МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1975

УДК 532.526

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ СИЛЬНОМ ВДУВЕ

Э. А. ГЕРШБЕЙН

*(Москва)*

Асимптотическим методом внешних и внутренних разложений исследуется течение многокомпонентного газа в пространственном пограничном слое на гладких затупленных телах при наличии интенсивного вдува. Получены асимптотические формулы для коэффициентов трения, тепловых и диффузионных потоков компонент на поверхности тела, а также для профилей скоростей, температуры и концентраций компонент поперек слоя вдуваемых газов. Показано, что при сильном вдуве предельные (донные) линии тока на поверхности тела в первом приближении совпадают с векторными линиями градиента давления.

Исследование интенсивного вдува в рамках теории пограничного слоя в случае плоского или осесимметричного течений проводилось в [1–8]. При этом показывается, что при обтекании плоской пластинки с нулевым градиентом давления решение уравнений Прандтля существует только до некоторого параметра вдува [1, 2]. При отрицательных градиентах давления решение данных уравнений существует при сколь угодно больших параметрах вдува [2].

Пространственное течение в пограничном слое при наличии сильного вдува рассматривалось в работах [9–11] – окрестность критической точки двоякой кривизны – и в работе [12] – окрестность критической линии бесконечного цилиндра, обтекаемого под углом скольжения.

1. Уравнения трехмерного ламинарного многокомпонентного частично ионизованного пограничного слоя имеют следующий вид [13–16]:

$$L_0[v]\equiv\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\rho\left(\frac{g}{g_{11}}\right)^{1/2}u\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\rho\left(\frac{g}{g_{22}}\right)^{1/2}w\right]+g^{1/2}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\rho v)=0 \tag{1.1}$$

$$L_1[u]\equiv\rho(\mathrm{D}u+A_1u^2+A_2w^2+A_3uw)-A_4=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)$$

$$L_2[w]\equiv\rho(\mathrm{D}w+B_1u^2+B_2w^2+B_3uw)-B_4=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)$$

$$L_3[T]\equiv c_p\rho\mathrm{D}T+\sum_{i=1}^{N}h_i\dot w_i=D_{\xi\eta}p-\frac{\partial q}{\partial\zeta}-\sum_{i=1}^{N}c_{pi}I_i\frac{\partial T}{\partial\zeta}+$$

$$+\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2+2\cos\psi\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right]$$

$$L_4[C_i]\equiv\rho\,\mathrm{D}C_i-\dot w_i=-\frac{\partial}{\partial\zeta}I_i\quad(i=1,\ldots,N)$$

$$q=-\lambda\frac{\partial T}{\partial\zeta}+RT\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{m_im_jC_j}\frac{S_{ij}}{S_j^T}(C_iI_j-C_jI_i)$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}I_j=\mu\left[\frac{\partial (C_i m)}{\partial \zeta}+T_i\frac{\partial}{\partial \zeta}(\ln T)\right]\qquad (i=1,\ldots,N)$$

$$p=\rho RT\sum_{i=1}^{N}\frac{C_i}{m_i},\qquad \sum_{i=1}^{N}C_i=1,\qquad \sum_{i=1}^{N}I_i=0,\qquad S_{ij}=\frac{\mu}{\rho D_{ij}}$$

$$D_{\xi\eta}\equiv\frac{u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{w}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial \eta},\qquad D\equiv D_{\xi\eta}+v\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$A_{ii}=-\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij},\qquad A_{ij}=\frac{m_i}{m_j}\alpha_{ji}+e_i^*\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_{jk}}{m_j}(e_k-e_j)$$

$$T_i=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}|S_j^T,\qquad \alpha_{ij}=\frac{m^2}{m_j}C_jS_{ij},\qquad e_i^*=-e_iC_i\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{e_k^2C_k}{m}\right]^{-1}$$

Здесь $\xi$, $\eta$ — произвольные криволинейные координаты, выбираемые на поверхности тела, координата $\zeta$ направлена по нормали к телу; $u$, $v$, $w$ — составляющие скорости соответственно в направлениях $\xi$, $\zeta$, $\eta$; $p$, $\rho$, $T$, $\lambda$, $\mu$ — соответственно давление, плотность, температура, коэффициент теплопроводности и коэффициент вязкости смеси газов, состоящей из $N$ химических компонент; $C_i$, $m_i$, $I_i$, $e_i$, $h_i$, $\dot{w}$, $D_i^T$ — соответственно концентрация, молекулярный вес, диффузионный поток, заряд, удельная энтальпия, скорость образования, коэффициент термодиффузии $i$-й компоненты; $S_{ij}$ и $S_i^T$ — обычное и термодиффузионное числа Шмидта; $\cos\psi=g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}}$, $g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2$. Элемент длины на поверхности тела выражается формулой

