

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КРИТЕРИЯ ОТРЫВА  
ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Н. М. БЕЛЯНИН

(Москва)

Для оценки возможности возникновения отрыва двумерного пограничного слоя можно использовать критерий отрыва, т. е. определенное соотношение между параметрами внешнего потока и пограничного слоя [1]. Функциональный вид критерия отрыва получен и для трехмерного пограничного слоя [2] на основании теории размерности. Как и в случае двумерного пограничного слоя, для определения конкретной величины критерия отрыва в зависимости от значения определяющих параметров могут быть использованы локально-автомодельные решения.

Локально-автомодельные решения уравнений двумерного ламинарного пограничного слоя в точке отрыва найдены для совершенного газа при линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры ( $\omega=1$ ) и числе Прандтля  $P=1$  [3, 4]. Для этого случая изучено влияние вдува и отсоса [5]. Получены автомодельные решения при  $\omega=1$ ,  $P=0.723$  для предельного случая гиперзвукового течения совершенного газа [6]. Локально-автомодельные решения уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя в точке отрыва для совершенного газа при  $\omega=1$ ,  $P=1$  приведены в [7]. Подробные расчеты при  $\omega \neq 1$ ,  $P \neq 1$  отсутствуют, однако результаты расчета нескольких примеров для двумерного течения [8] показывают, что влияние реальных свойств газа может быть значительным и должно учитываться.

В настоящей работе найдены автомодельные решения уравнений двумерного и трехмерного пограничных слоев в точке отрыва для совершенного газа со степенной зависимостью коэффициента вязкости от энтальпии ( $\omega=0.5, 0.75, 1.0$ ) при различных значениях числа Прандтля ( $P=0.5, 0.7, 1.0$ ) в широком диапазоне изменения скорости внешнего потока ( $v_1^2/2h_1^* = 0-0.99$ ) и температуры обтекаемой поверхности. На основании этих данных получены величины критерия отрыва для ламинарного пограничного слоя.

1. Выберем следующую систему координат: ось  $x$  совпадает с направлением  $\text{grad } p_1$  во внешнем потоке, ось  $z$  направлена вдоль изобары внешнего потока, а ось  $y$  ортогональна обтекаемой поверхности. В переменных

$$\xi = \int_0^x \rho_1 \mu_1 u_1 dx, \quad \eta = \frac{u_1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy$$

локально-автомодельные течения в трехмерном ламинарном пограничном слое совершенного газа описываются уравнениями

$$(1.1) \quad (Nf'')' + ff'' + \beta [g - (1-W)f'^2 - W\varphi^2] = 0$$

$$(1.2) \quad (N\varphi')' + f\varphi' = 0$$

$$(1.3) \quad \left( \frac{N}{P} g' \right)' + fg' - 2 \left[ \frac{N}{P} (1-P) (Uf'f'' + W\varphi\varphi') \right]' = 0$$

$$f = \int_0^\eta \frac{u}{u_1} d\eta, \quad \varphi = \frac{w}{w_1}, \quad g = \frac{h^*}{h_1^*}, \quad \beta = \frac{h_1^*}{h_1} \frac{2\xi}{u_1} \frac{du_1}{d\xi}$$

$$N = \frac{\rho\mu}{\rho_1\mu_1} \quad U = \frac{u_1^2}{2h_1^*} \quad W = \frac{w_1^2}{2h_1^*}, \quad V = \frac{v_1^2}{2h_1^*} = U + W$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной  $\eta$ .

Здесь  $u$ ,  $w$  — проекции скорости на оси  $x$  и  $z$ ;  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $h^*$  — плотность, коэффициент вязкости и энтальпия заторможенного потока; индексом 1 обозначены параметры внешнего потока. Предполагается, что выполняются необходимые условия автомодельности ( $u_1 = \text{const}$ ,  $w_1 = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ ), а свойства газа зависят лишь от энтальпии.

