

О ПРОФИЛИРОВАНИИ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЧАСТЕЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНЫХ И ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Н. И. ТИЛЛЯЕВА

(Москва)

Выполнен анализ влияния закрутки, а также неравномерностей в распределении полной энтальпии и энтропии газа на входе в сопло на форму и эффективность оптимальных сопел.

Вопросы оптимального профилирования сверхзвуковых частей сопел для незакрученных течений с неравномерным распределением по сечению энтропии и полной энтальпии подробно рассмотрены в ряде работ, обзор которых содержится в [1]. Построению оптимальных сопел для закрученных течений посвящены работы [2, 3]. В [2] решена вариационная задача для некоторого частного класса закрученных течений, соответствующих постоянному распределению полной энтальпии, энтропии и циркуляции и удовлетворяющих условию радиальной уравновешенности в сечении входа в сверхзвуковую часть сопла. В [3] рассмотрен более широкий класс закрученных течений с произвольным непрерывным распределением по сечению указанных параметров. Решение выполнено методом перехода к контрольному контуру с использованием подхода, развитого в [4].

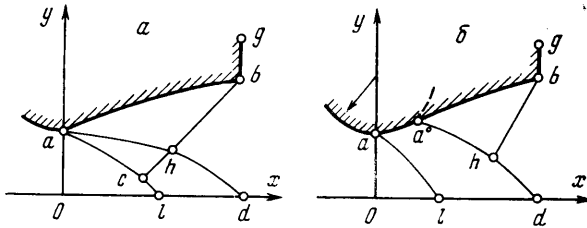
Во всех перечисленных исследованиях, за исключением [2], авторы либо ограничивались получением условий оптимальности, либо, как в [3], построением примеров оптимальных конфигураций для закрученных течений, отвечающих произвольным значениям длины и «противодавления» (давления окружающей среды). На основании таких примеров невозможно оценить влияние закрутки на форму и эффективность оптимальных сопел. Наконец, вовсе отсутствовали численные результаты по оптимальному профилированию сопел для течений с неравномерным распределением энтропии и полной энтальпии.

В настоящей работе даны примеры расчета сверхзвуковых частей сопел, оптимальных для неравномерных и закрученных течений, отвечающих заданным значениям длины и противодавления. Приведены результаты сравнения тяги, реализуемой одним и тем же неравномерным или закрученным потоком в оптимальном сопле и в сопле, профилированном для однородного незакрученного течения. В случае закрученных потоков рассчитываемая область течения включала также и дозвуковую часть сопла.

1. Рассмотрим задачу о построении контура ag сверхзвуковой части сопла максимальной тяги при неравномерном (неизоэнергетическом и не-изэнтропическом) закрученном течении газа внутри него. Пусть газ течет слева направо. Ось u прямоугольной системы координат, расположенной в меридиональной плоскости, совместим с начальной точкой a искомого участка образующей, как показано на фиг. 1, a . Форма дозвуковой части сопла левее точки a считается заданной, поэтому в общем случае точка a будет точкой излома образующей (направление искомого контура справа от a не обязано совпадать с направлением заданного участка слева от точки a), обтекаемой с образованием пучка волн разрежения.

Пусть заданы энтропия $S(\psi)$, полная энтальпия $H(\psi)$ и циркуляция $\Gamma(\psi)$ на входе в сопло, где ψ — функция тока. При наличии излома в точке a указанные три функции вместе с заданной формой дозвуковой части сопла полностью определяют течение левее некоторой характеристики пучка al , параметры на которой, в силу этого, можно считать заданными. Кроме ординаты точки a , т. е. y_a , и сверхзвукового потока на характери-

стике al будем считать заданными максимально допустимую длину X и максимально допустимый поперечный размер Y сопла, а также давление $p^+ = \text{const}$, действующее на концевой (не обтекаемый потоком) участок контура bg , если таковой содержится в оптимальной конфигурации (здесь и далее нижние индексы a, b, \dots приписываются параметрам в соответствующих точках).



