

ФИЛЬТРАЦИЯ ВЛАЖНОГО ГАЗА

Г. Д. БАБЕ, Э. А. БОНДАРЕВ

(Якутск)

Выводятся уравнения фильтрации влажного газа. Рассмотрена и численно решена задача о фильтрации к скважине из кругового пласта с учетом конденсации (испарения) влаги.

Природный газ в пласте всегда содержит пары воды, количество которой в условиях термодинамического равновесия определяется формулой [1] $W_* = A(T)p^{-1} + B(T)$, где W_* — количество влаги в граммах на m^3 газовой смеси при $20^\circ C$ и $1 атм$, p — давление в $кгс/см^2$, A и B — эмпирические функции температуры, приведенные в [1].

При движении газа к скважинам происходит перераспределение давления и температуры в пласте, что может привести к возникновению обмена между движущимися с газом парами воды и неподвижной пластовой и связанной влагой. Знание динамики влагообмена существенно по двум причинам. Во-первых, выпадение влаги из газа приводит к увеличению фильтрационного сопротивления, а во-вторых, наличие свободной влаги является необходимым условием гидратообразования.

В работе предложена модель неизотермической фильтрации смеси газа с парами воды, построенная на основе представлений [2]. Модель позволяет рассчитать динамику влагообмена при отборе газа, а в случае стационарного течения газа определить условия конденсации (испарения) влаги.

1. Модель фильтрации влажного газа должна включать в себя три компонента (грунт, газ, вода) и четыре фазы, так как вода может находиться в парообразном и жидком состояниях. Условимся обозначать индексами 0, 1, 2, 3 грунт, газ, пар и воду соответственно. Будем считать, что газ и пар движутся с одинаковой фазовой скоростью v_1 , скорость грунта примем равной нулю. Для всех фаз зададимся бесконечно большим коэффициентом межфазного теплообмена, что приводит к однотемпературной модели.

Уравнения неразрывности для фильтрующихся фаз будут иметь вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \sigma) + \operatorname{div}(\rho_1 \sigma v_1) = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 \sigma) + \operatorname{div}(\rho_2 \sigma v_1) = \frac{1}{m}(J_{32} - J_{23})$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial t}[\rho_3(1-\sigma)] + \operatorname{div}[\rho_3(1-\sigma)v_3] = \frac{1}{m}(J_{23} - J_{32})$$

Здесь m — пористость, σ — газонасыщенность, $(1-\sigma)$ — водонасыщенность, ρ_1 и ρ_2 — массовые концентрации газа и пара в фильтрующейся смеси, ρ_3 — плотность воды, J_{23} — скорость конденсации, J_{32} — скорость испарения. Величина J_{23-32} имеет размерность $кг/м^3 \cdot сек$ и обозначает массу воды, изменившей фазовое состояние в единицу времени в единице объема порового пространства. Объемные концентрации фаз

$$m_0 = 1 - m, \quad m_1 = m_2 = m\sigma, \quad m_3 = m(1 - \sigma)$$

Отметим, что использование в уравнениях массовых концентраций газа и водяного пара вместо соответствующих плотностей облегчает изложение.

Уравнения сохранения импульса имеет смысл вводить для смеси газа с паром и воды. В общем случае эти уравнения имеют вид

$$(1.4) \quad m\sigma(\rho_1 + \rho_2) \frac{d^i v_1}{dt} + \text{grad}(m\sigma p_c) - m\sigma(\rho_1 + \rho_2)(F_1 + R_1) + v_3 J_{32} - v_1 J_{23} = 0$$

$$(1.5) \quad m(1-\sigma)\rho_3 \frac{d^3 v_3}{dt} + \text{grad}[m(1-\sigma)p_3] - m(1-\sigma)\rho_3(F_3 + R_3) + v_1 J_{23} - v_3 J_{32} = 0$$

Здесь p_c — давление парогазовой смеси, равное сумме парциальных давлений пара и газа; F_i — реальные массовые силы, например, сила тяжести, R_i — равнодействующая фиктивных массовых сил [2]. Оператор d^i/dt — субстанциональная производная от вектора

$$(1.6) \quad \frac{d^i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_i, \nabla)$$

где ∇ — оператор Гамильтона.

Фиктивные массовые силы сопротивления определяются выражениями [2]

$$R_i = - \frac{\mu_i m_i v_i}{k k_i(m_i) \rho_i} + \frac{P_i}{m_i \rho_i} \text{grad } m_i$$

где k — проницаемость грунтового скелета, μ_i — вязкость i -й компоненты.