$$ds^2=g_{11}d\xi^2+2g_{12}d\xi d\eta+g_{22}d\eta^2$$

Коэффициенты $A_i$, $B_i$ ($i=1, 2, 3$) выражаются через метрические коэффициенты. Их вид приведен в работе [15]

$$A_4=-\frac{g_{22}\sqrt{g_{11}}}{g}\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{g_{12}\sqrt{g_{11}}}{g}\frac{\partial p}{\partial \eta}$$

$$B_4=-\frac{g_{11}\sqrt{g_{22}}}{g}\frac{\partial p}{\partial \eta}+\frac{g_{12}\sqrt{g_{22}}}{g}\frac{\partial p}{\partial \xi}$$

В случае ортогональной системы координат на поверхности тела

$$A_2=-B_3=-\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial \xi},\qquad A_3=-B_1=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial \eta}\tag{1.2}$$

$$A_1=B_2=0,\qquad A_4=-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial p}{\partial \xi},\qquad B_4=-\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial p}{\partial \eta},\qquad g_{12}=0$$

Будем рассматривать обтекание гладких затупленных тел. Граничные условия на внешней границе пограничного слоя обычные

$$u\to u_e(\xi,\eta),\quad w\to w_e(\xi,\eta),\quad T\to T_e(\xi,\eta)\tag{1.3}$$
$$C_i\to C_{ie}(\xi,\eta)\quad (i=1,\ldots,N)\quad (\zeta\to\infty)$$

Граничные условия на поверхности тела запишем в виде

$$(1.4)\qquad \begin{gathered} u=w=0,\quad \rho v=G(\xi,\eta),\quad \rho v(C_i-C_i^{(1)})+I_i=\dot\rho_i\quad (i=1,\ldots,N)\\ T=T_w(\xi,\eta)\quad (\zeta=0)\end{gathered}$$

Здесь $C_i^{(1)}(\xi,\eta)$ — концентрация $i$-й компоненты во вдуваемом газе, $\dot\rho_i$ — скорость образования $i$-й компоненты за счет гетерогенных реакций.

2. В пристеночной области пограничного слоя введем новые безразмерные независимые и зависимые переменные по формулам

$$(2.1)\qquad \begin{gathered} s=ls',\quad ds'^2=g_{11}'d\xi'^2+2g_{12}'d\xi'd\eta'+g_{22}'d\eta'^2,\quad \zeta=\delta l\zeta'\\ u=Kv_\infty u',\quad w=Kv_\infty w',\quad v=v_w{}^*v',\quad p=\rho_\infty v_\infty{}^2p',\quad \rho=\rho_w{}^*\rho'\\ T=T_w{}^*T',\quad c_p=c_{pw}{}^*c_p',\quad h=c_{pw}{}^*T_w{}^*h',\quad G=\rho_w{}^*v_w{}^*G'\\ \mu=\mu_w{}^*\mu',\quad \lambda=\lambda_w{}^*\lambda',\quad \dot w_i=(\rho_wKv_\infty/l)\dot w_i',\quad \dot\rho_i=\rho_w{}^*v_w{}^*\dot\rho_i'\end{gathered}$$

$$A_i=\frac{A_i'}{l},\quad B_i=\frac{B_i'}{l}\quad (i=1,2,3),\quad A_4=\frac{\rho_\infty v_\infty{}^2}{l}A_4',\quad B_4=\frac{\rho_\infty v_\infty{}^2}{l}B_4'$$

$$I_i=\frac{\rho_wKv_\infty}{\delta\,\mathrm{Re}}I_i',\quad q=\frac{\rho_w{}^*c_{pw}{}^*T_w{}^*Kv_\infty}{\delta\,\mathrm{Re}}q'$$

$$K=\left(\frac{\rho_\infty}{\rho_w{}^*}\right)^{1/2},\quad \alpha=\frac{K^2v_\infty{}^2}{c_{pw}{}^*T_w{}^*}$$

$$\delta^2=\frac{\rho_w{}^*v_w{}^{*2}}{\rho_\infty v_\infty{}^2},\quad \mathrm{Re}=\frac{\rho_w{}^*Kv_\infty l}{\mu_w{}^*},\quad \varepsilon^2=\frac{1}{\delta^2\,\mathrm{Re}}$$

Здесь $l$ — характерный линейный размер, звездочки в индексах относятся к характерным значениям параметров, $\infty$ — к параметрам в набегающем потоке, $w$ — к параметрам на поверхности тела, $e$ — к параметрам на внешней границе пограничного слоя.

