**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1975**

УДК 532.546

О ДИСПЕРСИИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

М. И. ШВИДЛЕР

(Москва)

Рассматривается перенос динамически нейтральной примеси потоком в пористой среде со случайными неоднородностями. В отличие от работ [1, 2], в которых по существу постулировалась марковость процесса блужданий частиц примеси (принятие гипотезы о марковости процессов блужданий в определенной степени противоречит представлению о движении частиц вдоль линий тока, конечности скорости, гладкости траекторий), здесь методом возмущений исследуется полная система уравнений для концентраций и скоростей фильтрации, что после осреднения приводит к нелокальному уравнению для средней концентрации. Показано, что локальное уравнение (параболическое или гиперболическое) является предельным случаем в рассмотренной схеме. Устанавливается эффект регулярного сноса насыщенности, аналогичный эффекту направленного переноса в теории неоднородной турбулентной диффузии [3]. Рассматриваются одномерные, плоские и пространственные течения. Основные соотношения содержат моменты случайного поля скоростей. Связь этих моментов с характеристиками полей случайной проницаемости и пористости установлена в [1, 2].

1. Одномерный перенос нейтральной примеси. Задача об одномерном переносе примеси заданным случайным полем скоростей фильтрации имеет элементарное решение, которое позволяет определить любые статистические моменты решения. Однако установить, какому уравнению удовлетворяет средняя концентрация, таким образом не удается.

Будем считать, что для локальных концентраций примеси c и скорости фильтрации несжимаемой жидкости V выполняется закон сохранения

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+V\frac{\partial c}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

где m — пористость, x — линейная пространственная координата, t — время.

Подставив в (1.1) их представления ($\langle\ \rangle$ — символ усреднения по ансамблю)

$$c=u+c',\quad u=\langle c\rangle,\quad V=W+V',\quad W=\langle V\rangle=\text{const} \tag{1.2}$$

и усреднив, получим уравнения для u и c'

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}=-\left\langle V'\frac{\partial c'}{\partial x}\right\rangle \tag{1.3}$$

$$m\frac{\partial c'}{\partial t}+W\frac{\partial c'}{\partial x}=-V'\frac{\partial u}{\partial x}+\left\langle V'\frac{\partial c'}{\partial x}\right\rangle-V'\frac{\partial c'}{\partial x} \tag{1.4}$$

Если для c задать неслучайное начальное условие и отнести его к u, то для c' начальное условие будет однородным. Вводя функцию Грина G как удовлетворяющее однородному начальному условию решение уравнения

$$m\frac{\partial G}{\partial t}+W\frac{\partial G}{\partial x}=m\delta(x-x_1)\delta(t-t_1) \tag{1.5}$$

$$G(x, x_1, t, t_1)=\delta[x-x_1-Wm^{-1}(t-t_1)]h(t-t_1)$$

где h — символ единичной функции Хевисайда, а δ — функции Дирака, получим для c' интегродифференциальное уравнение

$$
(1.6)\qquad \begin{aligned} c'(x,t) = &-\frac{1}{m}\int_0^t \Bigg[V'(t_1)\frac{\partial u(z,t_1)}{\partial z} - \\ &- \left\langle V'(t_1)\frac{\partial c'(z,t_1)}{\partial z}\right\rangle + V'(t_1)\frac{\partial c'(z,t_1)}{\partial z}\Bigg] dt_1 \\ &z = x - Wm^{-1}(t-t_1) \end{aligned}
$$

решать которое можно методом итераций [4], полагая для нахождения c_{n+1} в (1.6) под знаком интеграла $c'=c_n'$. Приняв начальное приближение $c_0'=0$, можно последовательно определить c_n' и соответствующие выражения для правой части уравнения (1.3). Нетрудно видеть, что при этом появляется ряд интегродифференциальных операторов, действующих на u, с коэффициентами, являющимися разноточечными моментами случайной функции V'.

Если при интегрировании ограничиться первым шагом, уравнение (1.3) примет вид

$$
(1.7)\qquad m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{m}\int_0^t B(t,t_1)\frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial z\,\partial x}dt_1, \qquad B = \langle V'(t)V'(t_1)\rangle
$$

где B — автокорреляция скорости фильтрации.

Таким образом, для $u(x, t)$ — средней концентрации — получено нелокальное уравнение, связывающее ее производные по координатам с соответствующими величинами в других точках пространства — времени.

