МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1975

УДК 532.72

ДИФФУЗИЯ К ОБТЕКАЕМОЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, Ю. Н. СЫСКОВ

(Москва)

Определяется поле концентраций и диффузионный поток на обтекаемую частицу или каплю произвольной формы, на поверхности которой протекает химическая реакция первого порядка. Решение получено методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Пекле; число Рейнольдса предполагается малым. В частном случае бесконечно большой скорости химической реакции из этого решения вытекает результат, полученный в работе [1]. С другой стороны, для случая частицы сферической формы результат согласуется с полученным в работе [2].

1. Рассматривается установившийся процесс диффузии в потоке вязкой несжимаемой жидкости, обтекающей твердую частицу или жидкую каплю произвольной формы при наличии поверхностной химической реакции первого порядка. Задача сводится к решению уравнения конвективной диффузии с граничными условиями на бесконечности и на поверхности $r=r_s(\theta, \varphi)$ частицы. В безразмерных переменных эту краевую задачу можно записать в виде

$$\Delta\xi=\mathrm{P}\mathbf{v}\nabla\xi, \quad \xi=\frac{c_0-c}{c_0}, \quad \mathrm{P}=\frac{Ua}{D} \tag{1.1}$$

$$r\to\infty, \qquad \xi\to 0$$

$$r=r_s, \qquad \partial\xi/\partial n=k(\xi-1), \qquad k=ak_*D^{-1}$$

Здесь c — концентрация диффундирующего вещества, D — коэффициент диффузии, $\mathbf{v}$ — безразмерная скорость жидкости (отнесенная к скорости U на бесконечности), P — число Пекле, a — характерный радиус частицы, k_* — константа скорости химической реакции. Частный случай $k_*\to\infty$ был рассмотрен в работе [1].

Будем считать число Рейнольдса $R=Ua/\nu$ малым. Тогда поле скоростей вдали от частицы произвольной формы имеет вид [3]

$$\mathbf{v}=\mathbf{i}-\frac{3}{4r}\left[\mathbf{F}+\frac{1}{r^2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}\right]+O(r^{-2}), \qquad \mathbf{F}=\frac{\mathbf{F}^\circ}{6\pi\mu aU} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{i}$ — орт скорости потока $\mathbf{U}$ на бесконечности, $\mathbf{F}$ — безразмерный вектор, равный отношению силы сопротивления $\mathbf{F}^\circ$ данной частицы к величине стоксовой силы сопротивления твердой сферы радиуса a.

Будем использовать также условие обращения в нуль нормальной составляющей скорости на поверхности частицы ($\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности частицы)

$$r=r_s, \qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})=0 \tag{1.3}$$

Подчеркнем, что условие для касательной составляющей скорости на поверхности частицы учитывается лишь интегральным образом в выражении для $\mathbf{F}$, и соотношение (1.2) для скорости справедливо как для твердых частиц, так и для капель.

Для определения полного потока вещества на поверхность частицы введем обычным образом число Шервуда Sh, причем в качестве характерного линейного масштаба здесь удобнее взять отношение площади поверхности частицы к $2\pi a$. Заметим, что в частном случае частицы сферической формы это приводит к определению Sh через диаметр частицы. Тогда число Шервуда определяется по формуле

$$\mathrm{Sh}=-\frac{1}{2\pi}\int_S \nabla\xi\, d\mathbf{S} \tag{1.4}$$

Здесь S — поверхность частицы, вектор $d\mathbf{S}$ направлен по внешней нормали.

Ниже будет показано, что сведений о поле скоростей (1.2), (1.3) достаточно, чтобы для задачи (1.1)—(1.3) выразить с определенной точностью число Шервуда Sh через число Пекле и число Шервуда Sh_0, соответствующее массообмену реагирующей частицы с неподвижной средой.

Приближенное асимптотическое решение задачи (1.1)—(1.3) будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Пекле во внутренней ($r_s\leqslant r<O(\mathrm{P}^{-1})$) и внешней ($O(\mathrm{P}^{-1})<r<\infty$) зонах течения.

