra) \cong C = \text{const}$$

Постоянная  $C$  не зависит от величины числа Рэлея и равна  $1.17 \cdot 10^4$ . Выражение (2.1) имеет простой физический смысл: чем быстрее раз-



Фиг. 3

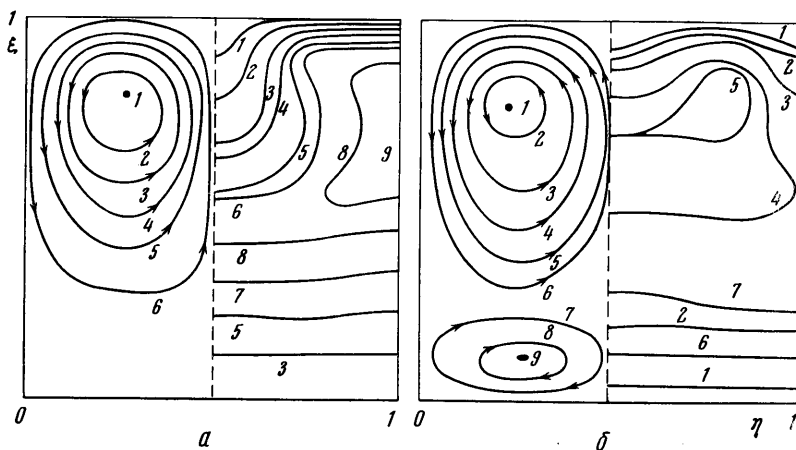
вивается конвекция (чем больше величина  $Ra$ ), тем медленнее происходит затухание конвекции.

На фиг. 4, *а* показана связь между полями температур и скоростей для  $Ra=2 \cdot 10^5$  при  $Pr=20$  для  $\tau=0.02$  и  $\tau=0.1$ . Так как поля температур и скоростей симметричны, то значения величин для всей полости не приводятся. На фиг. 4, *а* линиям тока 1–6 соответствуют значения  $\Psi=2.4, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0.1$ , изотермам 1–9 соответствуют значения  $\theta=0.1, 0.2, 0.382, 0.5, 0.69, 0.8, 0.85, 0.95, 0.97$ .

На фиг. 4, *б* линиям тока 1–9 соответствуют значения  $\Psi=0.26, 0.24, 0.16, 0.1, 0.06, 0.02, -4 \cdot 10^{-4}, -2 \cdot 10^{-3}, -3 \cdot 10^{-3}$ , изотермам 1–7 соответствуют значения  $\theta=0.05, 0.08, 0.15, 0.25, 0.29, 0.1, 0.2$ .

Вначале конвекция возникает в верхней части области, где существует отрицательный вертикальный градиент температуры.

Однако интенсивность конвекции настолько мала, что не влияет на форму профилей температуры. Постепенно конвекция охватывает все



Фиг. 4

большую область жидкости. Через время, равное периоду индукции конвекции, развитая конвекция начинает существенно влиять на распределение температур. Движение жидкости образует ячейку, состоящую из двух противоположно вращающихся вихрей. В центре ячейки жидкость поднимается, а по ее краям — опускается. По мере возрастания величин функций тока изменяется и вид изотерм. Изотермы в основном искривлены лишь в верхней части области, что указывает на то, что вверху конвекция значительно интенсивнее. Таким образом, как и в случае с внутренними химическими источниками тепла [4], в нижней части области теплоперенос осуществляется за счет теплопроводности, а в верхней — естественной конвекцией.

Однако на определенной стадии охлаждения движение жидкости осуществляется в виде двух ячеек (фиг. 4, *б*). В верхней части области — одна ячейка с наиболее интенсивной конвекцией, а в нижней части образуются два вихря, соответствующие сравнительно малым по величине функциям тока, т. е. конвекция становится «двухъярусной». Этому моменту времени соответствуют минимумы на кривых зависимости  $\Psi_m = \Psi_m(\tau)$  и  $Nu = Nu(\tau)$ . Возникновение второго вихря в нижней части полости связано с появлением за счет конвекции горизонтальных градиентов температуры. В верхней части сосуда за счет конвекции охлаждение происходит значительно быстрее, чем в нижней, где основной механизм теплопереноса —

теплопроводность. Поэтому в подъемном сечении ячейки образуются два слабых максимума температуры, расположенные в верхней и нижней частях сечения, что вызывает вторичное течение. Следует отметить, что такие профили температур неустойчивы. Со временем за счет теплопроводности максимумы температур сливаются и вновь образуется одна ячейка.