Если автокорреляция такова, что при B=const

$$
(1.8)\qquad B(t,t_1) = B\begin{cases} 1, & t-t_1 \leqslant \varepsilon \\ 0, & t-t_1 > \varepsilon \end{cases}
$$

то при $\varepsilon \ll t$ уравнение (1.7) локализуется, является уравнением параболического типа и имеет вид

$$
(1.9)\qquad m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B\varepsilon}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
$$

Напротив, при $\varepsilon \gg t$ из (1.8) получим линейное нелокальное уравнение

$$
(1.10)\qquad m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B}{m}\int_0^t \frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial z\,\partial x}dt_1
$$

Для него может быть поставлена задача Коши, решение которой реализуется, например, с помощью двойного преобразования Фурье.

Разложив $u(z, t_1)$ в окрестности точки (x, t_1) в ряд Тейлора, интеграл в (1.10) можно выразить через временные моменты функции $u(x, t)$. Тогда

$$
(1.11)\qquad m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n W^n}{n!\,m^n}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_0^t u(x,t_1)(t-t_1)^n dt_1
$$

Тем не менее нелокальность в случае $\varepsilon \gg t$ устранима. Для этого продифференцируем уравнение (1.10) по t и по x и исключим из полученных уравнений интеграл. После преобразований получим уравнение

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2W\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+(W^2-B)m^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.12}$$

Нетрудно убедиться, что при $B>0$ уравнение (1.12) гиперболического типа. При постановке задачи Коши для него следует задать помимо $u(x, 0)$ также $\partial u(x, 0)/\partial t$. Эту производную можно найти из уравнения (1.10), положив в нем $t=0$. Тогда

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=-\frac{W}{m}\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}$$

Рассмотрим задачу об эволюции начального распределения — «полочки» $u(x, 0)=1-h(x)$. Тогда $\partial u(x, 0)/\partial t=-Wm^{-1}\delta(x)$ и решение уравнения (1.12) имеет вид

$$u(x,t)=1-\frac{1}{2}h\left(x-\frac{W}{m}t-\frac{\sqrt{B}}{m}t\right)-\frac{1}{2}h\left(x-\frac{W}{m}t+\frac{\sqrt{B}}{m}t\right)$$

т. е. исходная полочка распадается на две, движущиеся со скоростями на $\sqrt{B}/m$ больше и соответственно меньше, чем средняя скорость W/m. Два скачка вместо одного, порождаемого невозмущенным уравнением, конечно, относительно грубо аппроксимируют профиль концентрации для произвольной плотности распределения случайной величины u. Учет более высоких членов ряда возмущений позволяет передать специфические особенности волны $u(x, t)$. Правда, получить локальное уравнение в этом случае не удается. Если $B=0$, то уравнение (1.12) параболического типа. Оно не содержит первых производных и поэтому заменой переменных может быть приведено к обыкновенному дифференциальному уравнению, эквивалентному исходному невозмущенному. Очевидно, при $B\neq\text{const}$ приведенный способ локализации неприменим и, по-видимому, локализация невозможна.

Отметим, что случай $\varepsilon\gg t$ соответствует также и слоистому ансамблю, поле скоростей которого стационарно и случайно распределено по ансамблю.

Таким образом, в случае одномерной фильтрации средняя концентрация удовлетворяет функциональному уравнению, которое при малой и большой корреляции поля скоростей ε переходит в дифференциальное.

2. Квазиодномерный перенос нейтральной примеси. Рассмотрим перенос примеси квазиодномерным потоком в пространстве произвольного числа измерений. Будем считать, что поле средней скорости зависит от одной координаты, а флуктуации скорости зависят от всех координат. Пусть для примеси имеет место локальное уравнение сохранения

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\operatorname{div}(\mathbf{V}c)=0 \tag{2.1}$$

Как и в п. 1, для u и c' имеем

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=-\operatorname{div}(\langle\mathbf{V}'c'\rangle) \tag{2.2}$$

(2.3) $$m\frac{\partial c'}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla c'=\operatorname{div}(\mathbf{V}'u)$$

(2.4) $$c'(\mathbf{x},t)=-\frac{1}{m}\int\limits_0 \operatorname{div}_z(\mathbf{V}'u)\,dt_1,\qquad \mathbf{z}=\mathbf{x}-\frac{\mathbf{W}}{m}(t-t_1)$$

(индекс z при div указывает на то, что дифференцирование производится по z_i). Подставив (2.4) в (2.2), получим

(2.5) $$m\frac{\partial u}{\partial t}+W\nabla u=\frac{1}{m}\int\limits_0^t \operatorname{div}_x\mathbf{N}\,dt_1$$