Внутреннее и внешнее разложения соответственно запишем в виде

$$\xi_*=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\mathrm{P})\,\xi_n(r) \tag{1.5}$$

$$\xi^*=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{(n)}(\mathrm{P})\,\xi^{(n)}(\rho) \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{\alpha_{n+1}(\mathrm{P})}{\alpha_n(\mathrm{P})}\to 0,\ \frac{\alpha^{(n+1)}(\mathrm{P})}{\alpha^{(n)}(\mathrm{P})}\to 0,\ \mathrm{P}\to 0\right)$$

Члены внутреннего разложения последовательно определяются путем решения уравнения (1.1) с граничным условием на поверхности частицы. Для определения членов внешнего разложения вводятся сжатая радиальная координата $\rho=r\mathrm{P}$ и скорость $\mathbf{V}(\rho)=\mathbf{v}(r)$. В новых переменных уравнение (1.1) и граничное условие на бесконечности принимают вид

$$\Delta^*\xi^*=\mathbf{V}\nabla^*\xi^*;\quad \rho\to\infty,\quad \xi^*\to 0 \tag{1.7}$$

Здесь Δ^* и ∇^* — операторы Лапласа и Гамильтона с учетом радиального сжатия.

Возникающие неизвестные постоянные определяются сращиванием разложений (1.5) и (1.6).

2. Найдем нулевое приближение для внутреннего разложения функции ξ. Из (1.1) и (1.5) при $\mathrm{P}=0$ для определения ξ_0 получаем следующее уравнение и граничное условие:

$$\Delta\xi_0=0;\quad r=r_s,\quad \partial\xi_0/\partial n=k(\xi_0-1) \tag{2.1}$$

Кроме того, функция ξ_0 должна удовлетворять условию сращивания с нулевым членом внешнего разложения (в качестве последнего, очевидно, служит тривиальное решение $\xi^{(0)}=0$ задачи (1.7)), т. е. обращаться в нуль на бесконечности.

Выбирая надлежащим образом точку отсчета радиус-вектора, выражение для ξ_0, как для гармонической функции, стремящейся к нулю при

$r\to\infty$, можно записать в виде (C_0 — постоянная, которая будет определена позднее)

$$(2.2)\qquad \xi_0=\frac{C_0}{r}+O(r^{-3})$$

Присутствия членов $O(r^{-2})$ в выражении (2.2) можно избежать следующим образом. Затухающему на бесконечности решению задачи (2.1) соответствует некоторое распределение концентрации на поверхности частицы, т. е. $\xi=\xi(S)$ при $r=r_s$. Тогда по аналогии с задачами электростатики или гравитации внутри частицы можно ввести функцию источников таким образом, чтобы получить это распределение $\xi=\xi(S)$ на поверхости частицы. Если выбрать начало координат нужным образом и выразить обычным способом функцию ξ_0 через функцию источников, то в выражении для ξ_0 исчезнут члены порядка r^{-2}. Подчеркнем, что в фактическом определении указанной точки отсчета радиус-вектора здесь нет необходимости, важно лишь, что такая точка существует. Заметим, что эта точка может оказаться и вне частицы.

Из вида выражения для ξ_0, записанного во внешних переменных следует, что $\alpha^{(1)}(\mathrm{P})=\mathrm{P}$, поэтому первое приближение для внешнего разложения будем искать в виде

$$(2.3)\qquad \xi^{*(1)}=\mathrm{P}\xi^{(1)}$$

Подставляя (2.4) в (1.7) и удерживая члены порядка Р, для $\xi^{(1)}$ имеем следующую задачу:

$$(2.4)\qquad \Delta^*\xi^{(1)}=\mathbf{i}\nabla^*\xi^{(1)};\qquad \rho\to\infty,\qquad \xi^{(1)}\to 0$$