**3. Нестационарные характеристики.** Из сказанного следует, что существует два типа нестационарных характеристик — характеристики охлаждения и характеристики затухания конвекции. Определим эти характеристики и найдем связь между ними.

Время затухания конвекции будем определять по кривым зависимости максимальной функции тока от времени. Для этого используем период индукции конвекции  $\tau_+$ , определенный по касательной в первой точке перегиба на кривой  $\Psi_m(\tau)$  для фиксированных значений  $Ra$  и  $\tau$  (см. фиг. 2). Каждому  $\tau_+$  соответствует свое значение тока, т. е.  $\tau_+ \sim \Psi_m^+(Ra, Pr)$ . Будем считать, что конвекция затухла, когда функция тока оказывается равной по величине  $\Psi_m^+(\tau_-)$ . Соответствующий этой величине функции тока момент времени будем называть периодом затухания конвекции и обозначим его  $\tau_-$ .

Был произведен анализ зависимости  $\tau_-$  от значений чисел  $Ra$  и  $Pr$ . Из этого анализа следует, что период затухания конвекции  $\tau_-$ , определенный указанным выше способом, существенно зависит от  $Pr$ .

Зависимость  $\tau_-$  от  $Ra$  и  $Pr$  описывается следующим выражением:

$$(3.1) \quad \tau_- = 0.0123 Ra^{0.3} Pr^{-0.14} \quad \text{при } Ra > 2.5 \cdot 10^4 \text{ и } Pr > 1$$

Чем больше величина  $Ra$ , тем дольше продолжается конвективное движение. С другой стороны, с ростом числа  $Pr$  время, в течение которого существует конвективное движение, уменьшается.

Теперь определим характеристики охлаждения жидкости при наличии естественной конвекции.

Представляется естественным ввести конвективное время тепловой релаксации  $\tau_1$ , определенное так же, как и в случае охлаждения жидкости за счет теплопроводности. Конвективное время релаксации, в течение которого максимальная температура жидкости уменьшится в  $e$  раз при  $10^4 < Ra < 10^6$ , следующим образом зависит от числа  $Ra$ :

$$(3.2) \quad \tau_1 = (1 + \ln B) K^{-1}, \quad B = 1.115 - 0.125 \lg Ra, \quad K = 1.8 \lg Ra - 3.35$$

Оказалось, что  $\tau_1$  практически не зависит от числа  $Pr$ . Следует учитывать, что конвективное время релаксации характеризует скорость охлаждения жидкости при наличии естественной конвекции, но не время ее полного охлаждения.

Будем считать, что жидкость полностью охладилась, если максимальная разность температур в рассматриваемой области достигла определенной малой величины. Величина этой конечной разности температур может быть выбрана произвольно. В частности, за время охлаждения можно принять время, для которого максимальная температура в полости составляет 1% начальной температуры жидкости. Анализ зависимости времени охлаждения  $\tau_0$  от величины числа Прандтля и от величины числа Рэлея показал, что при  $Pr > 1$   $\tau_0$  практически не зависит от  $Pr$ . При этом, если  $2.5 \cdot 10^4 < Ra < 10^6$ , то

$$(3.3) \quad \tau_0 = 2.6 Ra^{-0.16}$$

С ростом  $Ra$  время охлаждения сокращается. Сравним времена охлаждения жидкости при наличии естественной конвекции с временем охлаждения только за счет теплопроводности. Напомним, что выражение (3.3) получено по кривым зависимости максимальной температуры от времени. Поэтому  $\tau_0$  необходимо сравнить с временем охлаждения за счет теплопроводности  $\tau_0^1$ , которое рассчитывается по временной зависимости температуры в центре (где в этом случае температура максимальна в любой момент времени)

$$(3.4) \quad \tau_0^1/\tau_0 = 0.2Ra^{0.16} \\ (10^4 < Ra < 10^6)$$

Например, при  $Ra = 10^6$   $\tau_0^1/\tau_0 = 1.82$ , т. е. время полного охлаждения сокращается за счет конвекции примерно в 2 раза.