(2.6) $$\mathbf{N}=\langle\mathbf{V}'\operatorname{div}_z(\mathbf{V}'u)\rangle$$

(2.7) $$N_j=\left\langle V_j'\left(\sum_i\frac{\partial u}{\partial z_i}V_i'+u\sum_i\frac{\partial V_i'}{\partial z_i}\right)\right\rangle=$$
$$=\sum_i\left(B^{ji}\frac{\partial u}{\partial z_i}+u\frac{\partial B^{ji}}{\partial z_i}\right)=\sum_i\frac{\partial}{\partial z_i}(B^{ji}u)$$

Здесь B^{ji} — корреляционный тензор поля скоростей в среде со случайными неоднородностями. (Зависимость компонентов тензора B^{ji} при $x=z$ от параметров случайного поля проницаемости приводится в [1])

(2.8) $$B^{ji}(\mathbf{x},\mathbf{z})=\langle V_j'(\mathbf{x})V_i'(\mathbf{z})\rangle$$

Подставляя (2.7) в (2.5), получим

(2.9) $$m\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=\frac{1}{m}\int\limits_0^t\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial x_j}(B^{ji}u)\,dt_1$$

Уравнение (2.9) можно переписать в форме

(2.10) $$m\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=\frac{1}{m}\int\limits_0^t\sum_{i,j}\left(B^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial z_i}+\frac{\partial u}{\partial z_i}\frac{\partial B^{ij}}{\partial x_j}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial B^{ij}}{\partial z_i}+u\frac{\partial^2 B^{ij}}{\partial x_j\partial z_i}\right)dt_1$$

Таким образом, для u получены функциональные уравнения, содержащие в правой части члены дисперсионного вида (они связаны со вторыми производными u), конвективного (первые производные) и типа источника.

Если поле флуктуаций скорости не содержит источников и статистически однородно, то уравнение (2.10) упрощается и содержит в правой части лишь дисперсионные члены

(2.11) $$m\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=\frac{1}{m}\int\limits_0^t\sum_{i,j}B^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial z_i}dt_1$$

Пусть, например, поле скоростей представимо в виде $\mathbf{V}'=\mathbf{v}'\varphi$, где поле $\mathbf{v}'$ не имеет источников и однородно, а функция φ — скаляр. Тогда $B^{ij}=\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{z})D^{ij}$, где D^{ij} — корреляционный тензор поля $\mathbf{v}'$, и подынтегральная форма в (2.9) имеет вид

$$\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial z_i}(B^{ji}u)=\sum_{i,j}B^{ji}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial z_i}+\frac{\partial u}{\partial z_i}\frac{\partial\ln\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\ln\varphi(\mathbf{z})}{\partial z_i}+u\left[\frac{\partial\ln\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j}\frac{\partial\ln\varphi(\mathbf{z})}{\partial z_i}+\frac{\partial^2\ln\varphi(\mathbf{z})}{\partial z_i\,\partial x_j}\right]\right\}\tag{2.12}$$

Пусть скалярная функция φ представима в виде

$$\varphi(\mathbf{x})=1+\sum\alpha_i x_i\tag{2.13}$$

а параметры α_i малы. Тогда правая часть в (2.12) может быть записана как

$$\sum_{i,j}B^{ij}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial z_i}+\alpha_j\frac{\partial u}{\partial z_i}+\alpha_i\frac{\partial u}{\partial x_j}+\alpha_i\alpha_j u\right]\tag{2.14}$$

Если предположить, что корреляция B^{ij} такова, что для $|\mathbf{x}-\mathbf{z}|\leqslant\varepsilon$ тензор $B^{ij}\sim D^{ij}$, а при $|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>\varepsilon$ корреляция несущественна, то при малых ε имеем

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=\frac{\varepsilon}{m|\mathbf{W}|}\sum_{i,j}D^{ij}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\alpha_i\frac{\partial u}{\partial x_j}+\alpha_j\frac{\partial u}{\partial x_i}+\alpha_i\alpha_j u\right)$$

Таким образом, и в локализованном варианте осредненного уравнения получены диффузионные, конвективные и истокообразные члены, т. е. имеет место эффект, аналогичный явлению направленного переноса при неоднородной турбулентной диффузии [3].

Поступила 8 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мендельсон М. М., Швидлер М. И.* О дисперсионных фильтрационных эффектах в средах со случайными неоднородностями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
2. *Буевич Ю. А., Леонов А. И., Сафрай В. М.* Структура фильтрационной псевдотурбулентности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
3. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
4. *Крейчнан Р. Х.* Проблема замыкания в теории турбулентности. В кн. «Гидродинамическая неустойчивость». М., «Мир», 1964.