Первый член выражает экспериментальный закон Дарси, второй член представляет собой силы сопротивления, возникающие за счет расширения трубок тока. Безразмерные фазовые проницаемости $k_i(m_i)$ определяются экспериментально. В данном случае обе фазовые проницаемости k_1 и k_3 зависят от одной величины σ (зависимостью фазовых проницаемостей от температуры обычно пренебрегают).

При рассмотрении фильтрационных процессов в уравнениях сохранения импульса можно пренебречь инерционными членами и реальными массовыми силами, а также членами межфазового обмена импульсом. Тогда, подставляя в уравнения (1.4) и (1.5) значения фиктивных массовых сил, получим уравнения движения в виде обобщенного закона Дарси

$$(1.8) \quad v_1 = - \frac{k k_1(\sigma)}{m \sigma \mu_1} \text{grad } p_c$$

$$(1.9) \quad v_3 = - \frac{k k_3(\sigma)}{m(1-\sigma) \mu_3} \text{grad } p_3$$

Так как модель однотемпературная, то уравнение энергий будет общим для всей среды, коэффициенты же этого уравнения будут зависеть от объемной или массовой доли каждой из фаз. Согласно [2], уравнение энергии имеет вид

$$(1.10) \quad C \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}[\Lambda \text{grad } T] - W \text{grad } T + Q$$

$$(1.11) \quad C = (1-m)c_0\rho_0 + m\sigma(\rho_1 c_{p1} + \rho_2 c_{p2}) + m(1-\sigma)\rho_3 c_3$$

$$(1.12) \quad \Lambda = (1-m)\lambda_0 + m\sigma(\lambda_1 + \lambda_2) + m(1-\sigma)\lambda_3$$

$$(1.13) \quad W = m\sigma(\rho_1 c_{p1} + \rho_2 c_{p2})v_1 + m(1-\sigma)\rho_3 c_3 v_3$$

Здесь T — абсолютная температура среды, c_i — теплоемкости фаз при постоянном давлении, λ_i — коэффициенты теплопроводности фаз, которые для газообразных фаз сильно зависят от их парциальных давлений; W — усредненный вектор конвективного переноса тепла.

Последний член в уравнении (1.10) выражает энергию, которая выделяется (расходуется) в единицу времени в единице объема среды за счет работы сил гидродинамического давления, работы фиктивных массовых сил сопротивления и притока тепла от внутренних фиктивных источников. Величину Q можно представить в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых соответствует подвижной фазе [2]

$$(1.14) \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$(1.15) \quad Q_1 = p_c m \frac{\partial \sigma}{\partial t} - h_1 \rho_1 m \sigma \left[\frac{\partial p_c}{\partial t} + v_1 \text{grad } p_c \right] + m p_c v_1 \text{grad } \sigma + m \sigma \rho_1 q_1$$

$$(1.16) \quad Q_2 = m \sigma \rho_2 q_2$$

$$(1.17) \quad Q_3 = -p_s m \frac{\partial \sigma}{\partial t} - h_3 \rho_s m (1 - \sigma) \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + v_3 \text{grad } p_s \right] + m p_s v_3 \text{grad } \sigma + m \sigma \rho_s q_3$$

Так как процентное содержание пара в газе мало, то вклад второй фазы в энергетический баланс определяется лишь энергией, выделяемой при фазовом переходе.

В соотношениях (1.15)–(1.17) h_i обозначает удельную теплоту изотермического изменения давления

$$(1.18) \quad h_i = (\partial I_i / \partial p_i)_T - 1 / \rho_i$$

$$(1.19) \quad c_i = (\partial I_i / \partial T)_p$$

где I_i — энтальпия i -й фазы.

Пусть α_i — коэффициент термического расширения i -й фазы

$$(1.20) \quad \alpha_i = -\rho_i^{-1} (\partial \rho_i / \partial T)_p$$

Тогда $h_i = -\alpha_i T / \rho_i$. Так как для воды α_s мало, то в выражении для Q_3 пренебрежем членами, пропорциональными h_3 .