Фиг. 1

На искомый контур могут налагаться и некоторые другие ограничения. В частности, может быть задана максимально допустимая кривизна участков, обтекаемых газом. При этом излом в точке a становится недопустимым и должен быть заменен начальным участком максимально допустимой кривизны (aa^0 на фиг. 1, б). Подчеркнем, что если наличие излома в точке a при отсутствии ограничений на кривизну следует из самой постановки задачи, то включение в оптимальную конфигурацию начального участка максимально допустимой кривизны требует дополнительного обоснования. Это обоснование дать в рамках метода контрольного контура, по-видимому, невозможно, и необходимо привлечение общего метода множителей Лагранжа для двух независимых переменных¹.

Итак, требуется построить контур сопла ag , обеспечивающий при перечисленных выше условиях максимум тяги R , под которой понимается сумма потока импульса I через сечение oa сопла и интеграла сил давления по контуру ag

$$X = \int_a^b p y dy + p^+ \int_b^g y dy$$

где p — давление. Заметим, что поскольку в силу сказанного выше течение левее характеристики al задано, величина I в данной задаче является фиксированной и максимум функционала R достигается одновременно с максимумом функционала χ .

Применение к данной задаче метода контрольного контура, изложенного для потоков без закрутки в [5-7], приводит к необходимым условиям экстремума, полностью совпадающим по форме с известными условиями оптимальности для незакрученных течений

$$\rho v^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \vartheta = \lambda = \text{const} \quad (hb)$$

$$(1.1) \quad p_b - p^+ \geq (\rho v^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta)_b \quad (y_b \leq Y) \quad \lambda \geq 0 \quad (x_b \leq X)$$

Здесь ρ — плотность; v — модуль меридиональной компоненты вектора скорости газа, а ϑ — угол ее наклона к оси x ; $\alpha = \arcsin(a/v)$; a — скорость

¹ Подробное обсуждение этого вопроса дано А. Н. Крайко в докторской диссертации «Некоторые вариационные задачи газовой динамики», защищенной в 1973 г. в Институте проблем механики АН СССР.

звука; знакам неравенств в двух последних соотношениях отвечают равенства в выражениях, стоящих в скобках, и наоборот.

Первое из написанных выше условий определяет оптимальное распределение параметров на hb . Второе (условие Буземана) служит для определения y_b и при $y_b < Y$ является необходимым условием классического (двухстороннего) экстремума по ординате точки b . Если $y_b = Y$, то соответствующее неравенство становится необходимым условием максимума χ . Аналогичным образом равенство $\lambda = 0$ служит для определения $x_b < X$ и также есть необходимое условие экстремума. В то же время выполнение неравенства $\lambda > 0$ свидетельствует о том, что сопло в этом случае должно иметь участок краевого экстремума — торец bg , на котором $x = X$. Оптимальная ордината точки g , как нетрудно видеть из выражения для χ , равна максимально допустимой ординате $y_g = Y$. Первое условие (1.1), а также второе условие (при знаке равенства) ранее получены в [3].

Уравнения течения при $v > a$ имеют вид

$$\frac{q^2}{2} + h(\psi, p, \rho) = H(\psi), \quad s(\psi, p, \rho) = S(\psi), \quad yw = \Gamma(\psi)$$

$$(1.2) \quad dy = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \alpha) dx, \quad d\psi \mp \frac{k\rho \sin \alpha}{\sin(\vartheta \pm \alpha)} dy = 0$$

$$d\vartheta \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\rho v^2} dp \pm \frac{1}{y} \left[\frac{(w^2 + a^2) \sin \vartheta \sin \alpha}{ka^2 \sin(\vartheta \pm \alpha)} - \frac{w^2 \operatorname{ctg} \alpha}{v^2} \right] dy = 0$$

Здесь w — проекция скорости потока на окружное направление, $q = \sqrt{v^2 + w^2}$ — модуль скорости газа; h и s — удельные энтальпия и энтропия (известные функции своих аргументов); k — нормирующий множитель, который выбирается так, что $\psi = 0$ на оси симметрии и $\psi = 1$ на стенке сопла. Последние три соотношения в (1.2) записаны в характеристической форме, причем верхние (нижние) знаки соответствуют характеристикам первого (второго) семейства.