Граничные условия имеют вид

$$(1.4) \quad f(0) = f'(0) = \varphi(0) = 0, \quad (1-\lambda)g'(0) + \lambda g(0) = \lambda g_w$$

$$(1.5) \quad f'(\infty) = \varphi(\infty) = g(\infty) = 1$$

причем при обтекании теплоизолированной поверхности  $\lambda = 0$ , а при обтекании поверхности с заданной температурой  $\lambda = 1$ .

Составляющие напряжения трения и тепловой поток к стенке определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \tau_x &= \rho_w \mu_w u_1^2 f''(0) / \sqrt{2\xi} \\ \tau_z &= \rho_w \mu_w u_1 w_1 \varphi'(0) / \sqrt{2\xi} \\ q &= \rho_w \mu_w u_1 h_1^* g'(0) / P_w \sqrt{2\xi} \end{aligned}$$

причем индексом  $w$  обозначены параметры на стенке.

Необходимые условия отрыва, сформулированные в работе [2], в рассматриваемой системе координат принимают вид  $\tau_x = 0$ ,  $u_1 > 0$ , т. е. автомодельные отрывные течения возможны лишь в тех случаях, когда во внешнем потоке вектор скорости  $v_1$  образует острый угол с вектором  $\text{grad } p_1$  и значение параметра  $\beta$  таково, что выполняется дополнительное граничное условие

$$(1.6) \quad f''(0) = 0$$

Величина критерия отрыва  $\xi^\circ$ , введенного в работе [2] соотношением

$$\xi^\circ = \frac{dp_1}{dx} \frac{\delta^{**2}}{\mu_1 u_1}$$

может быть определена после того, как найдено решение системы уравнений (1.1)–(1.3) с граничными условиями (1.4)–(1.6) по формуле

$$\xi^\circ = -\beta(1-V)\Theta^2, \quad \Theta = \rho_1 u_1 \delta^{**} / \sqrt{2\xi} = \int_0^\infty f'(1-f') d\eta$$

Здесь  $\delta^{**}$  и  $\Theta$  — размерная и безразмерная толщины потери импульса.

Как параметры автомодельного отрывного течения, так и величина критерия отрыва зависят от определяющих параметров  $U$ ,  $W$ ,  $g_w$  и вида зависимостей  $P(h)$ ,  $N(h)$ . Если число Прандтля постоянно, а зависимость коэффициента вязкости от энтальпии принята степенной с показателем  $\omega$ , то система определяющих параметров состоит из пяти величин ( $U$ ,  $W$ ,  $g_w$ ,  $P$ ,  $\omega$ ).

2. При заданном  $\beta < 0$  граничные условия (1.4), (1.5) не определяют решение однозначно [3, 4]. Аналогичная неоднозначность возникает и в точке отрыва, где выполняется дополнительное условие (1.6), а величина  $\beta$  является искомой. Для устранения неопределенности предложены дополнительные условия, которые сводятся к требованию отсутствия в асимптотическом разложении медленно затухающего алгебраического члена [4, 7]. Так как при проведении численных расчетов обычно используются некоторые следствия отсутствия алгебраического члена, то точность найденного решения определяется как точностью метода интегрирования, так и точностью отбора нужного решения. Для устранения ошибки, связанной с отбором решений, целесообразно при построении метода расчета непосредственно применять

асимптотические разложения для формулировки граничных условий при некотором конечном значении переменной  $\eta_0$ , являющемся верхним пределом интегрирования. Следует ожидать, что такой подход позволит уменьшить значение  $\eta_0$  и количество расчетных точек, так как при  $\eta > \eta_0$  поведение решения приближенно описывается асимптотическими разложениями и не требуется высокая точность вычисления для устранения быстро растущих составляющих решения.