В выражения для Q_i входит величина плотности q_i фиктивных внутренних источников тепла. Принято считать [3], что вся работы сил внутреннего трения при фильтрации диссипируется в тепло. Кроме того, для второй и третьей фаз имеются реальные распределенные источники тепла с интенсивностью, пропорциональной скорости фазовых переходов. При конденсации тепло выделяется, при испарении расходуется. Этот баланс можно записать в виде

$$(1.21) \quad m_i \rho_i q_i = -\rho_i R_i v_i + m_i \rho_i \sum_j L_{ji}' J_{ji}' - m_i \rho_i \sum_j L_{ji}'' J_{ji}''$$

где L_{ji} — скрытая удельная теплота фазового перехода из j -й фазы в i -ю. Один штрих сверху соответствует тем фазовым переходам, при которых энергия выделяется, два штриха — переходам, при которых энергия расходуется.

Если теперь воспользоваться выражением (1.7), подставив в него значение скоростей из (1.8), (1.9), то с учетом сделанных допущений выражения для энергетического вклада каждой из фаз примут вид

$$Q_1 = p_c m \frac{\partial \sigma}{\partial t} - h_1 \rho_1 m \sigma \frac{\partial p_c}{\partial t} - m \sigma v_1 (h_1 \rho_1 \text{grad } p_c + \text{grad } p_c)$$

$$Q_2 = -m\sigma\rho_2 L_{32} J_{32}$$

$$Q_3 = -p_3 m \frac{\partial \sigma}{\partial t} - m(1-\sigma) v_3 \text{grad } p_3 + m(1-\sigma) \rho_3 L_{23} J_{23}$$

Поскольку величина h_i неудобна для последующих преобразований, воспользуемся соотношением

$$(1.22) \quad h_i = -c_{p_i} \varepsilon_i - \rho_i^{-1}$$

где ε — дифференциальный коэффициент Джоуля — Томсона.

Окончательно

$$(1.23) \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m(p_c - p_3) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + m\sigma \left[c_{p_1} \varepsilon_1 \rho_1 v_1 \text{grad } p_c + \right. \\ \left. + (c_{p_1} \varepsilon_1 \rho_1 + 1) \frac{\partial p_c}{\partial t} - \rho_2 L_{32} J_{32} \right] + m(1-\sigma) [v_3 \text{grad } p_3 + \rho_3 L_{23} J_{23}]$$

Для замыкания системы уравнений (1.1) — (1.3), (1.8) — (1.10) используем конечные соотношения между переменными. Это в первую очередь уравнения состояния. Для газообразных фаз

$$(1.24) \quad p_1 = z_1(p_c, T) v_1^{-1} \rho_1 RT$$

$$(1.25) \quad p_2 = z_2(p_c, T) v_2^{-1} \rho_2 RT$$

где p_1 и p_2 — парциальные давления газа и пара в их смеси; v_i — грамм-моль соответствующего газа, R — универсальная газовая постоянная, $z_i(p, T)$ — коэффициенты сжимаемости.

По определению

$$(1.26) \quad p_c = p_1 + p_2 = RT \left[\frac{z_1(p_c, T) \rho_1}{v_1} + \frac{z_2(p_c, T) \rho_2}{v_2} \right]$$

Формула (1.26) будет первым из соотношений, необходимых для замыкания системы. Поскольку количество пара в смеси весьма мало, его парциальным давлением можно пренебречь. Тогда общее давление парогазовой смеси будет определяться одной газовой фазой

$$(1.27) \quad p_c \approx p_1 = z_1(p_c, T) \frac{RT \rho_1}{v_1}$$

Вторым уравнением состояния будет условие несжимаемости воды

$$(1.28) \quad \rho_3 = \text{const}$$

которое выполняется в широком диапазоне температур и давлений.

Последним замыкающим соотношением будет связь между давлениями газа и жидкой фазы p_c и p_3

$$(1.29) \quad p_c - p_3 = p_k(\sigma, T)$$

Здесь $p_k(\sigma, T)$ — капиллярное давление на границе раздела газ — вода. В дальнейшем, пренебрегая этим скачком давления, будем считать

$$(1.30) \quad p_3 = p_c$$

2. В качестве модельной задачи рассмотрим фильтрацию влажного газа из кругового пласта к скважине. При этом все параметры пласта и граничные условия будем считать не зависящими от угловой координаты φ .

Введем новую переменную

$$(2.1) \quad w = \rho_2 \sigma$$

и назовем ее влагонасыщенностью газа. Эта величина равна массе влаги в единице объема смеси газа и паров воды.

Вводя обозначения

$$(2.2) \quad K_1(\sigma) = k k_1(\sigma) / m \sigma \mu_1, \quad K_3(\sigma) = k k_3(\sigma) / m (1 - \sigma) \mu_3$$

запишем обобщенный закон Дарси (1.8), (1.9) в виде

$$(2.3) \quad v_{1r} = -K_1(\sigma) \partial p_c / \partial r$$

$$(2.4) \quad v_{2r} = -K_3(\sigma) \partial p_c / \partial r$$

Здесь индекс r обозначает проекцию вектора скорости на направление радиус-вектора r .

