

ПОВЕДЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ

В. Л. ЗИМОНТ, В. А. САБЕЛЬНИКОВ

(Москва)

На основе уравнения, описывающего поведение спектрального тензора энергии пульсационной скорости при одномерном течении в канале с переменной площадью сечения, получена система уравнений для среднеквадратичных составляющих вектора пульсационной скорости и интегральных масштабов длины турбулентности в различных направлениях, позволяющая по этим параметрам в начальном сечении канала определить их поведение вдоль канала. При этом использовались идеи А. Н. Колмогорова и И. Ротта о возможности описания вязких и нелинейных членов в уравнениях для компонент тензора напряжений Рейнольдса через энергию пульсационного движения и интегральный масштаб длины турбулентности.

Полученная система в частных случаях очень малой интенсивности турбулентности приводит к результатам линейной теории и при постоянной площади сечения (или при очень большой интенсивности турбулентности, когда затухание влияет на турбулентность много сильнее, чем эффект деформации) описывает известные эмпирические закономерности вырождения турбулентности за решетками. Производится сопоставление с имеющимися в литературе экспериментальными данными о поведении характеристик турбулентности в каналах с переменной площадью сечения.

Исследованию влияния на характеристики турбулентности деформации потока при течении в каналах с переменной площадью или формой сечения посвящен ряд работ. Впервые Прандтль [1, 2] на основании исследования поведения при деформации невязкого потока дискретных вихрей при пренебрежении относительным движением частиц жидкости вследствие пульсаций скорости показал, что поджатие поперечного сечения трубы уменьшает интенсивность турбулентности. В [3, 4] было учтено, что турбулентность является суперпозицией вихрей разных размеров и направлений, и на основе некоторых моделей распределения вихрей получены результаты с точностью до коэффициентов, зависящих от принятой модели, совпадающие с результатами Прандтля.

Полное теоретическое решение задачи о поведении однородной турбулентности при однородной безвихревой деформации в линейной постановке, реализующейся при «быстрой» деформации, для несжимаемой жидкости было получено на основе лагранжевого описания движения сплошной среды в [5, 6]. В этих работах использовались фактически те же допущения относительно вихря скорости и вытекающие из этих допущений уравнения, что и в [1, 2]. Уравнения, связывающие компоненты вектора вихря жидкого объема до и после деформации, использовались в [5, 6] для получения связи между спектральными тензорами энергии турбулентности до и после деформации. В случае изотропной начальной турбулентности связь между среднеквадратичными составляющими вектора пульсационной скорости для осесимметричной деформации до и после деформации выражается аналитически и не зависит от формы начального спектра турбулентности.

Аналогичные результаты для несжимаемой и сжимаемой жидкостей (в последнем случае поле пульсационной скорости также рассматривалось как соленоидальное) независимо от [5, 6] были получены в [7]. В последней работе сделана попытка учесть в процессе деформации вырождение турбулентности из-за молекулярной вязкости, которое предполагалось не зависящим от формы канала и соответствующим обычному вырождению турбулентности за решетками.

В [8] задача о деформации однородной турбулентности рассмотрена на основе эйлерова описания движения сплошной среды с использованием уравнений для моментов поля пульсационной скорости, полученных методом Фрийдмана — Келлера из уравнения Навье — Стокса. Найдено поведение по времени спектрального тензора энергии в линейном поле средней скорости с учетом деформации и вязкости, но при пренебрежении нелинейными членами.

Уравнения для моментов и спектрального тензора энергии использовались также В. М. Иевлевым (см. приложение книги [9]) для исследования изменения характеристик турбулентности при однородной деформации с учетом обычным образом [6]

инерционных нелинейных и вязких членов в предположении, что изотропность турбулентности в процессе деформации сохраняется. Это позволило значительно упростить анализ. Без такого предположения задача рассматривалась в [10] на основе уравнений для компонент напряжений Рейнольдса. При соответствующем выборе эмпирических постоянных получено согласование с экспериментальными данными для течения в сопле [11]. При условиях, когда справедлива теория быстрой деформации [5, 6], уравнения работы [10] не описывают результаты этой теории.

В настоящей работе предлагается схема, удовлетворяющая указанному предельному переходу.