Решение задачи (2.4), которое сращивается с (2.2), имеет вид

$$(2.5)\qquad \xi^{(1)}=\frac{C_0}{\rho}\exp\left[-\frac{1}{2}\rho(1-\mu)\right],\qquad \mu=\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{i})}{r}$$

Из (2.5), переходя к внутренней переменной, получим, что $\alpha_1(\mathrm{P})=\mathrm{P}$, поэтому первое приближение для внутреннего разложения будем искать в виде

$$(2.6)\qquad \xi_{*1}=\xi_0+\mathrm{P}\xi_1$$

Из (1.1) и (1.5), удерживая члены порядка Р, получаем уравнение и граничное условие для определения первого члена внутреннего разложения

$$(2.7)\qquad \Delta\xi_1=\mathbf{v}\nabla\xi_0;\qquad r=r_s,\qquad \partial\xi_1/\partial n=k\xi_1$$

Для завершения формулировки краевой задачи для ξ_1 необходимо установить поведение функции ξ_1 на бесконечности. Для этого используем условие сращивания ξ_{*1} и $\xi^{*(1)}$. Учитывая (2.2), (2.5), (2.6), получим

$$(2.8)\qquad r\to\infty,\qquad \xi_1\to-\frac{C_0}{2}(1-\mu)$$

3. Обратимся к определению числа Шервуда в первом приближении. Попутно найдем постоянную C_0, фигурирующую в выражениях (2.2), (2.5) для нулевого члена внутреннего разложения и первого члена внешнего разложения функции ξ, а также в формулировке задачи (2.7), (2.8) для первого члена внутреннего разложения.

Подставляя выражение (2.6) для ξ_{*1} в формулу (1.4), для числа Шервуда получаем разложение по числу Пекле

$$\text{(3.1)}\qquad \mathrm{Sh}=\mathrm{Sh}_0+\mathrm{P}\,\mathrm{Sh}_1+o(\mathrm{P})$$

$$\mathrm{Sh}_0=-\frac{1}{2\pi}\int_S \nabla\xi_0\,d\mathbf{S},\qquad \mathrm{Sh}_1=-\frac{1}{2\pi}\int_S \nabla\xi_1\,d\mathbf{S}$$

Здесь число Шервуда Sh_0 соответствует массообмену реагирующей частицы с неподвижной средой.

Следуя работе [1], можно показать, что постоянная C_0 связана с числом Sh_0 соотношением

$$\text{(3.2)}\qquad C_0={}^1/_2\mathrm{Sh}_0$$

Действительно, применим теорему Остроградского — Гаусса к интегралу от функции $\nabla(\nabla\xi_0)$, взятому по контрольному объему жидкости, ограниченному поверхностью частицы S и поверхностью Σ сферы, содержащей частицу; радиус этой сферы может быть сделан сколь угодно большим. Используя соотношение $\nabla(\nabla\xi_0)=0$, получим, что при определении Sh_0, согласно (3.1) интегрирование можно проводить по поверхности Σ, причем вектор $d\mathbf{\Sigma}$ направлен по внешней нормали к этой поверхности. Так как $d\mathbf{\Sigma}=O(r^2)$, то для вычисления Sh_0 теперь можно применить формулу (2.2), что и приводит к требуемому соотношению (3.2).

Покажем теперь, обобщая подход, изложенный в работе [1], что число Шервуда Sh_1 выражается через Sh_0. Для этого воспользуемся уравнением (2.7), которое после умножения на ξ_0 с учетом тождества

$$\xi_0\Delta\xi_1=\nabla(\xi_0\nabla\xi_1)-\nabla(\xi_1\nabla\xi_0)+\xi_1\Delta\xi_0$$

а также с учетом гармоничности функции ξ_0 и условия несжимаемости жидкости, запишем в виде

$$\text{(3.3)}\qquad \nabla\left(\xi_0\nabla\xi_1-\xi_1\nabla\xi_0-\frac{1}{2}\xi_0^2\mathbf{v}\right)=0$$

