

## СДВИГ ВОЛОКНИСТОЙ СУСПЕНЗИИ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

В. А. БАБКИН

(Петрозаводск)

Рассматривается сдвиг волокнистой суспензии между коаксиальными цилиндрами. При решении задачи используется модель суспензии, построенная в [1, 2]. Решение ищется методом разложения в ряд по малому параметру. Найденное первое приближение сопоставляется с экспериментами [3, 4] и с решением задачи о стержневом течении в трубе [2].

Экспериментальные исследования движения волокнистой суспензии между коаксиальными цилиндрами, один из которых неподвижен, а другой (ротор) вращается, проведены авторами работ [3-6]. Был выявлен характер движения суспензии при различных угловых скоростях, получены зависимости между касательными напряжениями на поверхностях цилиндров и угловой скоростью ротора. Движение суспензии между коаксиальными цилиндрами сопоставлялось с ее движением в прямой круглой трубе [4, 6], однако полученные эмпирические зависимости между параметрами этих движений имеют неуниверсальный характер.

При движении суспензии между коаксиальными цилиндрами отчетливо выделяются несколько режимов [3-5]. Существует, в частности, такой зависящий от концентрации суспензии интервал угловых скоростей ротора, при котором тонкий слой жидкости, свободный от волокон, находится на границе с ротором, а вся масса волокон сосредоточена в области, примыкающей к неподвижному цилиндру, и находится в покое. Такое состояние будет называться сдвигом.

**1. Постановка задачи и ее решение.** Пусть в пространство между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) помещена волокнистая суспензия средней весовой концентрации  $c_0$ , большей концентрации седиментации. Внутренний цилиндр приведен во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , причем  $\omega$  лежит в интервале угловых скоростей  $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_*$ , при которых движение суспензии есть сдвиг. Внешний цилиндр покоится. Найдем зависимость касательных напряжений на стенках цилиндров  $\tau_{w1}$  и  $\tau_{w2}$  от угловой скорости  $\omega$ .

В соответствии с определением сдвига пространство между цилиндрами разобьем на две области. Область 1 — это прилегающий к внутреннему цилиндру пристеночный слой толщиной  $d$ , в котором движется свободная от волокон жидкость. Область 2 — область сдвига. В ней сосредоточена вся масса волокон. Волокна образуют структуру твердого тела — сеть волокон. Сеть волокон будет считаться покоящейся и подвергающейся лишь деформации. Задача состоит в том, чтобы найти распределение скоростей в пристеночном слое и его толщину  $d$ .

В каждой области отдельно запишем уравнения движения и состояния. И движение жидкости, и деформация сети волокон считаются осесимметричными. Примем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, x$ ; ось  $x$  направлена по оси цилиндров.

Жидкость, входящую в суспензию, будем считать ньютоновской, а ее движение в пристеночном слое ламинарным. Используя условие прилипания жидкости при  $r=r_1$  и  $r=r_1+d$ , получим [7]

$$(1.1) \quad v = \frac{\omega[(1+\delta)^2 - \xi^2]}{\xi\delta(2+\delta)}, \quad \xi = \frac{r}{r_1}, \quad \delta = \frac{d}{r_1}, \quad 1 \leq \xi \leq 1+\delta$$

$$(1.2) \quad \tau_{\varphi r} = -2\omega\eta(1+\delta)^2/\xi^2\delta(2+\delta)$$

где  $v$ ,  $\tau_{\varphi r}$  — скорость жидкости и касательные напряжения в пристеночном слое,  $\eta$  — динамическая вязкость. Эксперименты [5] показывают, что  $\delta \ll 1$ , поэтому величиной  $\delta$  по сравнению с единицей можно пренебречь. Тогда необходимая далее формула (1.2) примет вид

$$(1.3) \quad \tau_{\varphi r} = -\omega\eta/\delta\xi^2$$

В области сдвига и в ядре стержневого течения [1, 2] поведение суспензии по существу одинаково: в обоих случаях сеть волокон деформируется как твердое тело. Для описания суспензии в области 2 воспользуемся уравнениями [2], записывая их в рассматриваемой системе координат.