Подставляя выражения (2.3), (2.4) в уравнения сохранения массы (1.1)–(1.3), записанные в цилиндрических координатах, получим

$$(2.5) \quad \rho_1 \sigma K_1 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \left[\rho_1 \sigma \left(\frac{K_1}{r} + \frac{dK_1}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) + K_1 \frac{\partial(\rho_1 \sigma)}{\partial r} \right] \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial(\rho_1 \sigma)}{\partial t} = 0$$

$$(2.6) \quad w K_1 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \left[w \left(\frac{K_1}{r} + \frac{dK_1}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) + K_1 \frac{\partial w}{\partial r} \right] \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{m} (J_{32} - J_{23}) = 0$$

$$(2.7) \quad (1 - \sigma) K_3 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \left[(1 - \sigma) \left(\frac{K_3}{r} + \frac{dK_3}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) - K_3 \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right] \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{m \rho_3} (J_{23} - J_{32}) = 0$$

С учетом (1.30) здесь и в дальнейшем опускаем индекс s у переменной p .

В уравнении (1.10) пренебрежем членом, пропорциональным Λ , считая кондуктивный перенос тепла несущественным по сравнению с конвективным. При этом уравнение (1.10) с учетом (1.30) приобретает вид

$$(2.8) \quad C \frac{\partial T}{\partial t} = m [\sigma \rho_1 c_{p1} K_1 + (1 - \sigma) \rho_3 c_{p3} K_3] \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - m [\sigma K_1 c_{p1} \varepsilon_1 \rho_1 + (1 - \sigma) K_3] \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + m \sigma (c_{p1} \varepsilon_1 \rho_1 + 1) \frac{\partial p}{\partial t} - m w L_{32} J_{32} + m (1 - \sigma) \rho_3 L_{23} J_{23}$$

В работе [3] для фазовых проницаемостей в системе газ – вода предлагаются следующие выражения:

$$(2.9) \quad k_1(\sigma) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq \sigma \leq 0.1 \\ \left[\frac{(\sigma - 0.1)}{0.9} \right]^{3.5} [1 + 3(1 - \sigma)] & , \quad 0.1 \leq \sigma \leq 1 \end{cases};$$

$$k_2(\sigma) = \begin{cases} [(0.8 - \sigma) / 0.8]^{3.5} & 0 \leq \sigma \leq 0.8 \\ 0 & 0.8 \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно, если газонасыщенность со временем меняется медленно, а последующие расчеты подтверждают это предположение, то при начальном малом количестве пластовой воды можно положить $K_3(\sigma) = 0$.

Будем искать решение системы (2.5)–(2.8), соответствующее квазистационарному режиму, когда только газонасыщенность σ явно зависит от времени. В этом случае в уравнениях необходимо отбросить частные про-

изводные давления, температуры и влагонасыщенности газа по времени. Вместо (2.5)–(2.8) получим

$$(2.10) \quad \rho_1 \sigma K_1 \frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\rho_1 \sigma \left(\frac{K_1}{r} + \frac{dK_1}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) + K_1 \frac{d(\rho_1 \sigma)}{dr} \right] \frac{dp}{dr} = 0$$

$$(2.11) \quad w K_1 \frac{d^2 p}{dr^2} + \left[w \left(\frac{K_1}{r} + \frac{dK_1}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) + K_1 \frac{dw}{dr} \right] \frac{dp}{dr} + \frac{1}{m} (J_{32} - J_{23}) = 0$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{m \rho_3} (J_{32} - J_{23})$$

$$(2.13) \quad \rho_1 \sigma c_{p1} K_1 \frac{dp}{dr} \frac{dT}{dr} - \varepsilon_1 \rho_1 \sigma c_{p1} K_1 \left(\frac{dp}{dr} \right)^2 - w L_{32} J_{32} + (1 - \sigma) \rho_3 L_{23} J_{23} = 0$$

Воспользовавшись уравнением состояния (1.27), выразим ρ_1 и подставим в систему (2.10)–(2.13).