Условия (1.1) совместно с уравнениями (1.2) при заданных X , Y , p^+ , $H(\psi)$, $S(\psi)$, $\Gamma(\psi)$, форме сопла слева от точки a и максимально допустимой кривизне контура полностью определяют форму участка ab оптимального сопла и все параметры газа в нем.

В приведенных выше соотношениях и далее все величины являются безразмерными. Приведение к безразмерному виду достигается отнесением пространственных переменных к характерному линейному размеру l_* , скорости — к характерной скорости q_* , плотности — к характерной плотности ρ_* , давления — к $\rho_* q_*^2$, энтальпии — к q_*^2 , функции тока — к $l_*^2 \rho_* q_*$, а тяги, потока импульса и интеграла сил давления — к $l_*^2 \rho_* q_*^2$.

Не останавливаясь на особенностях алгоритма построения оптимальной конфигурации, укажем лишь, что последний не отличается от соответствующего алгоритма для незакрученных течений.

2. На основе полученных условий оптимальности был выполнен анализ влияния закрутки и неоднородности начального потока на форму и эффективность оптимальных сопел. С этой целью было рассчитано большое число оптимальных контуров, отвечающих заданным значениям максимально допустимой длины X и противодавления p^+ при течении совершенного газа с показателем адиабаты $\kappa = 1.4$. Все контуры построены при наличии ограничения на кривизну, причем наименьший допустимый радиус кривизны был принят равным радиусу контура сопла в точке a . В соответствии с этим оптимальная конфигурация вместо точки излома содержала участ-

ток максимально допустимой кривизны aa° (дугу окружности радиуса $r=y_a$).

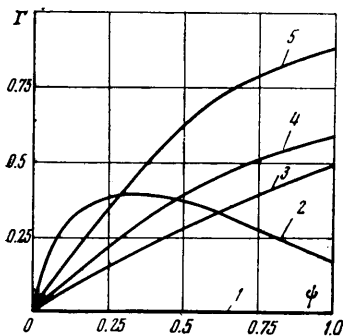
Результаты исследования можно разделить на три группы, в каждой из которых неоднородность начального потока связана либо с закруткой, либо с неизоэнергетичностью, либо с неизэнтропичностью, т. е. для указанных групп

$$(2.1) \quad \Gamma \neq 0, \quad H = \text{const}, \quad S = \text{const}; \quad \Gamma = 0, \quad H \neq \text{const}, \quad S = \text{const}$$

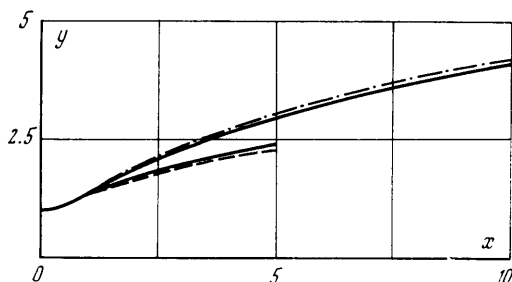
$$\Gamma = 0, \quad H = \text{const}, \quad S \neq \text{const}$$

соответственно.

В случае закрученных течений распределения параметров в некотором «начальном» сечении $o'a'$ расширяющейся части сопла брались из выполненных в [8] расчетов трансзвуковых закрученных течений в осесиммет-



Фиг. 2



Фиг. 3

ричном сопле. В указанной работе задавалось равномерное распределение энтропии, полной энтальпии и закон изменения по сечению циркуляции Γ на входе в сопло. В процессе установления по времени получалось стационарное распределение параметров течения во всей области внутри сопла. В сечении $o'a'$, которое в рассмотренных примерах отстояло от минимального сечения на 0.225 радиуса минимального сечения (последний в данной серии принимался за l), меридиональная компонента v скорости газа была сверхзвуковой. Далее методом характеристик поток рассчитывался в треугольнике $o'a'l'$, ограниченном справа характеристикой второго семейства $a'l'$, а снизу отрезком оси симметрии $o'l'$. Характеристика $a'l'$ играла роль начальной характеристики при дальнейших расчетах. В качестве q_* и ρ_* брались критические скорость и плотность потока на входе в сопло. Распределения циркуляции по ψ в исследованных вариантах приведены на фиг. 2.