К интегралу от левой части (3.3), взятому по указанному выше контрольному объему жидкости, опять применим теорему Остроградского — Гаусса. Получим

$$\text{(3.4)}\qquad \sum_{j=1}^{6} I_j=0$$

$$I_1=-\int_S \xi_0\nabla\xi_1\,d\mathbf{S},\qquad I_2=\int_S \xi_1\nabla\xi_0\,d\mathbf{S},\qquad I_3=\frac{1}{2}\int_S \xi_0^2\mathbf{v}\,d\mathbf{S}$$

$$I_4=\int_\Sigma \xi_0\nabla\xi_1\,d\mathbf{\Sigma},\qquad I_5=-\int_\Sigma \xi_1\nabla\xi_0\,d\mathbf{\Sigma},\qquad I_6=-\frac{1}{2}\int_\Sigma \xi_0^2\mathbf{v}\,d\mathbf{\Sigma}$$

Рассмотрим сначала интегралы по поверхности частицы S. Сумму первых двух интегралов преобразуем, подставляя вместо первых сомножителей их значения согласно граничным условиям в (2.1) и (2.7). Тогда

$$I_1+I_2=-\frac{1}{k}\int_S\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial n}\nabla\xi_1-\frac{\partial\xi_1}{\partial n}\nabla\xi_0\right)d\mathbf{S}-\int_S\nabla\xi_1\,d\mathbf{S}$$

Здесь первый интеграл в правой части, очевидно, равен нулю. Второй интеграл выражается через Sh_1 согласно определению в (3.1). Замечая, наконец, что интеграл I_3 обращается в нуль в силу условия непротекания жидкости через поверхность частицы (1.3), заключаем, что

$$\text{(3.5)}\qquad I_1+I_2+I_3=2\pi\,\mathrm{Sh}_1$$

Для вычисления интегралов по поверхности Σ используем асимптотики при $r\to\infty$ функций ξ_0 и ξ_1 согласно формулам (2.2) и (2.8), а также асимптотику скорости $\mathbf{v}$ согласно (1.2). Поскольку $d\Sigma=O(r^2)$, выписанных членов этих асимптотик оказывается достаточным, чтобы убедиться в том, что

$$I_4=I_6=0, \quad I_5=-2\pi C_0^2 \tag{3.6}$$

Таким образом, на основании (3.4)—(3.6) получаем связь между Sh_1 и C_0. Вспоминая теперь формулу (3.2), разложение (3.1) запишем в виде

$$\mathrm{Sh}=\mathrm{Sh}_0+\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0^2\,\mathrm{P}+o(\mathrm{P}) \tag{3.7}$$

Чтобы получить следующие члены разложения числа Шервуда по числу Пекле, необходимо рассмотреть приближения более высокого порядка для функций ξ_* и ξ^*, определив предварительно ξ_1 как решение задачи (2.7), (2.8).

4. Для определения ξ_1 подставим в правую часть уравнения (2.7) выражения (1.2) и (2.2) для поля скоростей и функции ξ_0. Учитывая вид граничных условий (2.8), где C_0 определяется формулой (3.2), ищем решение задачи (2.7), (2.8) в виде суммы

$$\xi_1=\xi_1'+{}^1/_4\,\mathrm{Sh}_0(\xi_1''-1) \tag{4.1}$$

Здесь функции ξ_1' и ξ_1'' представляют собой решения следующих задач:

$$\Delta\xi_1'=-\frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0\frac{\mu}{r^2}+\frac{3}{4}\mathrm{Sh}_0\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})}{r^4}+O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{4.2}$$

$$r=r_s,\quad \frac{\partial\xi_1'}{\partial n}=k\xi_1';\qquad r\to\infty,\quad \xi_1'\to\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0\,\mu$$

$$\Delta\xi_1''=0 \tag{4.3}$$

$$r=r_s,\quad \frac{\partial\xi_1''}{\partial n}=k(\xi_1''-1);\qquad r\to\infty\quad \xi_1''\to0$$

Замечая, что частный интеграл уравнения (4.2) удовлетворяет условию на бесконечности, запишем с точностью до членов порядка r^{-2} решение задачи (4.2) в виде

$$\xi_1'=\frac{C_1}{r}+\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0\,\mu-\frac{3}{8}\mathrm{Sh}_0\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{4.4}$$

Здесь первое слагаемое в правой части соответствует главному члену асимптотики общего решения однородного уравнения.

