**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1975**

УДК 532.5

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О КРУГЛОМ ШТАМПЕ, КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ НА ЖИДКОМ СЛОЕ И ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Е. М. ГЕРШУНОВ

(Москва)

Первая задача о динамическом воздействии на плавающее на поверхности жидкости тело ограниченных размеров была поставлена и решена Н. Е. Жуковским [1]. В последующих исследованиях вопрос об ударе по плавающему телу [2–4] был всесторонне изучен и была развита общая теория присоединенных масс [2], нашедшая впоследствии экспериментальное подтверждение [5]. Обзор некоторых работ, в основе которых лежат методы теории функций комплексного переменного, содержится в докладе [6]. Не приводя подробной библиографии, отметим работы [7–10], посвященные развитию вопросов, поставленных в [2–4]. В исследованиях [11–14] в отличие от указанных решены некоторые динамические задачи, в которых плавающая пластинка постоянной или переменной толщины имеет неограниченные размеры в плане. В [15] предпринята, по-видимому, первая попытка сформулировать контактную гидродинамическую задачу, в которой исследовались волны для монохроматических режимов. Динамические задачи о гармоническом воздействии на упругие конструкции ограниченных размеров, плавающие на поверхности жидкости, содержатся в [16, 17], при этом решения получены на основе приближенного удовлетворения граничных условий на свободной поверхности жидкости.

В данной статье в самой общей постановке при точном удовлетворении граничных условий рассматривается задача о произвольном осесимметричном динамическом воздействии на плавающее на поверхности жидкости осесимметричное твердое тело, имеющее плоское круговое в плане основание.

1. Пусть осесимметричный штамп с массой M, имеющий плоское горизонтальное круговое основание $0\leqslant r\leqslant R$, находится на поверхности $z=0$ слоя $-h\leqslant z\leqslant 0$, $0\leqslant r<\infty$ идеальной несжимаемой жидкости плотностью γ. Предположим, что движение первоначально находившейся в покое системы штамп — жидкость возбуждается произвольной приложенной к штампу осесимметричной динамической нагрузкой, имеющей вертикальную равнодействующую $q(t)$ $(t\geqslant 0)$. Определим в зависимости от возмущающей нагрузки потенциал скоростей жидкости $\varphi(\rho, \zeta, t)$ $(\rho=r/R,\ \zeta=z/h,\ \rho\geqslant 0,\ -1\leqslant\zeta\leqslant 0,\ t\geqslant 0)$ и закон движения штампа $w(t)$ $(t\geqslant 0)$ относительно положения статического равновесия при безотрывном безвихревом осесимметричном движении системы штамп — жидкость.

Выделив статическую составляющую гидродинамического давления жидкости, сведем поставленную задачу к следующей системе интегродифференциальных уравнений, граничных и начальных условий (g — ускорение свободного падения)

$$M\ddot{w}(t)+\pi R^2\gamma g w(t)=q(t)-2\gamma\pi R^2\int_0^1 \rho\varphi(\rho,0,t)\,d\rho \qquad (t\geqslant 0) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(\rho,\zeta,t)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi(\rho,\zeta,t)}{\partial\rho}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2\varphi(\rho,\zeta,t)}{\partial\zeta^2}=0 \tag{1.2}$$

$$\left(\rho\geqslant 0,\quad -1\leqslant\zeta\leqslant 0,\quad t\geqslant 0,\quad \varepsilon=\frac{h}{R}\right)$$

$$(1.3)\qquad \lim_{\rho\to\infty}\frac{\partial\varphi(\rho,\zeta,t)}{\partial\rho}=0\qquad(-1\leqslant\zeta\leqslant0,\ t\geqslant0)$$

$$(1.4)\qquad \frac{\partial\varphi(\rho,-1,t)}{\partial\zeta}=0\qquad(\rho\geqslant0,\ t\geqslant0)$$

$$(1.5)\qquad \frac{\partial\varphi(\rho,0,t)}{\partial\zeta}=h\dot{w}(t)\qquad(0\leqslant\rho<1,\ t\geqslant0)$$

$$(1.6)\qquad \varphi(\rho,0,t)=0\qquad(\rho>1,\ t\geqslant0)$$

$$(1.7)\qquad \varphi(\rho,0,0)=0\qquad(\rho\geqslant0)$$

$$(1.8)\qquad w(0)=\dot{w}(0)=0$$

Граничное условие (1.3) выражает отсутствие источников возмущений на бесконечности; условие (1.4) — жесткость, сплошность и непроницаемость горизонтального дна жидкого слоя; условие (1.5) — безотрывность движения системы штамп — жидкость; условие (1.6) — отсутствие гидродинамического давления на свободной поверхности жидкости (поверхностные волны не учитываются).