Пренебрегая силами тяжести и учитывая, что при сдвиге сеть волокон покоится, из уравнения Дарси получим, что жидкая фаза в области сдвига также покоится.

Ввиду симметрии деформации смещения точек сети волокон будем искать в виде

$$(1.4) \quad u_r = u_r(r), \quad u_\varphi = u_\varphi(r), \quad u_x = 0$$

Конечные деформации  $\varepsilon_{ij}$  выражаются через смещения (1.4) по формулам

$$(1.5) \quad \begin{aligned} 2\varepsilon_{rr} &= 2u_{r,r} - (u_{r,r}^2 + u_{\varphi,r}^2), & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= u_r/r - (u_r^2 + u_\varphi^2)/2r^2 \\ 2\varepsilon_{\varphi r} &= u_{\varphi,r} - (u_\varphi + u_r u_{\varphi,r} - u_\varphi u_{r,r})/r \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{rx} = \varepsilon_{\varphi x} &= 0, & u_{i,r} &= du_i/dr \end{aligned}$$

Деформация сети волокон считается упругой. Записывая уравнение состояния, примем во внимание, что для высокопористых эластичных сред, какой и является сеть волокон, коэффициент Пуассона равен нулю. Квадратичную зависимость (1.4) работы [2] возьмем в виде

$$(1.6) \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(1 - \varepsilon_{\alpha\alpha}) + 4\kappa\varepsilon_{i\alpha}\varepsilon_{\alpha j}, \quad i, j = r, \varphi, x$$

где  $\sigma_{ij}$  — эффективные напряжения в сети волокон,  $\mu$  и  $\kappa$  — упругие константы; по одинаковым индексам проводится свертка. Если  $\kappa = \mu$ , то двухконстантные уравнения (1.6) переходят в одноконстантные

$$(1.7) \quad \sigma_{ij} = 2\mu[\varepsilon_{ij}(1 - \varepsilon_{\alpha\alpha}) + 2\varepsilon_{i\alpha}\varepsilon_{\alpha j}]$$

Непосредственной подстановкой формул (1.5) в (1.6) убеждаемся, что отличны от нуля только  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi r}$ . Они удовлетворяют следующим уравнениям равновесия (массовые силы не учитываются):

$$(1.8) \quad \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\varphi r}}{dr} + \frac{2\sigma_{\varphi r}}{r} = 0$$

Граничные условия необходимо поставить на границе раздела областей  $r=r_1+d$  и на неподвижном цилиндре  $r=r_2$

$$(1.9) \quad r=r_1+d: \quad \sigma_{\varphi r} = \tau_{\varphi r} = -\omega\eta/\delta, \quad \sigma_{r,r} = 0, \quad u_r = d$$

$$(1.10) \quad r=r_2: \quad u_\varphi = 0, \quad u_r = 0$$

Первое условие (1.9) выражает непрерывность касательных напряжений в жидкости  $\tau_{\varphi r}$  и в сети волокон  $\sigma_{\varphi r}$  на границе раздела областей; остальные условия очевидны.

Из формул (1.5) и (1.6) следует, что  $\sigma_{xx} = 0$ , поэтому условие отсутствия нормальных напряжений в произвольном сечении  $x = \text{const}$  всегда выполнено.

Искомые величинами системы (1.5), (1.6), (1.8) с граничными условиями (1.9), (1.10) являются смещения  $u_r$ ,  $u_\varphi$  и толщина пристеночного

слоя  $d$ . Решение будем искать методом разложения смещений в ряд по малому параметру. Выявим этот параметр.

Величинами, определяющими деформацию сети волокон, служат  $\omega$ ,  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ . Из анализа размерностей следует [8], что безразмерные деформации сети волокон — функции безразмерных комплексов  $\omega\eta/\mu$ ,  $\kappa/\mu$ ,  $r_2/r_1$ . Характерным для данной задачи является первый комплекс, поэтому за малый параметр примем  $\beta = \omega\eta/2\mu$ , где множитель  $1/2$  введен просто для удобства.