Асимптотические разложения решений системы (1.1)–(1.3) при  $P=1$  известны [4, 7]. Асимптотические разложения при  $P \neq 1$  находились из линеаризованных уравнений системы (1.1)–(1.3) в виде произведения экспоненциальной функции, степенной функции и ряда по степеням  $1/z^2$ , где  $z = \eta - k$ ,  $k = \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - j)$  — некоторая постоянная величина

$$\begin{aligned} f' &= 1 - A_1 Z_1 z^{-n} (1 + a_1 z^{-2} + \dots) - D z^s (1 + c_1 z^{-2} + \dots) - \\ &- (A_3 - 2UA_1 - 2WA^2) Z_2 z^{-(m+2)} (b_1 + b_2 z^{-2} + \dots) \\ \varphi &= 1 - A_2 Z_1 (1 - z^{-2} + \dots) \\ g &= 1 - 2UA_1 Z_1 z^{-n} (1 + a_2 z^{-2} + \dots) - D c_2 z^{s-2} (1 + \dots) - \\ &- 2WA_2 Z_1 (1 - z^{-2} + \dots) - (A_3 - 2UA_1, -2WA_2) Z_2 z^{-m} (1 + b_3 z^{-2} + \dots) \\ Z_1 &= z^{-1} \exp(-z^2/2), \quad Z_2 = z^{-1} \exp(-Pz^2/2) \\ n &= 2\beta(1-V), \quad m = 2\beta U, \quad s = 2\beta(1-W) \\ a_1 &= -[(1+n)(2+n) - nmP/(1-P)]/2, \quad a_2 = a_1 - nP/(1-P) \\ b_1 &= \beta/P(1-P), \quad b_3 = -[(1+m)(2+m) + m(n-2)/(1-P)]/2P \\ b_2 &= b_1 [b_3 - (5+2m)/P + (2-n)/P(1-P)] \\ c_2 &= 2U(1-P)s(s-1)/(s-2), \quad c_1 = [s(s-1) + c_2\beta]/2 \end{aligned}$$

Так же как и при  $P=1$ , найденные асимптотические разложения, удовлетворяющие граничным условиям (1.5), содержат шесть неизвестных постоянных ( $k, A_1, A_2, A_3, D, \beta$ ), для определения которых могут быть использованы лишь пять граничных условий (1.4), (1.6). Отсутствие медленно убывающего с ростом  $\eta$  алгебраического члена соответствует случаю  $D=0$ , и тогда решение определяется однозначно.

Решение системы (1.1)–(1.3) с граничными условиями (1.4)–(1.6) можно найти следующим образом. Задаем значения  $\beta, \varphi'(0), g(0)$  (при  $\lambda=0$ ) или  $g'(0)$  (при  $\lambda=1$ ) и методом Рунге – Кутты интегрируем уравнения от 0 до некоторого значения  $\eta^*$ , затем задаем  $k, A_1, A_2, A_3$ , вычисляем при  $\eta_0$  ( $\eta_0$  — некоторое достаточно большое значение переменной  $\eta$ ) с помощью асимптотических разложений значения  $f, f', f'', \varphi, \varphi', g, g'$  и методом Рунге – Кутты интегрируем уравнения от  $\eta_0$  до  $\eta^*$ . Условия совпадения полученных интегральных кривых при  $\eta^*$  представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\beta, k, A_1, A_2, A_3, \varphi'(0), g(0)$  или  $g'(0)$ , решение которой находится методом Ньютона. Использование двух интервалов интегрирования уменьшает степень нелинейности системы алгебраических уравнений и ограничивает возможность возникновения быстро растущих составляющих решения.