Чтобы найти постоянную C_1, обратимся сначала к задаче (4.3), совпадающей с задачей для определения функции ξ_0. Используя поэтому (2.2) и (3.2), имеем

$$\xi_1''=\frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0\frac{1}{r}+O\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{4.5}$$

Таким образом, согласно (4.1), (4.4), (4.5) имеем выражение для ξ_1, содержащее единственную неизвестную постоянную C_1. Вычислим теперь величину $\nabla\xi_1$ и проинтегрируем ее по поверхности Σ сферы сколь угодно большого радиуса. Затем, при помощи уравнения (2.7) убеждаясь, что, как и в случае Sh_0, в определении (3.1) для Sh_1 интегрирование по S равносильно интегрированию по Σ, аналогично тому, как это сделано в [1], получим $C_1=0$.

Из выражения для ξ_1, переходя к внешней переменной, находим, что $\varkappa^{(2)}(\mathrm{P})=\mathrm{P}^2$. Введем внешнюю переменную в выражение для поля скоростей (1.2) и подставим результат вместе с разложением (1.6) в задачу (1.7). Учитывая выражение для функции $\xi^{(1)}$ согласно (2.5) и (3.2), получим для определения второго члена внешнего разложения следующую задачу:

$$(4.6)\qquad \left(\Delta^* - \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\xi^{(2)}=$$
$$=-\frac{3}{8\rho}\mathrm{Sh}_0\left[\mathbf{F}+(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\rho})\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\right]\nabla^*\left\{\frac{1}{\rho}\exp\left[-\frac{1}{2}\rho(1-\mu)\right]\right\}$$
$$\rho\to\infty,\quad \xi^{(2)}\to 0$$

Из условия сращивания разложения $\xi^{*(2)}=\mathrm{P}\xi^{(1)}+\mathrm{P}^2\xi^{(2)}$ при $\rho\to 0$ с разложением $\xi_{*1}=\xi_0+\mathrm{P}\xi_1$ при $r\to\infty$ следует дополнительное условие для функции $\xi^{(2)}$

$$(4.7)\qquad \rho\to 0,\quad \xi^{(2)}\to\frac{1}{8}\mathrm{Sh}_0\left[\frac{1}{\rho}\mathrm{Sh}_0-\frac{3}{\rho^2}(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\rho})\right]$$

Задача (4.6), (4.7) полностью совпадает с соответствующей задачей для случая бесконечно большой скорости химической реакции на поверхности частицы, рассмотренного в работе [1]. Ее решение сводится к решению аналогичной задачи для сферической частицы (см. [4]). Результат имеет вид

$$(4.8)\qquad \xi^{(2)}=\frac{1}{2}\mathrm{Sh}_0\left[\frac{1}{4\rho}\mathrm{Sh}_0-\frac{3}{4\rho^2}(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\rho})-\frac{1}{2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})\ln\rho+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{23}{48}-\frac{\ln\gamma}{2}\right)(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})-\frac{1}{8}\mathrm{Sh}_0+\frac{1}{8}\mathrm{Sh}_0\,\mu-\frac{5}{16\rho}(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\rho})\,\mu+O(\rho)\right]$$
$$\rho\to 0$$

Наконец, найдем второй член внутреннего разложения. Из (4.8) видно, что наличие логарифмического члена меняет степенной характер функций $\alpha(\mathrm{P})$ и приводит к тому, что $\alpha_2(\mathrm{P})=\mathrm{P}^2\ln\mathrm{P}$. Поэтому для определения ξ_2 имеем следующую задачу:

$$(4.9)\qquad \Delta\xi_2=0$$
$$r=r_s,\quad \partial\xi_2/\partial n=k\xi_2;\quad r\to\infty,\quad \xi_2\to -{}^1/_4\,\mathrm{Sh}_0\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})$$

Здесь последнее условие получено из условия сращивания внутреннего разложения ξ_{*2} с внешним разложением $\xi^{*(2)}$.