Подставляя (2.1) в систему уравнений (1.1), получаем (штрихи опускаем)

$$(2.2)\qquad L_0[v]=0,\quad L_1[u]=\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right),\quad L_2[w]=\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)$$

$$L_3[T]=\alpha D_{\xi\eta}p-\varepsilon^2\left\{\frac{\partial q}{\partial\zeta}+\sum_{i=1}^N c_{pi}I_i\frac{\partial T}{\partial\zeta}-\right.$$

$$\left.-\alpha\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2+2\cos\psi\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right]\right\}$$

$$L_4[C_i]=-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\zeta}I_i\qquad (i=1,\ldots,N)$$

$$q=\Lambda\frac{\partial T}{\partial\zeta}+\sum_{k=1}^N D_k\frac{\partial C_k}{\partial\zeta},\quad I_i=\Lambda_i\frac{\partial T}{\partial\zeta}+\sum_{k=1}^N D_{ik}\frac{\partial C_k}{\partial\zeta}\qquad (i=1,\ldots,N)$$

Последние соотношения получены путем разрешения соотношений Стефана — Максвелла относительно диффузионных потоков.

Граничные условия на внешней границе сохраняют вид. На поверхности тела получаем (штрихи опускаем)

$$(2.3)\qquad u=w=0,\quad \rho v=G(\xi,\eta),\quad T=T_w(\xi,\eta)$$
$$\rho v(C_i-C_i^{(1)})+\varepsilon^2 J_i=\dot\rho_i\qquad (i=1,\ldots,N)\qquad (\xi=0)$$

Задача (2.2), (1.3), (2.3) является сингулярной. Для ее решения используем метод внешних и внутренних разложений.

*Внешнее разложение*. Будем предполагать, что все заданные функции $p(\xi,\eta)$, $T_w(\xi,\eta)$, $G(\xi,\eta)$, $C_i^{(1)}(\xi,\eta)$, $A_i$, $B_i$ и т. д.— аналитические функции своих аргументов. Тогда в пристеночной области пограничного слоя при $\varepsilon$, стремящемся к нулю, параметры течения можно разложить в ряд по $\varepsilon^2$

$$(2.4)\qquad f_k(\xi,\eta,\zeta,\varepsilon)=f_{k0}(\xi,\eta,\zeta)+\varepsilon^2 f_{k2}(\xi,\eta,\zeta)+\ldots$$

где $f_k$ — любая из искомых функций.

Предполагается, что все эти функции и их производные в пристеночной области пограничного слоя порядка единицы.

Подставляя (2.4) в систему (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, получаем

$$(2.5)\qquad L[v_0]=0,\quad L_1[u_0]=0,\quad L_2[w_0]=0$$
$$L_3[T_0]=\alpha D_{\xi\eta}p,\quad L_4[C_i]=0\quad (i=1,\ldots,N)$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}(\rho_0u_2+\rho_2u_0)\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}(\rho_0w_2+\rho_2w_0)\right]+$$
$$+\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\rho_0v_2+\rho_2v_0)=0$$
$$\frac{u_0}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+\frac{w_0}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial u_2}{\partial\eta}+v_0\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}+\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+2A_1u_0+A_3w_0\right)u_2+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial u_0}{\partial\eta}+2A_2w_0+A_3u_0\right)w_2+v_2\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}=$$
$$=-\frac{\rho_2A_4}{\rho_0^2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu_0\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}\right)$$

. . . . . . . . . . .

Из рассмотрения системы (2.5) следует, что разложение решения в пристеночной области пограничного слоя в ряд по малому параметру $\varepsilon$ приводит к системе дифференциальных уравнений, порядок которых на единицу меньше порядка уравнений исходной системы. Следовательно, граничные условия на внешней границе пограничного слоя должны быть опущены. Граничные условия для системы уравнений (2.5) принимаем следующие: при $\zeta=0$

$$(2.6)\qquad u_0=w_0=0,\quad \rho_0v_0=G(\xi,\eta),\quad T_0=T_w(\xi,\eta)$$
$$\rho_0v_0(C_{i0}-C_i^{(1)})=\dot\rho_{i0}\qquad (i=1,\ldots,N)$$
$$u_2=w_2=T_2=0,\qquad \rho_0v_2+\rho_2v_0=0$$
$$\rho_0v_0C_{i2}+I_{i0}=\dot\rho_{i2}\qquad (i=1,\ldots,N)$$

. . . . . . . . . .