Для оценки влияния учета закрутки на форму и эффективность оптимальных сопел строились оптимальные контуры для закрученного и незакрученного течений на входе в сопло, отвечающие одним и тем же значениям максимально допустимой длины X и противодавления p^+ . Параметры незакрученного течения в сечении $o'a'$ также брались из [8]. Затем решалась задача о течении исходного закрученного потока в сопле, оптимальном при отсутствии закрутки. Полученные значения тяги R^0 и интеграла сил давления X^0 по контуру $a'g$ такого сопла сравнивались с соответствующими величинами R и X для оптимальных сопел. При расчете неравномерного закрученного течения в заданном контуре использовался модифицированный вариант метода характеристик [9].

В табл. 1 приведены результаты сравнения по эффективности сопел, построенных с учетом закрутки, с соплами, спрофилированными для незакрученного течения, а также основные геометрические характеристики тех и других сопел. Строки таблицы соответствуют разным оптимальным соплам (контуры всех сопел левее точки a совпадают с контуром сопла, для которого выполнялись расчеты в [8]), номер в первом столбце совпадает с номером кривой распределения циркуляции на фиг. 2. Внешнее противодавление p^+ задавалось равным 0.01 для сопел длины $X=5$, а для сопел с $X=10$ p^+ было равно нулю; μ — коэффициент расхода сопла. Максимально допустимая ордината Y для сопел с ненулевым противодавлением p^+ принималась равной максимальной из ординат y_b , т. е. $Y=2.351$.

Т а б л и ц а 1

	X	γ_b	μ	χ	χ°	R	R°	R°/μ
1	5	2.348	0.98	0.19715	0.19715	1.05256	1.05256	1.075
2	5	2.350	0.83	0.18412	0.18409	0.89539	0.89539	1.079
3	5	2.351	0.92	0.19398	0.98385	0.98231	0.98227	1.068
4	5	2.337	0.86	0.18571	0.18563	0.91755	0.91747	1.066
5	5	2.266	0.65	0.15261	0.15229	0.70728	0.70692	1.088
1	10	4.114	0.98	0.25018	0.25018	1.10560	1.10560	1.128
2	10	4.182	0.83	0.22823	0.22818	0.93953	0.93948	1.132
3	10	4.132	0.92	0.24350	0.24344	1.03192	1.03186	1.122
4	10	4.138	0.86	0.23186	0.23178	0.96370	0.96362	1.120

Из таблицы видно, что поток без закрутки дает величину тяги, заметно отличающуюся от тяги, которая реализуется в том же сопле при закрученном потоке (ср., например, $R=R^\circ$ в первой строке, отвечающей течению без закрутки, со значениями R° во второй — пятой строках). Несмотря на это значения тяги, которую реализует один и тот же закрученный поток в соплах, спрофилированных с учетом и без учета закрутки (т. е. значения R и R° , соответствующие одной и той же строке таблицы), оказываются очень близкими, так что их отличие в исследованных случаях не превышает 0.05%. Заметим, кстати, что в полном соответствии с выводами работы [10] наличие закрутки слабо изменяет величину удельного импульса фиксированного сопла R°/μ . По форме контуры, спрофилированные с учетом и без учета закрутки, очень близки, несмотря на значительные интенсивности закрутки (например, в варианте 5 с наибольшей исследованной интенсивностью закрутки окружная скорость вблизи стенки на входе в сверхзвуковую часть сопла того же порядка, что и меридиональная компонента скорости) и сильное влияние закрутки на форму звуковой линии.