Замена $\xi_2={}^1/_4\,\mathrm{Sh}_0(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})(\xi_2'-1)$ приводит задачу (4.9) к задаче для функции ξ_0. Поэтому, используя (2.2), (3.2), имеем

$$(4.10)\qquad \xi_2=\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})(\xi_0-1)=\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})\left(-1+\mathrm{Sh}_0\frac{1}{2r}\right)+O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

5. Используя результаты, определяемые формулами (2.2), (3.2), (4.1), (4.4), (4.5), (4.10), и учитывая значения $\alpha_1(\mathrm{P})$, $\alpha_2(\mathrm{P})$, получим для внутреннего разложения поля концентраций

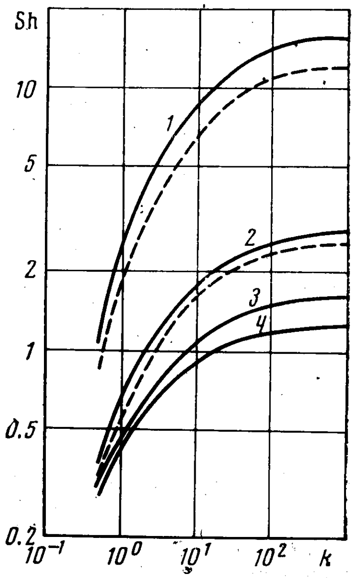
$$(5.1)\qquad \xi_{*2}=\mathrm{Sh}_0\frac{1}{2r}+O\left(\frac{1}{r^3}\right)+\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0\left[-1+\mu+\mathrm{Sh}_0\frac{1}{2r}-\frac{3}{2r^2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]\mathrm{P}+$$
$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})\left[-1+\mathrm{Sh}_0\frac{1}{2r}+O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]\mathrm{P}^2\ln P$$

Разложение для числа Шервуда получим на основании (3.7), (4.10) в виде

$$\mathrm{Sh}=\mathrm{Sh}_0+\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0^2\mathrm{P}+\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0^2(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})\mathrm{P}^2\ln P+O(\mathrm{P}^2) \tag{5.2}$$

Подчеркнем, что здесь Sh_0 — число Шервуда, соответствующее массообмену покоящейся частицы с неподвижной средой в случае, когда на поверхности частицы протекает химическая реакция первого порядка. Таким образом, формулы (5.1), (5.2) служат обобщением на этот случай результатов работы [1].

Для частицы заданной формы задача определения коэффициента конвективного массообмена, согласно (5.2), сводится к определению числа Sh_0 и силы сопротивления частицы. Поскольку последняя зависит от ориентации частицы, то, как видно из (5.2), число Шервуда также зависит от ориентации частицы в потоке.



В частности, для реагирующей сферической частицы $\mathrm{Sh}_0=2q$, где $q=k/(k+1)$, а безразмерная сила сопротивления $\mathbf{F}=\mathbf{i}$. Формулы (5.1), (5.2) совпадают при этом с соответствующими результатами, полученными в работе [2].

6. Рассмотрим несколько примеров, представляющих самостоятельный интерес.

Сферическая частица, покрытая жидкой пленкой. Для безразмерной силы сопротивления имеем [5]

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{i})=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left[1+\varkappa\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\times\left(1+\frac{5}{4}\frac{\lambda}{1+{}^1/_2\lambda+\lambda^2}\right)\right]^{-1} \tag{6.1}$$

Здесь $\varkappa$ — отношение вязкостей жидкостей в потоке и в пленке, λ — отношение радиусов частицы и пленки. Подстановка (6.1) вместе со значением $\mathrm{Sh}_0=2q$ в формулу (5.2) дает искомое значение числа Шервуда.