Здесь источниковый член $\dot\rho_i$ представлен в виде $\rho_i=\rho_{i0}+\varepsilon^2\rho_{i2}+\ldots$ В силу того что число граничных условий (2.6) в точности соответствует порядку уравнений системы (2.5), последняя может быть проинтегрирована независимо от условий на внешней границе пограничного слоя.

Решение внешней задачи (2.5), (2.6) для плоского или осесимметричного течений приведено в работах [4–8].

*Внутреннее разложение.* Внешнее решение в общем случае становится непригодным в окрестности контактной поверхности $\zeta=\zeta^*(\xi, \eta)$ в слое с толщиной порядка $\varepsilon$, где в уравнениях пограничного слоя следует сохранить члены с высшими производными [4–8].

Введем для этого слоя новые переменные по формулам

$$v'=\varepsilon v'', \quad \zeta'-\zeta'^*=\varepsilon\zeta'', \quad I_i''=\varepsilon I_i', \quad q''=\varepsilon q' \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в уравнения (2.2), получаем в первом приближении уравнения трехмерного ламинарного подвешенного пограничного слоя. Вид этих уравнений совпадает с видом уравнений (1.1), если в них формально заменить $v$ на $V$, где

$$V\equiv v+\frac{u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\zeta^*}{\partial\xi}+\frac{w}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\zeta^*}{\partial\eta} \tag{2.8}$$

Применяя известный принцип асимптотического сращивания внешнего и внутреннего разложений, получаем в первом приближении при $\varepsilon$, стремящемся к нулю, следующие граничные условия на границе подвешенного пограничного слоя, обращенной к поверхности тела

$$\begin{gathered} u\to u^-(\xi, \eta), \quad w\to w^-(\xi, \eta), \quad T\to T^-(\xi, \eta) \\ C_i\to C_i^-(\xi, \eta) \quad (i=1, \ldots, N) \quad (\zeta''\to-\infty) \end{gathered} \tag{2.9}$$

Значения величин $u^-$, $w^-$, $T^-$, $C_i^-$ $(i=1, \ldots, N)$ определяются на разделяющей поверхности тока из решения системы (2.5), (2.6) для первого приближения.

Граничные условия на внешней границе подвешенного пограничного слоя совпадают с условиями (1.3).

Уравнения подвешенного пограничного слоя с граничными условиями (1.3) и (2.9) определяют структуру этого слоя. Его положение определится условием $V=0$ при $\zeta''=0$.

3. Рассмотрим систему уравнений (2.5) с условиями (2.6). Разлагая (2.5) в ряды по координате $\zeta$, получаем решение внешней задачи в виде

$$\begin{aligned} &f_k(\xi, \eta, \zeta, \varepsilon)=f_{k0}(\xi, \eta, 0)+\Phi_{k0}(\xi, \eta, 0)\zeta+ \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial^n\Phi_{k0}}{\partial\zeta^n}\right)_{\zeta=0}\zeta^{n+1}+\varepsilon^2\Big[f_{k2}(\xi, \eta, 0)+\Phi_{k2}(\xi, \eta, 0)\zeta+ \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial^n\Phi_{k2}}{\partial\zeta^n}\right)_{\zeta=0}\zeta^{n+1}\Big]+\ldots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь через $f_1, \ldots, f_{5i}$ обозначены функции $u$, $w$, $v$, $T$, $C_i$ соответственно.

Выражения для $\Phi_{kj}(\xi, \eta, \zeta)=\partial f_{kj}/\partial\zeta$ $(j=0, 2, \ldots)$ получаются из уравнений (2.5) путем разрешения их относительно $\partial f_{kj}/\partial\zeta$. Например, для $\Phi_{k0}(\xi, \eta, \zeta)$ получаем следующие выражения (индекс 0 в правых частях опускаем):

(3.2)
$$-v_0\Phi_{10}=D_{\xi\eta}u+A_1u^2+A_2w^2+A_3uw-A_4/\rho$$
$$-v_0\Phi_{20}=D_{\xi\eta}w+B_1u^2+B_2w^2+B_3uw-B_4/\rho$$
$$-\Phi_{30}=\frac{1}{\rho\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\rho\left(\frac{g}{g_{11}}\right)^{1/2}u\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\rho\left(\frac{g}{g_{22}}\right)^{1/2}w\right]\right\}+$$
$$+\frac{v}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}$$
$$-v_0\Phi_{40}=D_{\xi\eta}T-\left(\alpha D_{\xi\eta}p-\sum_{i=1}^{N}h_i\dot{w}_i\right)\Big/c_p\rho$$
$$-v_0\Phi_{5i}=D_{\xi\eta}C_i-\dot{w}_i/\rho\qquad(i=1,\ldots,N)$$
$$f_{10}(\xi,\eta,0)=f_{20}(\xi,\eta,0)=0,\qquad f_{30}(\xi,\eta,0)=v_w$$
$$f_{40}(\xi,\eta,0)=T_w,\quad f_{5i0}(\xi,\eta,0)=C_{iw}\qquad(i=1,\ldots,N)$$