Начальные условия (1.7) и (1.8) описывают состояние покоя системы штамп — жидкость в начальный момент времени. Нетрудно показать, что эти условия являются сопряженными в том смысле, что удовлетворение условий (1.8) сразу влечет за собой выполнение условия (1.7).

2. Вводя интегральное преобразование Ханкеля [18]

$$(2.1)\qquad \Phi(u,\zeta,t)=\int_0^\infty\rho\varphi(\rho,\zeta,t)J_0(\rho u)\,d\rho\qquad(-1\leqslant\zeta\leqslant0,\ t\geqslant0)$$

ядром которого является бесселева функция первого рода нулевого индекса, применяя это преобразование к дифференциальному уравнению (1.2) и используя граничное условие (1.3), получим уравнение

$$(2.2)\qquad \frac{\partial^2\Phi(u,\zeta,t)}{\partial\zeta^2}-(\varepsilon u)^2\Phi(u,\zeta,t)=0\qquad(-1\leqslant\zeta\leqslant0,\ t\geqslant0)$$

Его решение, удовлетворяющее граничному условию (1.4), имеет вид

$$(2.3)\qquad \Phi(u,\zeta,t)=C(u,t)\operatorname{ch}\varepsilon u(1+\zeta)\qquad(-1\leqslant\zeta\leqslant0,\ t\geqslant0)$$

Здесь $C(u,t)$ — некоторая пока неизвестная функция, подлежащая определению.

Воспользовавшись теоремой обращения [18], найдем

$$\varphi(\rho,\zeta,t)=\int_0^\infty uC(u,t)\operatorname{ch}\varepsilon(1+\zeta)uJ_0(\rho u)\,du\qquad(-1\leqslant\zeta\leqslant0,\ \rho\geqslant0,\ t\geqslant0)$$

(2.4)

Граничные условия (1.5) и (1.6) приводят к системе интегральных уравнений относительно функции $C(u,t)$

$$(2.5)\qquad \int_0^\infty u^2C(u,t)\operatorname{sh}\varepsilon uJ_0(\rho u)\,du=R\dot{w}(t)\qquad(0\leqslant\rho<1,\ t\geqslant0)$$

$$\int_0^\infty uC(u,t)\operatorname{ch}\varepsilon uJ_0(\rho u)\,du=0\qquad(\rho>1,\ t\geqslant0)$$

Отыскивая решение в виде

$$C(u,t)=C(u)R\dot{w}(t),\qquad C(u)=f(u)u^{-1}\operatorname{ch}^{-1}\varepsilon u \tag{2.6}$$

сведем систему (2.5) к парным интегральным уравнениям [19, 20]

$$\int_0^\infty uf(u)\operatorname{th}\varepsilon u J_0(\rho u)\,du=1\qquad(0\leqslant\rho<1)$$

$$\int_0^\infty f(u)J_0(\rho u)\,du=0\qquad(\rho>1)$$

Следуя [20], запишем решение парных уравнений в виде ряда по бесселевым функциям первого рода полуцелого индекса

$$f(u)=u^{-0.5}\sum_{m=0}^{\infty}a_mJ_{1.5+2m}(u) \tag{2.7}$$

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\delta_n-C_n+C_n'-C_n''+\ldots),\qquad \delta_n=1\quad(n=0),\ 0\ (n>0) \tag{2.8}$$

$$C_n=L_{0,n},\quad C_n'=\sum_{m=0}^{\infty}L_{m,n}C_m,\quad C_n''=\sum_{m=0}^{\infty}L_{m,n}C_m',\ldots$$

$$L_{m,n}=(4n+3)\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s+k}(2m+2n+2k+2)!}{k!2^{4(m+n+k)+5}\Gamma(2n+2.5)}\times \tag{2.9}$$

$$\times\frac{F(-k,-2m-1.5-k;\,2n+2.5;\,1)}{\Gamma(2m+k+2.5)(s\varepsilon)^{2k+2n+2m+3}}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — Г-функция, $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция, выражаемая обрывающимся гипергеометрическим рядом [21], так как α — целое отрицательное число или нуль.