Тонкий круглый диск, плоскость которого нормальна набегающему потоку или параллельна ему. Чтобы воспользоваться формулой (5.2), определим сначала число Шервуда для неподвижного диска, на поверхности которого протекает реакция первого порядка. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z так, чтобы диск находился в плоскости $z=0$, а начало координат совпадало с центром диска.

Уравнение для безразмерной концентрации и граничные условия имеют вид (очевидно ξ не зависит от угла θ)

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial|z|}=k(\xi-1)\ \text{при}\ z=0,\quad 0\leqslant r\leqslant 1 \tag{6.2}$$

$$\xi\to 0\ \text{при}\ |z|\to\infty\ \text{или}\ r\to\infty$$

Общее решение уравнения (6.2), затухающее на бесконечности, можно записать в виде

$$\xi=\int_0^\infty e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)f(\lambda)\,d\lambda$$

Определяя функцию $f(\lambda)$ из граничного условия на поверхности диска, получаем

$$\xi=\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)\frac{\sin\lambda}{(\lambda+k)\lambda}\,d\lambda$$

Используя определение числа Шервуда согласно (3.1), имеем отсюда следующее выражение:

$$\mathrm{Sh}_0=\frac{4k}{\pi}\int_0^1 r\,dr\int_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{\sin\lambda}{\lambda+k}\,d\lambda=\frac{4k}{\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda)\frac{\sin\lambda}{\lambda(\lambda+k)}\,d\lambda \tag{6.3}$$

Оценивая последний интеграл при больших значениях безразмерной константы скорости реакции, получим

$$\mathrm{Sh}_0=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-1/2}+O(k^{-3/2})\right) \tag{6.4}$$

В случае, когда плоскость диска нормальна направлению потока, безразмерная сила сопротивления $\mathbf{F}=(8/3\pi)\mathbf{i}$, а в случае, когда плоскость диска параллельна потоку, $\mathbf{F}=(16/9\pi)\mathbf{i}$. Согласно формуле (5.2) соответствующие значения числа Шервуда с точностью до $O(\mathrm{P}^2)$ равны

$$\mathrm{Sh}_\perp=\mathrm{Sh}_0+\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0^2\,\mathrm{P}+\frac{2}{3\pi}\mathrm{Sh}_0^2\,\mathrm{P}^2\ln P \tag{6.5}$$

$$\mathrm{Sh}_\parallel=\mathrm{Sh}_0+\frac{1}{4}\mathrm{Sh}_0^2\,\mathrm{P}+\frac{4}{9\pi}\mathrm{Sh}_0^2\,\mathrm{P}^2\ln P \tag{6.6}$$

Здесь величина Sh_0 определяется формулой (6.3) или (при больших k) разложением (6.4).

Зависимости $\mathrm{Sh}_\perp$ и $\mathrm{Sh}_\parallel$ от безразмерной скорости реакции в логарифмическом масштабе представлены на фигуре сплошными и пунктирными линиями при разных значениях числа Пекле. Кривым *1—4* соответствуют значения P=5, 2, 1, 0. 1. Видно, что массообмен частицы в потоке существенно зависит от ее ориентации и от скорости химической реакции на поверхности.

Поступила 18 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brenner H.* Forced canvection heat and mass transfer at small Péclet numbers from a particle of arbitrary shape. Chem. Engng Sci., 1963, vol. 18, No. 2.
2. *Gupalo Yu. P., Ryazantsev Yu. S.* Mass and heat transfer from a sphere in a laminar flow. Chem. Engng Sci., 1972, vol. 127, No. 1.
3. *Brenner H., Cox R. G.* The resistance to a particle of arbitrary shape in translational motion at small Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1963, vol. 17, pt 4.
4. *Acrivos A., Taylor T. D.* Heat and mass transfer from single spheres in Stokes flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 4.
5. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т.* Обтекание покрытой жидкой пленкой сферы при малых числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.