Аналогично находится выражение для любого $\Phi_{kj}$ ($j=2,4\ldots$). На поверхности тела при $\zeta=0$ получаем следующие выражения для градиентов скоростей, температуры, концентраций компонент, теплового и диффузионных потоков (индекс $w$ опускаем):

(3.3)
$$\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}=\frac{A_4}{\rho v},\quad\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}=\frac{B_4}{\rho v},\quad\frac{\partial T_0}{\partial\zeta}=-\sum_{k=1}^{N}\frac{h_k\dot{w}_k}{c_p\rho v}$$
$$\frac{\partial C_i}{\partial\zeta}=\frac{\dot{w}_i}{\rho v}\qquad(i=1,\ldots,N)$$
$$q_0=\frac{1}{\rho v}\sum_{k=1}^{N}\dot{w}_k(D_k-\Lambda h_k/c_p)$$
$$I_{i0}=\frac{1}{\rho v}\sum_{k=1}^{N}\dot{w}_k(D_{ik}-\Lambda_i h_k/c_p)$$

(3.4)
$$\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}=\frac{1}{\rho v}\frac{\partial\mu_0}{\partial\zeta}\frac{\partial u_0}{\partial\zeta},\quad\frac{\partial w_2}{\partial\zeta}=\frac{1}{\rho v}\frac{\partial\mu_0}{\partial\zeta}\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}$$
$$\frac{\partial T_2}{\partial\zeta}=-\frac{1}{c_p\rho v}\left[c_{p2}\rho v\frac{\partial T_0}{\partial\zeta}+\sum_{k=1}^{N}h_k\dot{w}_{k2}+\frac{\partial q_0}{\partial\zeta}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{N}c_{pk}I_{k0}\frac{\partial T_0}{\partial\zeta}-\frac{\alpha\mu_0}{(\rho v)^2}(A_4^2+B_4^2+2A_4B_4\cos\psi)\right]$$
$$\frac{\partial C_{i2}}{\partial\zeta}=\frac{1}{\rho v}\left[\dot{w}_{i2}-\frac{\partial}{\partial\zeta}I_{i0}\right]\qquad(i=1,\ldots,N)$$
$$q_2=\Lambda_0\frac{\partial T_2}{\partial\zeta}+\Lambda_2\frac{\partial T_0}{\partial\zeta}+\sum_{k=1}^{N}\left(D_{k0}\frac{\partial C_{k2}}{\partial\zeta}+D_{k2}\frac{\partial C_{k0}}{\partial\zeta}\right)$$

$$I_{i2}=\Lambda_{i0}\frac{\partial T_2}{\partial\zeta}+\Lambda_{i2}\frac{\partial T_0}{\partial\zeta}+\sum_{k=1}^{N}\left(D_{ik0}\frac{\partial C_{k2}}{\partial\zeta}+D_{ik2}\frac{\partial C_{k0}}{\partial\zeta}\right)$$

$(i=1,\ldots,N)$

(3.5)

$$\frac{\partial u_4}{\partial\zeta}=\frac{1}{\rho v}\left[\frac{\partial\mu_0}{\partial\zeta}\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}+\frac{\partial\mu_2}{\partial\zeta}\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}+\frac{\mu_0}{\rho v}\left(\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\zeta^2}\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}+\mu_0\frac{\partial^3 u_0}{\partial\zeta^3}\right)\right]$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial\zeta}=\frac{1}{\rho v}\left[\frac{\partial\mu_0}{\partial\zeta}\frac{\partial w_2}{\partial\zeta}+\frac{\partial\mu_2}{\partial\zeta}\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}+\frac{\mu_0}{\rho v}\left(\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\zeta^2}\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}+\mu_0\frac{\partial^3 w_0}{\partial\zeta^3}\right)\right]$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial\zeta}=\frac{\partial\Lambda}{\partial\zeta}\frac{\partial T_0}{\partial\zeta}+\Lambda\frac{\partial^2 T_0}{\partial\zeta^2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial D_k}{\partial\zeta}\frac{\partial C_{k0}}{\partial\zeta}+D_k\frac{\partial^2 C_{k0}}{\partial\zeta^2}$$

$$\frac{\partial I_{i0}}{\partial\zeta}=\frac{\partial\Lambda_i}{\partial\zeta}\frac{\partial T_0}{\partial\zeta}+\Lambda_i\frac{\partial^2 T_0}{\partial\zeta^2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial D_{ik}}{\partial\zeta}\frac{\partial C_{k0}}{\partial\zeta}+D_{ik}\frac{\partial^2 C_{k0}}{\partial\zeta^2}$$