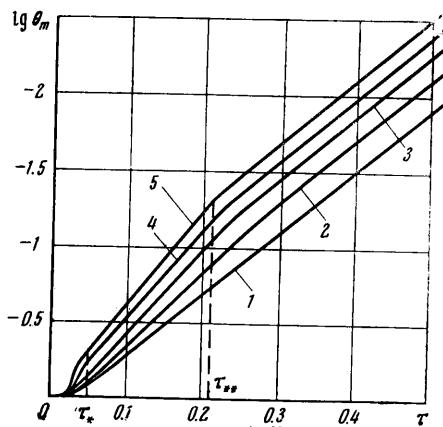
Выражения (3.1) и (3.3) позволяют проанализировать характеристики затухания конвекции и характеристики охлаждения жидкости. Равенство  $\tau_- = \tau_0$  позволяет найти связь между параметрами ( $Ra$  и  $Pr$ ), при которых конвективное движение прекращается одновременно с охлаждением жидкости. Связь между  $Ra$  и  $Pr$ , соответствующая равенству  $\tau_- = \tau_0$ , имеет вид

$$(3.5) \quad Pr^{0.14} = 4.73 \cdot 10^{-3} Ra^{0.46}$$

При  $\tau_- < \tau_0$  конвекция успевает затухнуть прежде, чем жидкость охладится. При  $\tau_- > \tau_0$  конвективное движение существует в уже охлажденной жидкости, т. е. в этом случае проявляется «инерционность» конвективного движения: несмотря на отсутствие причины движения — разности температур, движение жидкости продолжается.

**4. Тепловой регулярный режим охлаждения.** Рассмотренные выше нестационарные характеристики охлаждения жидкости и затухания естественной конвекции могут иметь важные практические приложения. Одним из них является вопрос методики измерений теплопроводности жидкостей и газов. При этом необходимо отметить, что исключение влияния конвективного переноса тепла является наиболее существенным вопросом практики измерений теплопроводности жидкостей и газов. Так, один из самых распространенных стационарных методов [6, 7] — метод плоского горизонтального слоя — требует либо проведения экспериментов в весьма тонких слоях жидкости (меньше 1 мм), либо значительных усложнений экспериментальных установок, чтобы избежать влияния конвекции.

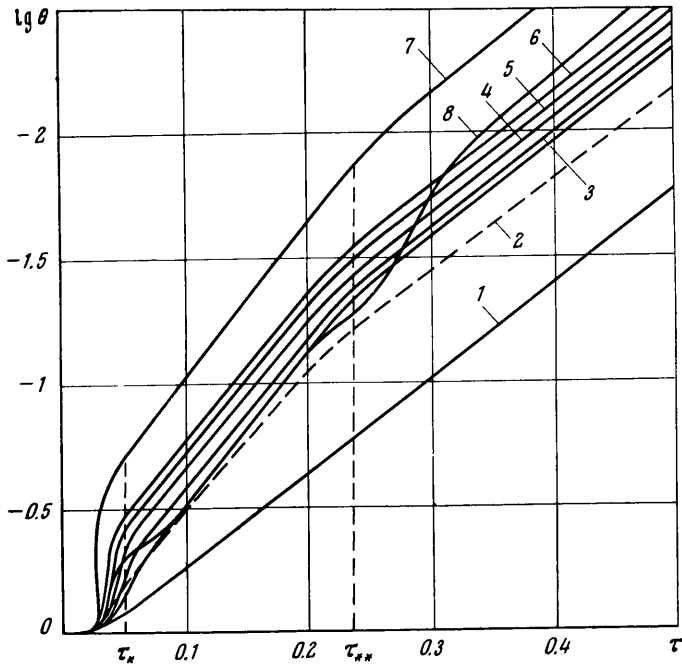
В последние годы началось широкое применение нестационарных методов. Теория наиболее распространенного из нестационарных методов — метода теплового регулярного режима первого рода — изложена в [8]. Однако и для нестационарных методов во многих случаях влияние конвекции может оказаться существенным, например в случае, если характерное время измерений больше периода индукции возникновения конвекции. Поэтому весьма интересно рассмотреть возможность измерения теплопроводности жидкостей и газов, не исключая естественную конвекцию, а учитывая ее в закономерностях охлаждения жидкости (газа).



Фиг. 5

С этой целью возвратимся к временной зависимости максимальной температуры и рассмотрим зависимость  $\lg \theta_m$  от  $\tau$  (фиг. 5).