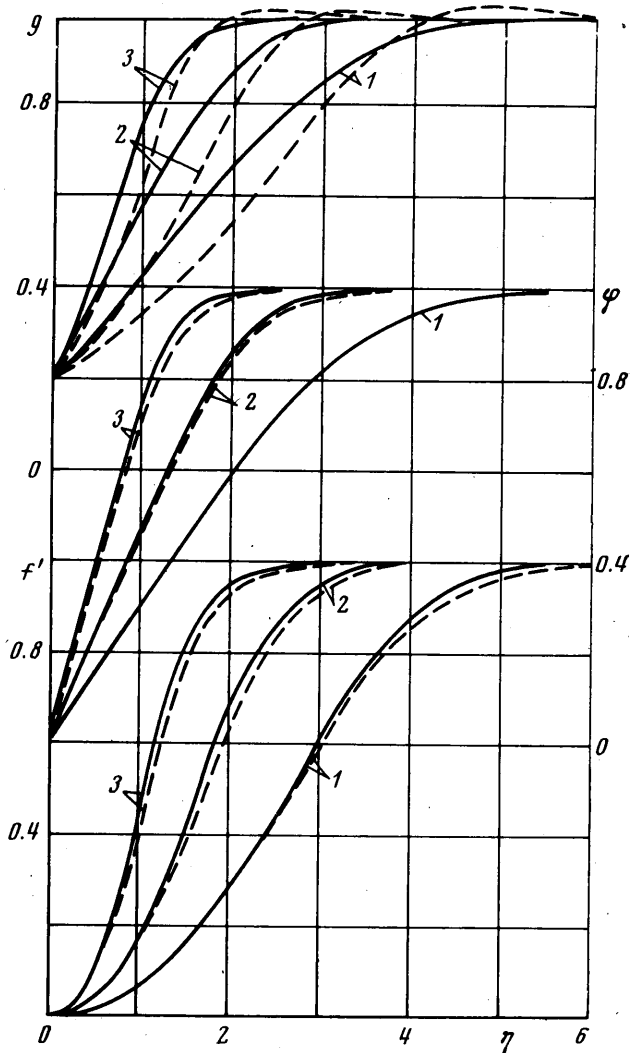
Как показали методические расчеты, для получения параметров отрывного течения с четырьмя верными знаками достаточно решение системы алгебраических уравнений находить с точностью  $10^{-4}$ , величину шага интегрирования  $\Delta\eta$  выбрать равной 0.2 для  $g(0) \leq 1$  и 0.1 для  $g(0) > 1$ , а верхнюю границу интервала численного интегрирования  $\eta_0$  определять из условия, что отличие от 1 величин  $f'(\eta_0), \varphi(\eta_0)$   $g(\eta_0)$  не превышает  $5 \cdot 10^{-4}$ .

В качестве примера ниже приведено сравнение полученных при различном шаге интегрирования результатов с имеющимися данными для автомоделного отрывного течения двумерного пограничного слоя при  $\omega=1, P=1, g(0)=0.2$  ( $n$  — число расчетных точек по толщине пограничного слоя).

$n$	—	200	1000	250	200	72	36	18	9
$\Delta\eta$	—	0.1	0.01	0.036	0.036	0.1	0.2	0.4	0.8
$-\beta \cdot 10^5$	30 880	30 888	30 862	30 862	30 865	30 859	30 862	30 861	30 868
$g'(0) \cdot 10^5$	22 160	22 618	22 601	22 601	22 602	22 600	22 600	22 600	22 589
$\theta \cdot 10^6$	62 740	62 833	62 782	—	—	62 791	62 788	62 793	64 701
Источ- ник	[4]	[5]	[6]	[8]	[8]	данная работа			

3. Систематические расчеты проводились для определения параметров в точке отрыва трехмерного ламинарного пограничного слоя совершенного газа со степенной зависимостью вязкости от энтальпии ( $\omega=0.5, 0.75, 1$ ) и постоянным числом Прандтля ( $P=0.5, 0.7, 1$ ) при  $g(0)=0.5-2, V=0-0.99$ .

На фиг. 1 приведены характерные распределения скорости и энтальпии в точке отрыва для случая, когда вектор скорости и вектор градиента во внешнем потоке образуют угол  $\sim 45^\circ$  ( $U=0.49$ ,  $W=0.5$ ), а  $g(0)=0.2$ . Сплошные линии соответствуют  $P=1$ , а пунктирные —  $P=0.5$ . Кривые 1, 2, 3 вычислены при  $\omega=1, 0.75, 0.5$ . Профиль составляющей скорости в направлении изменения давления и профиль энтальпии имеют такую же форму.