Смещения  $u_r$ ,  $u_\varphi$  разложим в степенной ряд по  $\beta$

$$(1.11) \quad u_i = u_i^{(1)}\beta + u_i^{(2)}\beta^2 + \dots, \quad i=r, \varphi$$

Подставляя ряды (1.11) в формулы (1.5), (1.6), (1.8) и приравнявая члены при  $\beta$ , получим уравнения для определения  $u_i^{(1)}$

$$(1.12) \quad u_{i,rr}^{(1)} + u_{i,r}^{(1)}/r - u_i^{(1)}/r^2 = 0, \quad i=r, \varphi$$

С учетом первых двух условий (1.9) и условий (1.10), а также принимая во внимание малость  $\delta$  по сравнению с единицей, найдем

$$(1.13) \quad u_r^{(1)} = 0, \quad u_\varphi^{(1)} = r_1^2(r_2^2 - r^2)/\delta r r_2^2$$

Приравнявая множители при  $\beta^2$ , найдем уравнение для определения функции  $u_r^{(2)}$

$$(1.14) \quad u_{r,rr}^{(2)} + \frac{u_{r,r}^{(2)}}{r} - \frac{u_r^{(2)}}{r^2} = \frac{2(4e-1)r_1^4}{\delta^2 r^5}, \quad e = \frac{\kappa}{\mu}$$

Его решение со вторыми граничными условиями (1.9), (1.10)

$$(1.15) \quad \delta^2 u_r^{(2)} = A_1 r + A_2/r + (4e-1)r_1^4/4r^3$$

$$A_1 = -\frac{A_2}{r_2^2} - \frac{4e-1}{4h^4}, \quad \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{1}{h^2+1} \left( \frac{1-4e}{4} - \frac{1}{h^2} - \frac{4e+1}{4h^4} \right), \quad h = \frac{r_2}{r_1}$$

Подстановка решения (1.15) в последнее граничное условие (1.9) позволяет найти безразмерную толщину пристеночного слоя  $\delta$

$$(1.16) \quad \delta^3 = \omega^2 \eta^2 (h^2 - 1) / [8G_1^2 h^2 (h^2 + 1)] \\ G_1^2 = \mu^2 (4e - 3 - h^{-2})^{-1}$$

где  $G_1$  — по определению, эффективный упругий модуль при сдвиге суспензии с уравнениями состояния (1.6). При произвольном  $h > 1$  решение (1.16) имеет смысл, т. е.  $\delta > 0$ , только в случае, если  $e \geq 1$ .

Подстановка формулы (1.16) в формулу (1.3) при  $\xi = 1$  дает искомую зависимость  $\tau_{w1}(\omega)$

$$(1.17) \quad \tau_{w1}^3 = 8\omega\eta G_1^2 h^2 (h^2 + 1) (h^2 - 1)^{-1}, \quad \tau_{w1} = |\tau_{\varphi r}|_{\xi=1}$$

Формула (1.17) получена с использованием только первых ненулевых членов разложений (1.11), поэтому ее следует рассматривать как первое приближение зависимости  $\tau_{w1}(\omega)$ . Более высокие приближения получаются аналогично.

Максимальное касательное напряжение в сети волокон достигается, очевидно, при  $\xi = 1 + \delta$  и определяется первой формулой (1.9). В рассматриваемом приближении, когда  $\delta \ll 1$ , будет  $|\sigma_{\varphi r}|_{\max} = \tau_{w1}$ . Значение угловой скорости  $\omega_*$ , определяющей верхнюю границу интервала сдвига, найдем из условия, чтобы максимальное касательное напряжение не превышало пре-

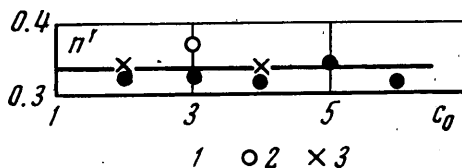
дельного напряжения  $\tau$ . [2]. Тогда

$$\omega_* = \tau_*^3 (h^2 - 1) / [8\eta G_1^2 h^2 (h^2 + 1)].$$

Для определения нижней границы  $\omega_0$  интервала сдвига необходимы дополнительные экспериментальные исследования.