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{c_p(\rho v)^2}\left[\frac{A_4}{\sqrt{g_{11}}}\left(\alpha\frac{\partial p}{\partial\xi}-c_p\rho\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)+\frac{B_4}{\sqrt{g_{22}}}\left(\alpha\frac{\partial p}{\partial\eta}-c_p\rho\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)-\right.$$
$$\left.-\rho v\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial(h_k\dot{w}_k)}{\partial\zeta}\right]$$

$$\frac{\partial^2 C_{i0}}{\partial\zeta^2}=-\frac{1}{(\rho v)^2}\left[\frac{\rho A_4}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial C_{i0}}{\partial\xi}+\frac{\rho B_4}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial C_{i0}}{\partial\eta}-\rho v\frac{\partial w_i}{\partial\zeta}\right]\quad(i=1,\ldots,N)$$

$$\frac{\partial^3 u_0}{\partial\zeta^3}=\frac{1}{(\rho v)^2}\left[\frac{A_4}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\frac{A_4}{v}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\frac{B_4}{v}\right)\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{\rho_0 A_4}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{A_4}{\rho v}\right)-\frac{\rho_0 B_4}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{A_4}{\rho v}\right)-\frac{2}{v}(A_1A_4^2+A_2B_4^2+A_3A_4B_4)\right]$$

$$\frac{\partial^3 w_0}{\partial\zeta^3}=\frac{1}{(\rho v)^2}\left[\frac{B_4}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\frac{A_4}{v}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\frac{B_4}{v}\right)\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{\rho_0 A_4}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{B_4}{\rho v}\right)-\frac{\rho_0 B_4}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{B_4}{\rho v}\right)-\frac{2}{v}(B_1A_4^2+B_2B_4^2+B_3A_4B_4)\right]$$

Здесь коэффициенты $a=\mu$, $\rho$, $c_p$, $D_k$, $D_{ik}$, $\Lambda$, $\Lambda_k$ представлены в виде

$$a=a_0+\varepsilon^2a_2+\ldots,\quad \left.\frac{\partial a_0}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial a_0}{\partial C_k}-\frac{\partial a_0}{\partial T}\frac{h_k}{c_p}\right)\frac{\dot{w}_k}{\rho v}$$

Физические компоненты трения на поверхности тела выражаются следующим образом [16]:

(3.6)
$$\sigma_{\zeta\xi}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right),\quad \sigma_{\zeta\eta}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}+\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)$$

Рассмотрим выражения для градиентов скоростей (3.3). Введем ортогональную систему координат на поверхности тела следующим образом. Направим ось $\xi$ вдоль векторных линий градиента давления, а ось $\eta$ — перпендикулярно к ним (вдоль изобар).

Тогда на поверхности тела

$$\frac{\partial u_0}{\partial \zeta}=-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}\rho v}\frac{\partial p}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial w_0}{\partial \zeta}=0 \tag{3.7}$$

Формулы (3.7) показывают, что в первом приближении при сильном вдуве предельные (донные) линии тока на поверхности тела совпадают с векторными линиями градиента давления.

4. Рассмотрим некоторые конкретные случаи течения газа в пристеночной области пограничного слоя.

*Течение в окрестности критической точки двоякой кривизны.* Введем декартову систему координат с началом в точке $O$ пересечения критической линии с поверхностью тела. Пусть оси $\xi$ и $\eta$ лежат в плоскости, касательной к телу в точке $O$, а ось $\zeta$ перпендикулярна этой плоскости. Давление в окрестности точки $O$ можно представить в виде

$$p(\xi,\eta)=p_0-\frac{1}{2}p_1^2\xi^2-\frac{1}{2}k^2p_1^2\eta^2 \qquad (0\leqslant k\leqslant 1) \tag{4.1}$$

Интегрирование уравнений (2.5) для первого приближения с граничными условиями

$$u=w=0,\quad \rho v=1,\quad T=1,\quad C_i=C_{iw}\quad (i=1,\ldots,N),\quad (\zeta=0)$$
$$(\rho_w{}^*\equiv\rho_w(0,0),\quad T_w{}^*\equiv T_w(0,0)) \tag{4.2}$$

для случая химически замороженного или равновесного течений с учетом (2.1) дает

$$u=\xi s,\qquad w=k\eta p_1\frac{(p_1+s)^k-(p_1-s)^k}{(p_1+s)^k+(p_1-s)^k} \tag{4.3}$$

$$\zeta=\int_0^s\frac{v\,ds}{p_1^2-s^2},\qquad v=\exp\left(-\int_0^s\frac{s+w/\eta}{p_1^2-s^2}ds\right),\qquad 0\leqslant s\leqslant p_1$$

$$T=1,\qquad C_i=C_{iw}\qquad (i=1,\ldots,N),\qquad \rho=1$$

Толщина слоя вдуваемых газов определится третьим выражением (4.3) при подстановке в верхний предел интеграла $s=p_1$.