Далее с учетом известного соотношения

$$(2.14) \quad \partial z / \partial T = \varepsilon c_p p v / RT^2$$

можно найти

$$(2.15) \quad \frac{dw}{dr} = w \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial p} \right) \frac{dp}{dr} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{T} \left(\frac{\varepsilon_1 c_{p1} v_1}{Rz} \frac{p}{T} + 1 \right) \frac{dT}{dr} \right] + \frac{1}{m K_1 dp/dr} (J_{23} - J_{32})$$

$$(2.16) \quad \frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \left(\frac{1}{K_1} \frac{dK_1}{d\sigma} + \frac{1}{\sigma} \right) \right] \frac{dp}{dr} + \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial p} - \left(\frac{\varepsilon_1 c_{p1} v_1}{Rz} \frac{p}{T} + 1 \right) \frac{\varepsilon_1}{T} \right] \left(\frac{dp}{dr} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_1 c_{p1} v_1}{Rz} \frac{p}{T} + 1 \right) \frac{Rz}{\sigma c_{p1} K_1 v_1 p} [w L_{32} J_{32} - (1 - \sigma) \rho_3 L_{23} J_{23}] = 0$$

$$(2.17) \quad \frac{dT}{dr} = \varepsilon_1 \frac{dp}{dr} - \frac{Rz}{\sigma v_1 c_{p1}} \frac{wT}{p dp/dr} L_{32} J_{32} + \frac{(1 - \sigma) \rho_3 Rz}{\sigma v_1 c_{p1}} \frac{T}{p dp/dr} L_{23} J_{23}$$

Интегрирование уравнения (2.12) дает

$$(2.18) \quad \sigma(t, r) = \sigma(0, r) + \frac{1}{m \rho_3} \int_0^t (J_{32} - J_{23}) dt$$

Очевидно, для $\sigma(t, r)$ можно задать произвольное начальное условие

$$(2.19) \quad \sigma(0, r) = \sigma_0(r)$$

Граничные условия для переменных p , T и w выбираются исходя из условий задачи. Например, можно считать известными давление на забое скважины p_0 , $r = R_0$ и пластовое давление p_* . Полагая, что скважина имеет радиус влияния r_+ , граничные условия для p можно записать в виде

$$(2.20) \quad p(R_0) = p_0$$

$$(2.21) \quad p(r_+) = p_*$$

Можно положить известными пластовую температуру T и влагонасыщенность газа w_n в невозмущенной зоне. Тогда для температуры и влагонасыщенности можно принять

$$(2.22) \quad T(r_+) = T_n$$

$$(2.23) \quad w(r_+) = w_n$$

Остаются не определенными скорости фазового перехода пар — вода J_{23} или J_{32} , которые являются сложными функциями влажности газа w , газонасыщенности σ , давления и температуры. При небольших отличиях влажности газа от равновесной можно принять, что

$$(2.24) \quad J_{23} = \begin{cases} 0, & w \leq w_* \\ \beta_{23}(w - w_*), & w > w_* \end{cases}$$

$$(2.25) \quad J_{32} = \begin{cases} \beta_{23}(w_* - w), & w \leq w_* \\ 0, & w > w_* \end{cases}$$

Здесь $w_*(p, T)$ — равновесная влагонасыщенность, связанная с равновесной влагонасыщенностью при стандартных условиях, определенной в начале работы, соотношением

$$(2.26) \quad w_* = W_*(\rho_1^0)^{-1} \rho_1$$

где ρ_1^0 — плотность газа при стандартных условиях. Коэффициенты скорости испарения (конденсации) β_{32} , β_{23} имеют размерность сек^{-1} и определяются экспериментально.

В условиях термодинамического равновесия величины J_{23} и J_{32} можно определить из уравнения (2.15) следующим образом. Подставляя в (2.15) вместо w значение равновесной влажности $w_*(p, T)$, получим

$$(2.27) \quad \eta = J_{23} - J_{32} = mK_1 \frac{dp}{dr} \left\{ \frac{\partial w_*}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial w_*}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} - \right. \\ \left. - w_* \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial p} \right) \frac{dp}{dr} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \left(\frac{\varepsilon_1 c_{p1} v_1}{Rz} \frac{p}{T} + 1 \right) \right] \right\}$$

Если $\eta \geq 0$, то уравнение (2.27) определяет скорость конденсации J_{23} , а если $\eta < 0$, то это уравнение определяет скорость испарения J_{32} , т. е.:

$$(2.28) \quad J_{23} = 1/2(|\eta| + \eta), \quad J_{32} = 1/2(|\eta| - \eta)$$

Если скорости фазового перехода определить таким образом, то расчет сводится к решению на каждом шаге по времени нелинейной краевой задачи (2.16), (2.17) с соответствующими условиями. На первом шаге скорости фазового перехода можно считать равными нулю. После определения значения J_{23} или J_{32} по формуле (2.28) находится новое значение $\sigma(r)$ по формуле (2.28), делается шаг по времени и снова решается краевая задача и т. д.