В случае уравнений состояния (1.7) зависимость  $\tau_{w1}(\omega)$  также выражается формулой (1.17) с той лишь разницей, что упругий модуль  $G_1$  следует заменить упругим модулем  $G_2$ , равным модулю  $G_1$  при  $e=1$  (см. (1.7), (1.14)), т. е.

$$(1.18) \quad G_2^2 = \mu^2 (1 - h^{-2})^{-1}$$



## 2. Сдвиг и стержневое течение.

Графики  $\tau_{w1}(\omega)$ , которые можно построить по опытным данным работ [3, 4], при сдвиге хорошо аппроксимируются функциями вида  $\tau_{w1} = k' \omega^{n'}$ , где  $k'$ ,  $n'$  — эмпирические константы. Значения  $n'$  для суспензий трех сортов волокон различной концентрации представлены на фигуре: 1 — беленая сульфитная целлюлоза [3], 2 — небеленая канадская крафт-целлюлоза; 3 — беленая натронная целлюлоза [4]. Экспериментальные значения  $n'$  близки к значению  $n' = 1/3$ , даваемому формулой (1.17).

Прежде чем сопоставлять сдвиг и стержневое течение, найдем зависимость касательных напряжений на стенке трубы  $\tau_w$  от средней скорости суспензии  $v$  для стержневого течения суспензии с уравнениями состояния (1.6) и (1.7). Полагая  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$  в формулах (1.15), (2.1) работы [2]<sup>1</sup>, получим

$$(2.1) \quad \frac{v}{R} = \frac{\tau_w^3}{8\eta E_1^2} + \frac{2m_0 \tau_w}{a_0 R^2}, \quad E_1^2 = \frac{\mu^2}{e-1}$$

Здесь  $E_1$  — эффективный упругий модуль при стержневом течении суспензии с уравнениями состояния (1.6),  $m_0$ ,  $a_0$  — пористость и коэффициент сопротивления при фильтрации для недеформированной сети волокон,  $R$  — радиус трубы.

В случае уравнений состояния (1.7), когда  $e=1$ , вторая формула (2.1) теряет смысл. Повторяя решение задачи [2] для этого случая, в первом приближении получим

$$(2.2) \quad \frac{v}{R} = \frac{\tau_w^5}{24\eta E_2^4} + \frac{2m_0 \tau_w}{a_0 R^2}, \quad E_2 = \mu$$

где  $E_2$  — эффективный упругий модуль при стержневом течении суспензии с уравнениями состояния (1.7).

Для односкоростного течения формулы (2.1) и (2.2) примут вид степенных зависимостей

$$(2.3) \quad \tau_w = (8\eta v E_1^2 / R)^{1/3}, \quad \tau_w = (24\eta v E_2^4 / R)^{1/5}$$

Существуют достаточно многочисленные случаи, когда показатель  $n'$  в эмпирической формуле  $\tau_w = K'(v/R)^{n'}$ , где  $K'$  и  $n'$  — эмпирические констан-

<sup>1</sup> Во второй формуле (1.15) работы [2] допущена опечатка. Определяющей для эффективного упругого модуля  $E$  следует считать формулу  $\mu^3(3\lambda + 2\mu) = E^2[\mu(2\lambda - 3\lambda - \lambda_2 - 2\mu) - \lambda\mu]$ .

ты, при стержневом течении близок или равен  $1/5$ . Так, для суспензий белевой сульфитной целлюлозы при  $c_0=2-6\%$  [3], древесной массы при  $c_0=2-3.2\%$  [9] показатель  $n' \approx 1/5$ ; для суспензий волокон Long Lac 17 при  $c_0=0.25-0.75\%$  показатель  $n' \approx 1/5$  [10]. В работе [11]  $n' = 1/5$  вообще считается характерным значением  $n'$  при стержневом течении, однако данные, приведенные в [1, 2], не подтверждают это мнение. Для суспензий одной и той же белевой сульфитной целлюлозы при  $c_0=2-6\%$  получено  $n' = 1/3$  при сдвиге и  $n' = 1/5$  при стержневом течении [3], т. е. тот же результат, что дают формулы (1.17), (1.18) и вторая формула (2.3). Таким образом, искусственное на первый взгляд уравнение состояния (1.7) оправдывается результатами опытов.

Сопоставление формул (1.17), (1.18) и (2.1)–(2.3) показывает, что даже в первом приближении поведение суспензии при сдвиге и стержневом течении существенно различно.