Подставим теперь функцию (2.7) с учетом (2.6) в подынтегральное выражение (2.4). Получим искомый потенциал скоростей

$$\varphi(\rho,\zeta,t)=R\dot{w}(t)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\varepsilon(1+\zeta)u}{\sqrt{u}\operatorname{ch}\varepsilon u}J_{1.5+2n}(u)J_0(\rho u)\,du \tag{2.10}$$

$$(\rho\geqslant0,\ -1\leqslant\zeta\leqslant0,\ t\geqslant0)$$

Для определения закона движения штампа внесем эту зависимость при $\zeta=0$ в уравнение (1.1). Найдем

$$(M+m)\ddot{w}(t)+\pi g\gamma R^2w(t)=q(t)\qquad(t\geqslant0) \tag{2.11}$$

$$m=2\pi\gamma R^3\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^\infty u^{-1.5}J_{1.5+2n}(u)J_1(u)\,du \tag{2.12}$$

Запишем общее решение уравнения (2.11) при нулевых начальных условиях (1.8) в виде

$$w(t)=\frac{1}{(M+m)\omega}\int_0^t q(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau \qquad (t\geqslant 0) \tag{2.13}$$

$$\omega=\omega^*\left(1+\frac{m}{M}\right)^{-0.5}, \qquad \omega^*=R\sqrt{\frac{\pi g\gamma}{M}} \tag{2.14}$$

Отметим, что m — присоединенная масса жидкости, а ω — частота собственных колебаний системы штамп — жидкость. Величина ω^* является частотой той же системы при условии пренебрежения инерционными свойствами жидкости.

3. Найдем квадратуры (2.10) и (2.12). Сначала рассмотрим (2.10). Заменим отношение гиперболических функций показательной функцией

$$\frac{\operatorname{ch}\varepsilon(1+\zeta)u}{\operatorname{ch}\varepsilon u}\approx e^{u\varepsilon\zeta} \qquad (-1\leqslant\zeta\leqslant 0) \tag{3.1}$$

Используя табличный интеграл [21] при $\zeta\neq 0$, получаем

$$\varphi(\rho,\zeta,t)=\frac{R\dot{w}(t)}{2\sqrt{2}(\varepsilon\zeta)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{4^n(\varepsilon\zeta)^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(2+2n+2k)}{4^k k!\,\Gamma(k+2.5)(\varepsilon\zeta)^{2k}}\times \tag{3.2}$$

$$\times F(-k,-1.5-2n-k;\,1;\,\rho^2) \qquad (\rho\geqslant 0,\ t\geqslant 0,\ -1\leqslant\zeta<0)$$

Это выражение непригодно при $\zeta=0$. Для отыскания потенциала скоростей в этом случае непосредственно выполняем квадратуру (2.10)

$$\varphi(\rho,0,t)=\begin{cases}\dfrac{R\dot{w}(t)}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n n!}{\Gamma(n+1.5)}F(1+n,-0.5-n;\,1;\,\rho^2) & (0\leqslant\rho<1,\ t\geqslant 0)\\ 0 & (\rho\geqslant 1,\ t\geqslant 0)\end{cases} \tag{3.3}$$

Интегрируя (2.12), с учетом [21] и свойства $\Gamma(1-n)=\pm\infty$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ [22], найдем

$$m=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0\gamma R^3 \tag{3.4}$$

Выражения (3.2), (3.3), (2.13), (3.4) являются общими решениями поставленной задачи.

Если слой жидкости имеет такую относительную глубину, при которой величинами ε^{-p} $(p\geqslant 6)$ можно пренебречь, то из (2.8) и (2.9) следует:

$$a_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+\frac{0.437}{\pi\varepsilon^3}-\frac{0.194}{\pi\varepsilon^5}\right), \quad a_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{0.065}{\pi\varepsilon^5}, \quad a_n=0 \ (n\geqslant 2)$$

4. Большой практический интерес представляет задача о колебаниях штампа, находящегося на поверхности заполненного жидкостью полупространства $-\infty<\zeta\leqslant 0$, $0\leqslant\rho<\infty$. В этом случае из (2.9) находим $(\varepsilon\to\infty)$

$L_{m,n}=0$ ($m, n=0, 1, 2, \ldots$). Следовательно, (2.8) примет вид

$$a_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad a_n=0 \quad (n>0) \tag{4.1}$$

Введем новое значение относительной глубины жидкости ($\zeta_+=\varepsilon\zeta$, $\zeta_+=z/R$).