При $k=0$ или $k=1$ решение (4.3) совпадает с решениями для случаев течения в окрестности плоской или осесимметричной критической точки [7].

*Обтекание бесконечного цилиндра под углом скольжения.*

В системе координат $(\xi,\eta,\zeta)$, из которых ось $\xi$ направлена вдоль контура цилиндра, ось $\eta$ – вдоль образующей, а ось $\zeta$ – по нормали к поверхности, система уравнений (2.5) имеет вид, аналогичный виду уравнений для плоского течения. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$u^2(\xi,t)=2h_w(t)-2h(\xi,t),\qquad w(\xi,t)=0 \tag{4.4}$$

$$\zeta(\xi,t)=\int_t^\xi\frac{\rho_w(t)v_w(t)\,dt}{\rho(\xi,t)u(\xi,t)},\qquad 0\leqslant t\leqslant\xi$$

$$C_i^e(\xi,t)=C_{iw}^e(t)\qquad (i=1,\ldots,N_e)$$

Здесь $t$ – координата $\xi$ точки пересечения линии тока и поверхности тела, $C_i^e$ – концентрация $i$-го химического элемента, $N_e$ — число элементов во вдуваемом газе.

В случае химически замороженного течения

$$\frac{h(\xi,t)}{h(t)}=\frac{T(\xi,t)}{T_w(t)}=\left[\frac{p(\xi)}{p(t)}\right]^{\varkappa_w(t)},\qquad \frac{\rho(\xi,t)}{\rho_w(t)}=\left[\frac{p(\xi)}{p(t)}\right]^{1/\gamma_w(t)} \tag{4.5}$$

$$C_i(\xi,t)=C_{iw}(t),\qquad \gamma=C_p/C_v,\qquad \varkappa=(\gamma-1)/\gamma$$

Уравнение разделяющей линии тока – $\zeta=\zeta(\xi,0)$.

В случае химически равновесного течения энтропия $S(\xi, t) = S_w(t)$. Считая энтальпию, температуру и концентрации компонент известными функциями давления, энтропии и концентраций элементов, получаем полное решение уравнений (2.5) и в этом случае.

5. Свяжем систему координат на поверхности тела с изобарами ($\xi = \mathrm{const}$) и с векторными линиями градиента давления ($\eta = \mathrm{const}$) и введем новые переменные по формулам

$$w = \varepsilon_1 w^\circ, \quad A_3 = \varepsilon_1 K_1, \quad B_3 = K_2, \quad dx = \sqrt{g_{11}}\, d\xi \tag{5.1}$$
$$dz = \sqrt{g_{22}}\, d\eta, \quad dy = d\zeta, \quad H = h + (u^2 + \varepsilon_1^2 w^2)/2$$

В этих переменных уравнения (2.5) с учетом (1.2) для химически замороженных или равновесных течений принимают следующий вид (градусы опускаем):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \sqrt{g_{22}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \sqrt{g_{22}} + Q) = 0 \tag{5.2}$$
$$D_{xy} u + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon_1 Q_1 + \varepsilon_1^2 Q_2, \quad D_{xy} w - K_1 u^2 + K_2 u w = \varepsilon_1 Q_3$$
$$D_{xy} H = \varepsilon_1 Q_4, \quad D_{xy} C_i^e = \varepsilon_1 Q_{5i} \quad (i = 1, \ldots, N_e), \quad D_{xy} S = \varepsilon_1 Q_6$$

Здесь $\varepsilon_1$ — некоторая характерная поперечная кривизна векторных линий градиента давления, $D_{xy} = u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$

$$Q = \int_0^y \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial z}(\rho w \sqrt{g_{11}})\, dy, \quad Q_1 = -w\frac{\partial u}{\partial z}, \quad Q_2 = -K_1 u w + K_2 w^2$$

$$Q_3 = -w\frac{\partial w}{\partial z}, \quad Q_4 = -w\frac{\partial H}{\partial z}, \quad Q_{5i} = -w\frac{\partial C_i^e}{\partial z}, \quad Q_6 = -w\frac{\partial C}{\partial z}$$