1. Схема течения и некоторые оценки. Поле средних параметров принимается соответствующим одномерной схеме течения, при которой средние значения плотности $\langle \rho \rangle$ и давления $\langle p \rangle$ в каждой точке потока зависят от продольной координаты канала, а поле средней скорости имеет вид

$$(1.1) \quad U_1 = f(x_1), \quad U_2 = g(x_1)x_2, \quad U_3 = g(x_1)x_3$$

т. е. продольная составляющая вектора средней скорости постоянна по сечению, а поперечные составляющие пропорциональны расстоянию от оси канала круглого или квадратного сечения (результаты очевидным образом обобщаются на случай каналов прямоугольного сечения).

Изменение $\langle \rho \rangle(x_1)$, $\langle p \rangle(x_1)$, $U_1(x_1)$ находится при известной геометрии канала из одномерных соотношений газовой динамики. Функция $g(x_1)$ определяется из дифференциального уравнения неразрывности для среднего течения

$$(1.2) \quad g(x_1) = -\frac{1}{2\langle \rho \rangle} \frac{d\langle \rho \rangle U_1}{dx_1}$$

Данная схема течения справедлива при не очень быстром изменении площади сечения канала, когда переменностью давления в сечениях из-за искривления линий тока можно пренебречь и на некотором расстоянии от стенок, вблизи которых профиль средней скорости определяется пограничным слоем.

Рассмотрим условия, при которых пульсации скорости турбулентного течения, подвергающегося действию деформации при течении в канале, можно рассматривать как соленоидальные (несжимаемые). Уравнение неразрывности для пульсаций скорости и уравнение, связывающее пульсации давления с пульсациями скорости, получающееся из уравнения движения применением операции дивергенции, в этом случае имеют вид

$$(1.3) \quad \frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} = 0, \quad -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_\gamma \partial x_\gamma} = 2 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial u_\beta'}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 (u_\alpha' u_\beta' - \langle u_\alpha' u_\beta' \rangle)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

Здесь и далее штрихом обозначены пульсационные составляющие параметров, по повторяющимся индексам, обозначенным греческими буквами, предполагается суммирование.

Произведем оценку членов в уравнениях неразрывности и движения сжимаемой жидкости. Пусть в канале переменного сечения U_1 и U_2 — характерные изменения составляющих вектора средней скорости, равные по порядку средним их значений на длинах L_1 и L_2 , а R — характерное изменение средней плотности на длине L_1 ; u' , p' , ρ' — характерные изменения пульсаций на длине l . Тогда L_1 и L_2 будут порядка порядка продольных и поперечных размеров канала, а l — порядка масштаба длины турбулентности.

Вообще говоря, u' и l будут различными в зависимости от направления. Например, при поджатии потока $u_2' > u_1'$, $l_2 < l_1$, но $u_2'/l_2 > u_1'/l_1$. Поэтому для этого случая приводимые ниже оценки будут относиться к u_2' и l_2 .

Из уравнения неразрывности для осредненного течения следует:

$$(1.4) \quad U_1/L_1 \sim U_2/L_2$$

В случае, когда производные от средних скоростей относительно малы, так что линейным относительно пульсаций скорости членом в правой части уравнения для пульсаций давления в (1.3) можно пренебречь, оценка членов для пульсаций давления дает

$$(1.5) \quad p' \approx Ru'^2$$

в противоположном случае

$$(1.6) \quad p' \sim Ru'U_1/L_1 \quad (L_2/L_1 \leq 1), \quad p' \sim Ru'U_1L_2/L_1^2 \quad (L_2/L_1 \geq 1)$$

Связь пульсаций давления с пульсациями плотности может быть установлена при использовании соотношения для адиабаты, являющегося фактически уравнением энергии при пренебрежении вязкостью и теплопроводностью в потоке

$$(1.7) \quad p' \sim \left(\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \langle \rho \rangle} \right)_s \rho' = a^2 \rho'$$

где a — скорость звука.

Применяя оценки (1.4)–(1.7), можно получить неравенства, при которых уравнения для сжимаемой жидкости переходят в (1.3). При оценках пульсациями первого и второго коэффициентов вязкости пренебрегалось.