Используя общие решения (3.2), (3.3) и (3.4) при указанных значениях коэффициентов (4.1) и сохраняя за относительной координатой прежнее обозначение ζ, получаем

$$\varphi(\rho,\zeta,t)=\frac{R\dot{w}(t)}{2\sqrt{\pi}\zeta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(2+2k)F(-k,-1.5-k;\,1;\,\rho^2)}{4^k k!\,\Gamma(2.5+k)\zeta^{2k}} \tag{4.2}$$

$$(0\leqslant\rho<\infty, \quad -\infty<\zeta<0, \quad t\geqslant 0)$$

$$\varphi(\rho,0,t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}R\dot{w}(t)F(1,-0.5;\,1;\,\rho^2) & (0\leqslant\rho<1, \quad t\geqslant 0)\\ 0 & (\rho\geqslant 1, \quad t\geqslant 0)\end{cases} \tag{4.3}$$

$$m_+={}^4/_3\gamma R^3 \tag{4.4}$$

Сравнивая зависимости (3.4) и (4.4), заключаем, что присоединенная масса жидкости при колебаниях штампа на жидком слое больше, чем присоединенная масса при его колебаниях на жидком полупространстве. Такой результат влияния дополнительных неподвижных границ жидкого объема, ограничивающих и, следовательно, затрудняющих движение жидких масс, применительно к другим расчетным схемам хорошо известен [3, 5, 23–26].

5. Помимо классических гидродинамических прикладных задач к рассмотренной постановке могут быть сведены динамические контактные задачи, в которых основанием является любая сплошная среда, находящаяся при очень больших температурах и давлениях и, как показывают экспериментальные данные и подтверждают общие физические соображения, практически обладающая свойствами идеальной жидкости [27]. К указанной постановке могут быть сведены также контактные задачи для штампов, опирающихся на водонасыщенные основания.

Следует отметить еще одно не менее важное приложение рассмотренных здесь задач. Слой или полупространство, заполненные идеальной несжимаемой жидкостью, в самом общем случае можно рассматривать как динамический аналог гидростатической модели упругого основания (модель Винклера). Естественно такую модель назвать гидродинамической, поскольку пренебрежение инерционными свойствами основания приводит, как будет показано далее, к результатам, получаемым в рамках гидростатической модели.

Особенностью гидродинамической модели упругого основания является (что особенно важно при решении динамических задач) наличие помимо упруговосстанавливающей силы, совпадающей по существу с выталкивающей архимедовой силой, инерционного сопротивления телу, генерирующему движение системы. Интегральной характеристикой этого сопротивления является присоединенная масса основания.

Другая особенность гидродинамической модели состоит в возможности несложного определения динамических напряжений в произвольных точках основания, обладающего в отличие от гидростатической модели распределительными свойствами.

В связи с изложенным представляет интерес распределение контактных напряжений в основании штампа, которые имеют вид

$$\sigma_z(\rho,t)=\sigma_z{}^\circ+\sigma_z{}^*(\rho,t)\qquad(0\leqslant\rho\leqslant1,\ t\geqslant0)\tag{5.1}$$

где $\sigma_z{}^\circ$ — статическая (безынерционная), а $\sigma_z{}^*(\rho, t)$ — динамическая (инерционная) составляющие напряжений

$$\sigma_z{}^\circ=\gamma g[w_0+w(t)],\quad w_0=\frac{M}{\pi\gamma R^2}\quad(t\geqslant0);\quad\sigma_z{}^*(\rho,t)=-\gamma\varphi(\rho,0,t)\tag{5.2}$$

Для гидродинамического слоя

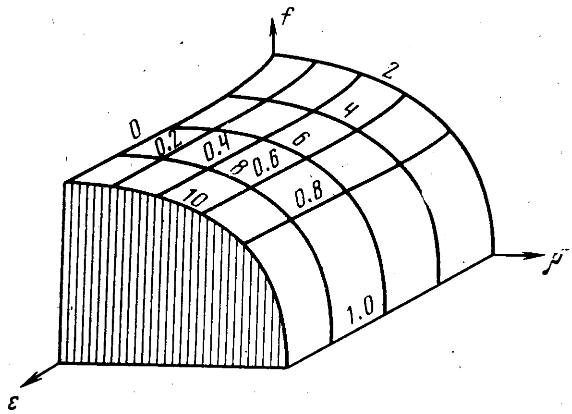
$$\sigma_z{}^*(\rho,t)=-\frac{\gamma R\ddot w(t)}{\sqrt2}\sum_{n=0}\frac{a_n n!}{\Gamma(n+1.5)}F(1+n,-0.5-n;1;\rho^2)\qquad(0\leqslant\rho\leqslant1,\ t\geqslant0)$$

Для гидродинамического полупространства

$$\sigma_z{}^*(\rho,t)=-\frac{2\gamma R\ddot w(t)}{\pi}F(1,-0.5;1;\rho^2)\qquad(0\leqslant\rho\leqslant1,\ t\geqslant0)\tag{5.3}$$

Здесь w_0 — осадка штампа в положении статического равновесия.