Фиг. 1

как и в точке отрыва двумерного пограничного слоя. Профиль составляющей скорости в направлении изобары имеет форму, характерную для безградиентного течения. Деформация профилей скорости при изменении числа  $P$  оказывается незначительной. Более существенно деформируется профиль энтальпии из-за влияния диссипативного члена в уравнении энергии. Как профили скорости, так и профиль энтальпии сильно зависят от закона изменения коэффициента вязкости. Аналогичное влияние наблюдается и для двумерного течения. Это свидетельствует о том, что сжимаемость и свойства газа играют более существенную роль в формировании

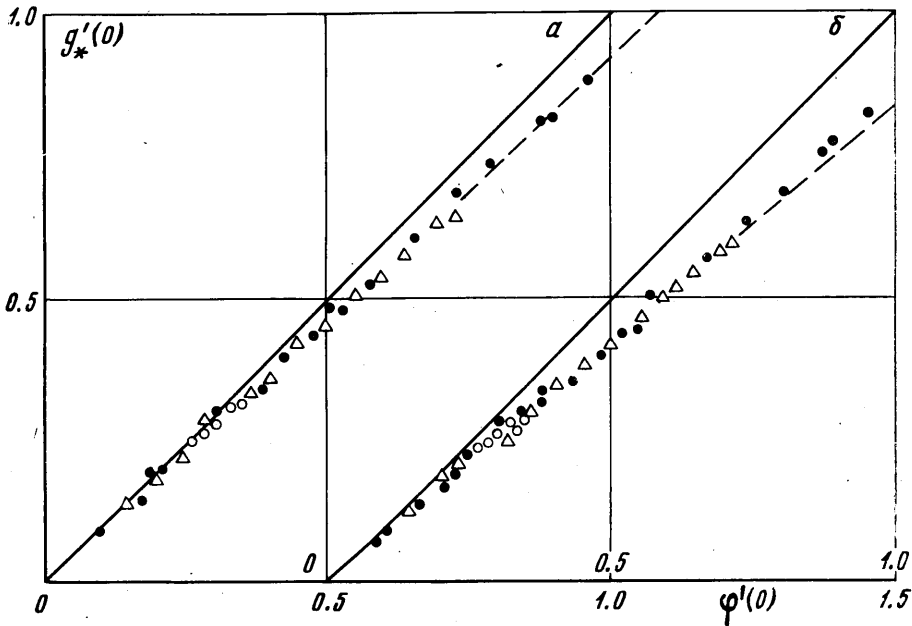
профилей ламинарного пограничного слоя, чем наличие течения в направлении изобары внешнего потока.

Введем в точке отрыва трехмерного пограничного слоя коэффициент трения и число Стантона

$$c_f = 2\tau_z / \rho_1 u_1 w_1 = 2\rho_w \mu_w \varphi'(0) / \rho_1 \sqrt{2\xi}$$

$$St = q / \rho_1 u_1 h_1 * [g_e - g(0)] = \rho_w \mu_w g_*'(0) / \rho_1 P \sqrt{2\xi}$$

Здесь  $g_* = [g - g(0)] / [g_e - g(0)]$ ,  $g_e$  — безразмерная равновесная энтальпия, определяемая при обтекании теплоизолированной стенки. При  $P=1$ ,  $g_e=1$  выполняется равенство  $g_*'(0) = \varphi'(0)$ , как следует из подобия урав-



Фиг. 2

нений (1.2), (1.3) и совпадения граничных условий для функций  $\varphi$  и  $g_*$ . В этом случае справедлива аналогия Рейнольдса  $St = c_f / 2$ .

Результаты расчетов зависимости  $g_*'(0)$  от  $\varphi'(0)$  при различных значениях  $U$ ,  $W$ ,  $g(0)$  приведены на фиг. 2 (а —  $P=0.7$ , б —  $P=0.5$ ) светлыми точками ( $\omega=1$ ), треугольниками ( $\omega=0.75$ ) и темными точками ( $\omega=0.5$ ). Эти данные удовлетворительно описываются соотношением

$$g_*'(0) = \varphi'(0) P^{1/2}$$

(пунктирные прямые на фиг. 2), из которого следует справедливость обобщенной аналогии Рейнольдса