При малых значениях параметра $\varepsilon_1$, т. е. при малой поперечной кривизне векторных линий градиента давления, решение системы уравнений (5.2) с граничными условиями (2.6) будем искать в виде ряда по целым степеням $\varepsilon_1$. При этом система уравнений для главных членов не содержит производных по $z$ и имеет вид, аналогичный виду уравнений невязкого пограничного слоя в случае осесимметричного течения [8]. Отметим, что переменная $z$ в эти уравнения входит как параметр, а уравнение для скорости $w$ может быть решено после решения остальных уравнений. Уравнения для следующих членов разложения по $\varepsilon_1$ содержат источниковые члены, которые вычисляются по данным предыдущих приближений. Таким образом, в каждом приближении $Q_1, \ldots, Q_6$ можно считать известными функциями координат $x$, $y$, $z$. Аналогичный подход использовался ранее в работах [17, 18] для численного решения уравнений трехмерного пограничного слоя при умеренных вдувах. При этом в качестве малого параметра выбирался параметр, связанный с поперечной кривизной линий тока внешнего невязкого течения.

Интегрируя уравнения для главных членов разложения по $\varepsilon_1$, получаем

$$u^2(x, z, t) = 2h_w(z, t) - 2h(x, z, t) \quad (0 \leqslant t \leqslant x,\ z = \mathrm{const}) \tag{5.3}$$

$$y(x, z, t) = \int_t^x \frac{\rho_w(z, t)\, v_w(z, t)\sqrt{g_{22}(z, t)}\, dt}{\rho(x, z, t)\, u(x, z, t)\sqrt{g_{22}(z, x)}}$$

$$C_i^e(x,z,t)=C_{iw}^e(z,t)\quad (i=1,\ldots,N_e),\quad S(x,z,t)=S_w(z,t)$$

$$w(x,z,t)=\exp\left(-\int_t^x K_2\,dx\right)\int_t^x\left[K_1 u \exp\left(\int_t^x K_2\,dx\right)\right]dx$$

Здесь $t$ — координата $x$ ($z$=const) точки пересечения линии тока и поверхности тела.

Функции $h(x,z,t)$, $\rho(x,z,t)$, $T(x,z,t)$, $C_i(x,z,t)$ $(i=1,\ldots,N)$ определяются так же, как и в случае обтекания бесконечного цилиндра под углом скольжения.

Автор благодарит Г. А. Тирского за обсуждение данной работы.

Институт механики МГУ Поступила 31 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черный Г. Г.* Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
2. *Олейник О. А.* О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
3. *Libby P. A.* The homogeneous boundary layer at an axisymmetric stagnation point with large rates of injection. J. Aero/Space Sci., 1962, vol. 29, No. 1.
4. *Kubota T., Fernandez F. L.* Boundary-layer flows with large injection and heat transfer. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 1.
5. *Филимонов В. Н.* Асимптотическое решение уравнений несжимаемого пограничного слоя с отрицательным градиентом давления при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
6. *Гершбейн Э. А.* Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
7. *Гершбейн Э. А.* Об автомодельных численных и асимптотических решениях уравнений пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
8. *Гершбейн Э. А.* К асимптотическому решению уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
9. *Libby P. A.* Heat and mass transfer at a general three-dimensional stagnation point. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 3.
10. *Walton I. C.* Boundary-layer flow at a three-dimensional stagnation point with strong blowing. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1973, vol. 26, No. 4.
11. *Gersten K.* Die kompressible Grenzschichtströmung am dreidimensionalen Staupunkt bei starken Absaugen oder Ausblasen. Wärme- und Stoffübertrag, 1973, Bd 6, Nr 1.
12. *Libby P. A., Kassoy D. R.* Laminar Boundary-layer at an infinite swept stagnation line wich large rates of injection. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 10.
13. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
14. *Суслов О. Н., Тирский Г. А., Щенников В. В.* Описание химически равновесных течений многокомпонентных ионизованных смесей в рамках уравнений Навье — Стокса и Прандтля. ПМТФ, 1971, № 1.
15. *Шевелев Ю. Д.* Численный расчет пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
16. *Шевелев Ю. Д.* Численное исследование пространственного пограничного слоя в сжимаемом газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
17. *Kang Sang-Wook, Rae W. J., Dunn M. G.* Effects of mass injection on compressible, three-dimensional, laminar boundary layers. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 10.
18. *Fannelop T. K.* A method of solving the three-dimensional laminar boundary-layer equations with application to a lifting re-entry body. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 6.