3. Для задачи (2.16), (2.17) с граничными условиями (2.20) — (2.23) применялся метод квазилинеаризации [4]. В качестве иллюстрации пригодности этого метода для решения подобных задач рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{u} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 = - \frac{\alpha}{p}$$

полученное из уравнения (2.16) в предположении об изотермичности ($T = \text{const}$) и постоянстве газонасыщенности ($\sigma(r) = \text{const}$). Точное решение этого уравнения при граничных условиях $u(a) = u_1$, $u(b) = u_2$ имеет вид

$$u = (M \ln r + N - \alpha/2 r^2)^{1/2}$$

$$M = \frac{u_2^2 - u_1^2 + \alpha/2 (b^2 - a^2)}{\ln(b/a)}, \quad N = \frac{u_1^2 \ln b - u_2^2 \ln a + \alpha/2 \ln a \ln b (a^2 - b^2)}{\ln(b/a)}$$

Результаты точного и приближенного (три итерации) решений для $a=1$, $b=e^5$, $\alpha=0.01$, $u_1=1$, $u_2=10$ приведены в таблице.

$\ln r$	№ итерации			Точное решение
	1	2	3	
0	1.	1	1	1
1	5.7655	6.4986	6.4954	6.5413
2	8.2228	9.1491	9.1508	9.1857
3	10.1595	11.1223	11.1261	11.1561
4	11.5410	12.3567	12.3574	12.3853
5	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000

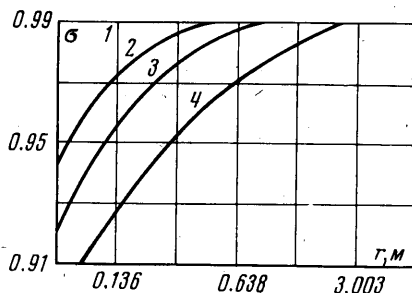
В заключение рассмотрим пример численного решения системы (2.16), (2.17). Пусть $r_+ = 10^3$ м, $R_0 = 0.0625$ м, $p_0 = 6.5 \cdot 10^6$ н/м², $p_* = 8.0 \cdot 10^6$ н/м², $T_n = 12^\circ \text{C}$, $k = 0.102 \cdot 10^{-12}$ м², $L_{23} = L_{32} = 3.34 \cdot 10^5$ Дж/кг, $m = 0.2$. Пластовый газ — чистый метан. Начальная газонасыщенность 0.99. В качестве уравнения состояния принято уравнение Бертло, справедливое до давлений порядка $15.0 \cdot 10^6$ н/м². В этом случае

$$z = 1 + \frac{9}{128} \frac{T_c}{p_c} \frac{p}{T} \left(1 - \frac{6T_c^2}{T^2} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{n-1}{n} \frac{9}{128} \frac{T_c}{p_c} \left(\frac{18T_c^2}{T^2} - 1 \right)$$

где T_c , p_c — критические температура и давление, n — показатель политропы. Для метана $T_c = 191^\circ \text{K}$, $p_c = 4.5 \cdot 10^6$ н/м², $n = 1.31$.

Результаты расчетов, представленные на фигуре (кривым 1–4 соответствуют $t = 0, 3.6 \cdot 10^4, 28.8 \cdot 10^4, 194.4 \cdot 10^4$ сек), показывают, что основные эффекты, связанные с влагообменом, проявляются в призабойной зоне пласта (в данном примере в пределах 3 м). Это имеет большое значение при рассмотрении вопроса об образовании газовых гидратов при добыче газа из месторождений, расположенных в зоне пониженных температур горных пород. Результаты показывают, что необходимое условие гидратообразования (наличие свободной влаги) выполняется только в небольшой зоне вблизи скважины.



Поступила в редакцию 25 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Корогаев Ю. П., Кулиев А. М., Мусаев Р. М. Борьба с гидратами при транспорте природных газов. М., «Недра», 1973.
2. Рубинштейн Л. И. Температурные поля в нефтяных пластах. М., «Недра», 1972.
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
4. Bellman R. E., Kalaba R. E. Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems. N. Y., American Elsevier Publ., 1965. (Рус. перев. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968).