$$St = c_f P^{-3/4} / 2$$

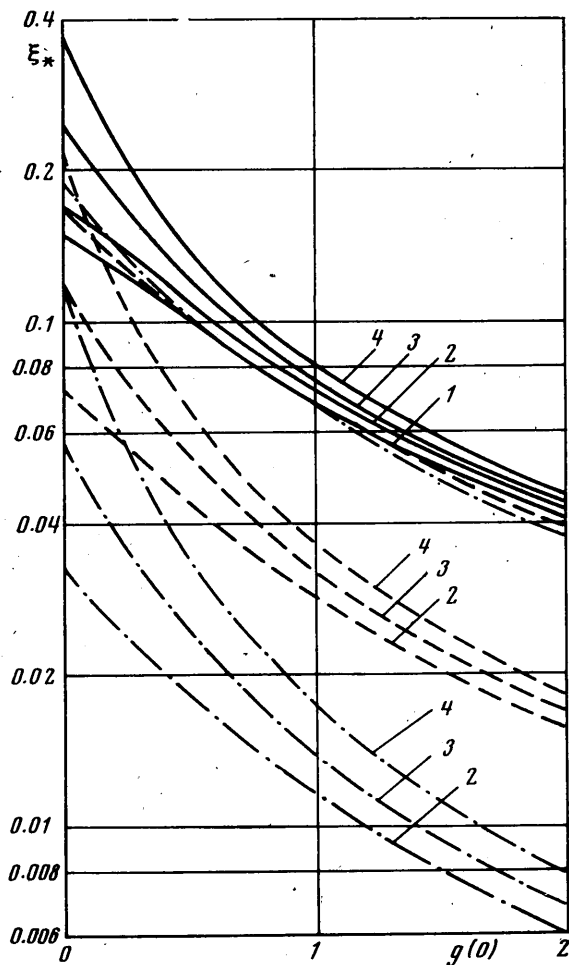
Результаты расчетов величины критерия отрыва  $\xi^o$  представлены на фиг. 3 в виде зависимости величины

$$\xi_* = \xi^o / (1 - V) = -\beta \Theta^2$$

от параметра  $g(0)$  при  $P=0.7$  для  $\omega=1$  (сплошные кривые),  $\omega=0.75$  (пунктирные кривые),  $\omega=0.5$  (штрихпунктирные кривые) и различных

значений параметров  $U, W$ :  $U=0.01, W=0$  (кривые 1),  $U=0.99, W=0$  (кривые 2),  $U=0.49, W=0.5$  (кривые 3),  $U=0, W=0.99$  (кривые 4).

Основные особенности полученных результатов заключаются в следующем. Нагревание обтекаемой поверхности во всех рассмотренных случаях приводит к существенному снижению величины  $\xi_*$ . Очень сильное влияние на величину критерия отрыва оказывает закон зависимости коэффициента вязкости от энтальпии, особенно при гиперзвуковых скоростях внешнего потока, когда уменьшение показателя степени от 1 до 0.5 вызы-



Фиг. 3

вает снижение величины  $\xi_*$  почти на порядок (фиг. 3). Это обстоятельство является очень важным, так как оно накладывает определенные ограничения на возможность использования при анализе течений газа с реальными свойствами многочисленных результатов, полученных для двумерных отрывных течений при линейной зависимости вязкости от энтальпии. Значение числа  $P$  слабо влияет на величину критерия отрыва. Наличие составляющей скорости в направлении изобары существенно проявляется лишь при обтекании сильно охлажденной поверхности и вызывает увеличение критерия отрыва, особенно заметное при гиперзвуковых скоростях и  $\omega < 1$  (фиг. 3)

Поступила 2 VI 1973

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
2. Бам-Зеликович Г. М. О критериях отрыва трехмерного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
3. Hartree D. R. On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1937, vol. 33, pt 1, 2.
4. Cohen C. B., Reshotko E. Similar solutions for compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. Nat. Advis. Communs Aeronaut., 1956, Rept. 1293.
5. Фокс Х., Сэлленд Х. Автомодельные решения уравнений ламинарного пограничного слоя, учитывающие отрыв. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 4.
6. Rogers D. F. Reverse flow solutions for compressible laminar boundary-layer equations. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 3.
7. Башкин В. А. Расчет уравнений автомодельного пространственного ламинарного пограничного слоя методом квазилинеаризации. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
8. Уортман А., Миллс А. Автомодельное решение для области отрыва ламинарных пограничных слоев. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 12.