На фиг. 3 приведены контуры сопел, спрофилированных с учетом и без учета закрутки и отвечающих двум максимально допустимым длинам X и двум значениям противодавления p^+ (см. табл. 1). Сверхзвуковые части сопел, рассчитанных на нулевую закрутку, изображены сплошными линиями, а штриховыми и штрихпунктирными линиями показаны оптимальные контуры сопел, наиболее отличающиеся от первых. В случае $X=5$ максимальное отличие оптимальных сопел от сопел, построенных без учета закрутки, имело место для распределения циркуляции по сечению, отвечающему кривой 5 на фиг. 2. При $X=10$ максимальное отличие соответствовало кривой 2.

Из приведенных результатов следует, что при интенсивностях закрутки, для которых окружная компонента скорости меньше меридиональной,

профилирование сверхзвуковой части сопла можно проводить и без учета закрутки. Потери тяги за счет приближенного профилирования при этом оказываются в пределах долей процента.

Цель рассмотрения второй и третьей групп неравномерных течений из (2.1) состояла в исследовании влияния неравномерности распределения энтропии и полной энтальпии на форму и эффективность оптимальных сопел, т. е. в выяснении того, к каким потерям тяги и полного импульса может приводить приближенный способ профилирования, основанный на замене исходного неравномерного течения неким «эквивалентным» равномерным потоком, полученным из исходного путем осреднения.

Т а б л и ц а 2

x	y_e	y_e°	χ	χ°	χ°
5	2.44	2.45	0.11199	0.11186	0.11114
10	3.91	3.95	0.14480	0.14472	0.14520
5	2.54	2.55	0.13800	0.13786	0.13659
10	4.05	4.03	0.17463	0.17456	0.17373

Исследовались результаты сравнения по эффективности и основные геометрические характеристики сопел, построенных с учетом неравномерности полной энтальпии или энтропии газа на входе в сверхзвуковую часть, с соплами, оптимальными для «эквивалентного» однородного течения. Параметры однородного течения, «эквивалентного» соответствующему неоднородному, выбирались из условий равенства расходов, потоков полной энтальпии и потоков импульса обоих течений [11] (циркуляция Γ в этих течениях равнялась нулю).

Неоднородное течение на входе в сверхзвуковую часть сопла предполагалось параллельным оси x с постоянным по сечению давлением, а полная энтальпия и энтропия были распределены по законам

$$H(y^2) = H(1/2) (1 + \alpha \cos \pi y^2), \quad S(y^2) = S_0 = \text{const}$$

$$H(y^2) = H_0 = \text{const}, \quad S(y^2) = S(1/2) (1 + \beta \cos \pi y^2)$$

При этом вместо энтропии S бралась ее функция p/ρ^* , которая далее обозначается через S , а в качестве l — радиус входного сечения (в силу этого $y_a = 1$). Рассматривался случай нулевого противодавления ($p^+ = 0$).

Значение числа Маха потока M на оси задавалось равным 1.01, а отрицательное значение коэффициента α (для течения с постоянной энтропией) или положительное значение β (для течения с постоянной полной энтальпией) обеспечивали возрастание M по направлению от оси к стенке, так что во всем сечении входа реализовывалось сверхзвуковое течение. Расчеты выполнялись для $\alpha = -0.2$ и $\beta = 0.2$, что соответствовало неравномерностям по энтропии и полной энтальпии примерно $\pm 20\%$. Потоки импульса в сечении ao сопла были равны 0.630 и 0.667 соответственно для течения с переменной энтальпией и течения с переменной энтропией.

Некоторые результаты расчетов приведены в табл. 2, первые две строки которой отвечают случаю неравномерной полной энтальпии, а две последние — неравномерной энтропии. Через y_e и χ в таблице обозначены величины, получающиеся при оптимальном профилировании с учетом не-

равномерного распределения параметров в начальном сечении. Через y_b° обозначены ординаты концевых точек сопл, спрофилированных оптимальным образом для равномерных эквивалентных потоков на входе. Значения χ этих сопл при неравномерном потоке на входе обозначены через χ° , а при равномерном — χ_e° . Видно, что значения χ и χ° во всех случаях близки одно к другому. В соответствии с приведенными выше значениями потоков импульса в начальном сечении максимальные потери тяги, обусловленные заменой неравномерного потока равномерным при построении контура сопла, в рассмотренных примерах не превышали 0.02%. Отличие ординат приближенно и точно спрофилированных контуров в данном случае того же порядка, что и на фиг. 3.