На этой фигуре цифры 1–5 соответствуют числам  $Ra=0$ ;  $5 \cdot 10^4$ ;  $10^5$ ;  $2 \cdot 10^5$ . Зависимость  $\lg \theta_m$  от  $\tau$  также позволяет говорить о трех временных областях. Первая область  $0 < \tau < \tau_*(Ra)$  нелинейная, которая соответствует малым временам. При  $Ra=0$  (кривая 1 на фиг. 5) для  $\tau_*(Ra) < \tau$  получаем прямую регулярного режима охлаждения за счет теплопроводности. При  $Ra > 2.5 \cdot 10^4$  кривые для различных  $Ra$  располагаются под различными углами к оси  $\tau$  (разный темп охлаждения), а затем начиная с  $\tau_{**}$  кривые



Фиг. 6

располагаются параллельно прямой регулярного режима охлаждения за счет теплопроводности.

Таким образом, можно говорить о существовании двух регулярных режимов охлаждения — конвективном и кондуктивном.  $\tau_{**}$  разделяет эти регулярные режимы (при  $\tau_* < \tau < \tau_{**}$  осуществляется конвективный регулярный режим охлаждения, при  $\tau > \tau_{**}$  — кондуктивный) в соответствии с механизмами передачи тепла в жидкости.  $\tau_*$  и  $\tau_{**}$  в общем случае не совпадают с  $\tau_+$  и  $\tau_-$ .

Все рассмотренные выше закономерности охлаждения жидкости относятся к максимальной температуре в рассматриваемой области. Однако для экспериментальных исследований неудобно использовать максимальную температуру.

Анализ зависимостей  $\lg \theta$  от  $\tau$  для различных точек области при одинаковых  $Ra$  и  $Pg$  позволяет избежать этого.

На фиг. 6 показаны зависимости  $\lg \theta$  от  $\tau$  для  $Ra=2 \cdot 10^5$  и  $Pg=20$  для различных точек области. Фиг. 6 относится к точкам, лежащим в нижней половине сосуда. Кривая 2 на фиг. 6 относится к максимальной температуре. Из анализа таких зависимостей следует, что конвективный регулярный режим существует лишь в нижней части сосуда (кривые параллель-

ны до  $\tau_{**}$ ). Это связано с тем, что в нижней части области конвекция очень слабая и основной механизм теплопередачи в этой части сосуда — теплопроводность. Влияние конвекции на нижнюю часть области сказывается через верхнюю половину области, где конвекция существенна.

Для нижней части слоя зависимость температуры от времени может быть записана в виде

$$(4.1) \quad \theta = B(Ra, \xi) \exp[-K(Ra)\tau]$$

$$(4.2) \quad K(Ra) = 1.8 \lg Ra - 3.35$$

где  $K(Ra)$  — конвективный темп охлаждения.

На фиг. 6 цифрами обозначены кривые, соответствующие следующим координатам: 1 —  $Ra=0$ ; 2 —  $\theta_m(\tau)$ ; 3 —  $\xi=0.5$ ,  $\eta=0.2$ ; 4 —  $\xi=0.4$ ,  $\eta=0.3$ ; 5 —  $\xi=0.5$ ,  $\eta=0.4$ ; 6 —  $\xi=0.3$ ,  $\eta=0.2$ ; 7 —  $\xi=0.1$ ,  $\eta=0.3$ ; 8 —  $\xi=0.7$ ,  $\eta=0.2$ ,

Поступила 30 I 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тарунин Е. Л. Нестационарная конвекция жидкости в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
2. Полежаев В. И. Нестационарная ламинарная тепловая конвекция в замкнутой области при заданном потоке тепла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.
3. Мержанов А. Г., Штессель Э. А. Возникновение и развитие тепловой конвекции в слое вязкой жидкости. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 4.
4. Штессель Э. А., Прибыткова К. В., Мержанов А. Г. Численное решение задачи о тепловом взрыве с учетом свободной конвекции. Физика горения и взрыва, 1971, № 2.
5. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
6. Цедерберг Н. В. Теплопроводность газов и жидкостей. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
7. Петухов Б. С. Опытное изучение процессов теплопередачи. М.—Л., Госэнергоиздат, 1952.
8. Кондратьев Г. М. Регулярный тепловой режим. М., Гостехиздат, 1954.