При стержневом течении средняя скорость суспензии может в значительной степени зависеть от разности скоростей фаз в ядре течения, что и приводит к полиномиальным формулам (2.1) и (2.2). При сдвиге разность скоростей фаз в области сдвига равна нулю, поэтому зависимость  $\tau_{w1}(\omega)$  просто степенная.

При стержневом течении эффективные упругие модули  $E_1$  и  $E_2$  не зависят от радиуса трубы, тогда как при сдвиге модули  $G_1$  и  $G_2$  зависят от отношения радиусов  $h$ .

В односкоростном стержневом течении показатель  $n'$  служит указателем того, сколько констант входит в уравнения состояния сети волокон, а при сдвиге  $n'$  этим свойством не обладает.

В результате испытаний суспензии при сдвиге можно определить начальное напряжение сдвига  $\tau_0$ , при котором начинается движение внутреннего цилиндра; предельное напряжение  $\tau_*$ , при котором начинается разрушение сети волокон, и эффективный упругий модуль при сдвиге  $G_1$  (или  $G_2$ ).

Для решения задачи о стержневом течении этой информации недостаточно, поскольку только по ней нельзя найти эффективные упругие модули при стержневом течении. В случае уравнений состояния (1.6)  $E_1$  и  $G_1$  зависят от двух независимых параметров  $\mu$  и  $\kappa$ . В случае уравнений состояния (1.7) модули  $E_2$  и  $G_2$  зависят от одного параметра, однако получающаяся при сдвиге зависимость  $\tau_{w1}(\omega)$  не дает сведений, являются ли уравнения состояния одноконстантными или нет. Таким образом, испытания суспензии между цилиндрами не могут, вообще говоря, заменить испытаний суспензии в трубе.

Связь между напряжениями на стенках трубы  $\tau_w$  и внутреннего цилиндра  $\tau_{w1}$  получается из формул (1.17) и (2.1) для двухконстантных уравнений состояния или из формул (1.17), (1.18) и (2.2) для одноконстантных уравнений состояния путем исключения параметра  $\mu$ . Она определяется параметрами  $e$ ,  $m_0$ ,  $a_0$ ,  $\eta$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $\omega$ ,  $v$ .

Эмпирическая зависимость [3, 4], связывающая  $\tau_w$  и  $\tau_{w1}$  в безразмерном виде

$$(2.4) \quad f = \psi \frac{s}{\rho v R}, \quad f = \frac{8\tau_w}{\rho v^2}, \quad s = \frac{\pi\tau_{w1}}{\omega h}$$

( $\rho$  — плотность суспензии,  $\psi$  — эмпирический коэффициент), учитывает только часть этих параметров. Зависимость получена при условии, что  $\tau_w = \tau_{w2}$ ,  $v = \omega r_1$ . Отсюда не-универсальность формулы (2.4) очевидна.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабкин В. А. Стержневое течение волокнистой суспензии. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
2. Бабкин В. А. Сопротивление при стержневом течении волокнистой суспензии в трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
3. Durst R. E., Jenness L. C. The flow properties of paper pulp stocks. 1. Relationship of shear value to pipe friction for bleached sulphite pulp slurries. Tappi, 1954, vol. 37, No. 10.
4. Durst R. E., Jenness L. C. The flow properties of paper pulp stock. 2. The relationship of shear value to pipe friction for soda kraft and groundwood slurries. Tappi, 1955, vol. 38, No. 4.
5. Baines W. D. Laminar flow of dilute fibre suspension. Svensk papperstidn., 1959, arg. 62, Nr 22.
6. Head V. P., Durst R. E. Stock slurry hydraulics. Tappi, 1957, vol. 40, No. 12.
7. Кочин Н. Е., Кубель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
8. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
9. Волков Л. Е. Потери напора на трение в массопроводах. Бумажная пром-ть, 1954, № 10.
10. Bugliarello G., Daily J. Rheological models and laminar shear flow of fiber suspensions. Tappi, 1961, vol. 44, No. 12.
11. Balls B. W. Towards better understanding of consistency measurement. Paper Maker and British Paper Trade Journal, 1968, vol. 155, No. 5.