Отметим, что при указанном способе выбора эквивалентного однородного потока значения тяг R_e° и R_e° , которые реализуются для однородного и неоднородного потоков одним и тем же соплом, оказываются близкими. Это находится в согласии с выводами работы [11], в которой исследовались вопросы влияния неравномерностей полной энтальпии и энтропии на характеристики фиксированного сопла.

В данной работе был рассмотрен и другой способ выбора эквивалентного однородного потока, при котором условие равенства потоков импульса исходного неравномерного и эквивалентного равномерного течений в начальном сечении заменялось условием равенства потоков энтропии обоих течений. Интересно отметить, что для тех же условий ($X=5$ и 10 , $p^+=0$) и в этом случае значения тяг, которые реализуются для однородного и неоднородного потоков, оказываются близкими, тогда как входные импульсы и интегралы сил давления по контуру сверхзвуковой части обоих потоков заметно отличаются. Потери тяги за счет приближенного профилирования при таком «осреднении» неравномерного потока в исследованных случаях не превышали 0.06%.

Подчеркнем, что при определении параметров течения на входе в сверхзвуковую часть сопла следует пользоваться программами расчета неоднородных и (при наличии закрутки) закрученных трансзвуковых течений. В то же время профилирование сверхзвуковой части сопла можно проводить для осредненного указанными выше способами однородного незакрученного потока, так как дополнительные потери тяги, связанные с неоптимальным профилированием сверхзвуковой части сопла, оказываются при этом незначительными (во всяком случае, в исследованном диапазоне закруток и неравномерностей). Сами значения импульсов (или тяг) при закрученном течении могут весьма значительно отличаться от аналогичных величин для незакрученного потока. Их определение при известных параметрах течения в «начальном» сечении может быть выполнено при помощи разработанных в процессе проведения данной работы алгоритмов и программ.

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, как показано в [12], наличие в распределении по сечению энтропии и полной энтальпии зон их резкого изменения приводит к появлению внутренних точек излома в оптимальной конфигурации, и решение задачи контрольного контура в таком случае становится невозможным. Это накладывает ограничения на класс возможных распределений указанных функций при решении вариационной задачи методом контрольного контура. Во-вторых, во всех известных работах, посвященных оптимальному профилированию, расчеты оптимальных контуров сопл выполнялись для плоской переходной поверхности. Проведенное исследование позволяет надеяться, что замена искривленной звуковой поверхности плоской не приводит к заметному искажению формы оптимального контура и к ощутимому ухудшению его характеристик.

Автор благодарит А. Н. Крайко за руководство работой, Н. Н. Славянова за любезно предоставленные материалы расчета трансзвуковой части сопла для закрученных течений и помощь в работе, а также Р. К. Тагирова и А. А. Осипова за полезные обсуждения.

Поступила 19 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л., Крайко А. Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях. В кн. «Теория оптимальных аэродинамических форм». М., «Мир», 1969.
2. Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. Увеличение тяги сопла вращением потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
3. Guderley K. G., Tabak D., Breiter M. C., Bhutani O. P. Continuous and discontinuous solutions for optimum thrust nozzles of given length. J. Optimization Theory and Applications, 1973, vol. 12, No. 6.
4. Рао Г. В. Р. Построение оптимальных ракетных сопел методом сведения к вариационной задаче одного переменного. В кн.: «Теория оптимальных аэродинамических форм». М., «Мир», 1969.
5. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
6. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
7. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
8. Славянов Н. Н. Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
9. Осипов А. А. Решение вариационной задачи о построении контура двухрежимного сопла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
10. Черный Г. Г. Закрученные течения сжимаемого газа в каналах. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
11. Тагиров Р. К., Шизман Ю. М. Расчет сверхзвукового течения в плоских и осесимметричных соплах заданной геометрии с произвольными параметрами газа на входе. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, вып. 1.
12. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. К построению контура минимального волнового сопротивления в неоднородном сверхзвуковом потоке. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.