В отличие от статической составляющей контактного напряжения, которая равномерно распределена по площади основания штампа, одинакова



для слоя и полупространства и не зависит от высоты слоя, динамическая составляющая существенно зависит от высоты слоя, частоты собственных колебаний системы и положения точки, в которой определяется напряжение (см. фигуру, где $f=\pi\sigma_z{}^*(\rho,\ t)/2\gamma R|\ddot w(t)|$). Наибольшего значения $\sigma_z{}^*(\rho, t)$ достигает в центре основания штампа, убывая до нуля при $\rho\to1$. При $\varepsilon\geqslant2$ динамическая составляющая контактных напряжений весьма слабо зависит от высоты слоя, поэтому для такого слоя с высокой степенью точности можно использовать формулу (5.3), справедливую для штампа, лежащего на гидродинамическом полупространстве.

Укажем, что выражение для определения нормальных напряжений в произвольных точках основания имеет вид

$$\sigma_z(\rho,\zeta,t)=-\gamma\varphi(\rho,\zeta,t)\qquad(\rho\geqslant0,\ \zeta\leqslant0,\ t\geqslant0)\tag{5.4}$$

где для потенциала скоростей используются полученные ранее зависимости (3.2), (3.3), (4.2), (4.3). Эти напряжения существенно зависят от координаты ζ рассматриваемой точки и, как нетрудно установить из указанных зависимостей, быстро затухают с возрастанием глубины.

Рассмотрим пример. Пусть к штампу ($\varepsilon \geqslant 2$) приложен единичный импульс $q(t)=\delta(t)$ $(t \geqslant 0)$, где $\delta(t)$ – δ-функция Дирака. Тогда из (2.13), (5.3) следует

$$w(t)=\frac{\sin \omega t}{(M+m)\omega}, \quad \sigma_{z^*}(0,t)=\frac{2\gamma R\omega}{\pi(M+m)}\sin \omega t \quad (t \geqslant 0) \tag{5.5}$$

Если пренебречь инерционными свойствами гидродинамической модели, то в первом решении (5.5) следует положить $m=0$, $\omega=\omega^*$, второе решение при этом исчезает (см. (5.3)) и результаты совпадают с тривиальными решениями в рамках гидростатической модели Винклера.

Поступила 24 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости. Избр. соч., т. 1, М.– Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Седов Л. И.* Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1934, вып. 187.
3. *Келдыш М. В.* Удар пластинки о воду, имеющую конечную глубину. Тр. ЦАГИ, 1935, вып. 152.
4. *Лаврентьев М. А., Келдыш М. В., Маркушевич А. И., Седов Л. И., Лотов А. Б.* Сборник статей по вопросам удара о поверхность воды. Тр. ЦАГИ, 1935, вып. 152.
5. *Риман И. С., Крепс Р. Л.* Присоединение массы тел различной формы. Тр. ЦАГИ, 1947, вып. 635.
6. *Келдыш М. В., Седов Л. И.* Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике. М., «Наука», 1964.
7. *Галин Л. А.* Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ, 1947, т. 11, вып. 5.
8. *Логвинович Г. В.* Удар твердого тела о сжимаемую жидкость. Тр. ЦАГИ, 1956, вып. 688.
9. *Ворович И. И., Юдович В. И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
10. *Чебаков М. И.* Удар круглого диска о жидкость малой глубины. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
11. *Гусейн-Заде М. И.* Удар по бесконечной пластинке, лежащей на упругом жидком полупространстве. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 3.
12. *Красильников В. Н.* О возбуждении изгибно-гравитационных волн. Акуст. ж., 1962, т. 8, вып. 1.
13. *Красильников В. Н.* Рефракция изгибных волн. Акуст. ж., 1962, т. 8, вып. 1.
14. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова. Л., Гидрометеоиздат, 1967.
15. *Красильников В. Н.* О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
16. *Ростовцев Д. М.* Удар по упругому контуру, плавающему на поверхности несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
17. *Ростовцев Д. М.* Гидроупругие колебания балки, плавающей на поверхности несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
18. *Снеддон И. Н.* Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
19. *Tranter C. J.* On some dual integral equations occurring in potential problems with axial symmetry. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, vol. 3, No. 4.
20. *Tranter C. J.* A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, No. 3.
21. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
22. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1968.
23. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.– Л., Гостехиздат, 1950.
24. *Гуревич М. И.* Удар плоской пластинки о жидкость, наполняющую канал в форме полуцилиндра. ПММ, 1939, т. 3, вып. 2.
25. *Гершунов Е. М.* Присоединенная масса жидкости при колебаниях балки, лежащей под слоем жидкости. Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 3.
26. *Гершунов Е. М.* Колебания круглой пластинки под слоем жидкости. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 4.
27. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.