Путем оценки членов в уравнении для пульсаций давления в (1.3) можно определить области параметров, при которых член, описывающий нелинейное инерционное взаимодействие в уравнении движения (выражающийся вторым членом в правой части уравнения) много больше или много меньше члена, линейного относительно пульсаций скорости и связанного с деформацией. При этом для оценки производных $\partial U_i / \partial x_j$, имеющих различные индексы, необходимо использовать соотношение (1.4). Очевидно, геометрическим ограничением является также $l/L_2 \leq 1$. Аналогично, используя соотношение для диссипации турбулентной энергии W , полученное на основе соображений теории размерностей (см. [6]), найдем условие, когда изменением кинетической энергии турбулентности из-за диссипации за время деформации можно пренебречь

$$\frac{W}{u'^2} \frac{L_1}{U_1} \sim \frac{u' L_1}{W_1} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{u'}{l} \ll \frac{U_1}{L_1}$$

Указанные оценки позволяют определить условия, при которых пульсации скорости можно рассматривать как соленоидальные, и выделить области параметров, при которых определяющими изменение характеристик турбулентности факторами являются либо деформация потока, либо нелинейное взаимодействие и диссипация турбулентности из-за вязкости, либо совместное влияние всех перечисленных факторов.

Практически интересным является случай $L_2/L_1 \leq 1$, поскольку при $L_2/L_1 > 1$ может иметь место образование срывного течения и рассматриваемая картина течения нарушится, хотя с принципиальной точки зрения последний случай, как предельный, также представляет интерес. При $L_2/L_1 \leq 1$ определяющими факторами являются деформация потока, когда

$$(1.8) \quad \frac{u'}{U_1} \ll \frac{l}{L_1} \ll \frac{1}{M_1^2}, \quad \frac{u'}{U_1} \ll 1$$

нелинейное взаимодействие и диссипация турбулентности, когда

$$(1.9) \quad \frac{u'}{U_1} \gg \frac{l}{L_1}, \quad M_n^2 \ll 1 \quad \text{при } M_1 \ll 1$$

$$\frac{u'}{U_1} \gg \frac{l}{L_1} \ll 1, \quad M_1 M_n \ll 1 \quad \text{при } M_1 \gg 1$$

совместное влияние деформации потока, нелинейного взаимодействия и диссипации турбулентности, когда

$$(1.10) \quad \frac{n'}{U_1} \approx \frac{l}{L_1} \ll \frac{1}{M_1^2}, \quad M_n M_1 \ll 1, \quad M_n^2 \ll 1$$

В неравенствах M_1 и M_n — числа Маха для U_1 и u' .

Из оценок (1.8) — (1.10) следует, что в случае $L_2/L_1 \ll 1$ нелинейным инерционным взаимодействием и диссипацией можно пренебречь при достаточно малых интенсивностях пульсаций скорости. При этом ограничение на масштаб турбулентности, следующее из уравнения неразрывности, имеет место лишь при $M_1 \gg 1$. Наоборот, эффекты нелинейного взаимодействия и диссипации делаются преобладающими при достаточно больших интенсивностях пульсаций скорости. При этом в случае $M_1 \gg 1$ это возможно лишь при очень малых масштабах турбулентности, чтобы при выполнении неравенства для u'/U_1 оставалось справедливым неравенство для M_n . Область параметров (1.10) соответствует случаю, когда влияние на турбулентность деформации, нелинейного инерционного взаимодействия и диссипации одного порядка.

В гипотетическом случае $L_2/L_1 \gg 1$ в рамках соленоидальных пульсаций скорости линейная задача (чистая деформация) при фиксированной величине l имеет смысл лишь в случае очень малых M_1 . Оценки показывают, что при $L_1 \rightarrow 0$ (при этом $L_1/L_2 \ll l/L_1$) соленоидальные пульсации скорости имеют место лишь при $M_1 \rightarrow 0$. При фиксированных числах M_1 и l в этом случае пульсации скорости нельзя рассматривать как соленоидальные, что физически означает появление акустических и энтропийных пульсаций. Влияние нелинейного взаимодействия и диссипации при $L_2/L_1 \gg 1$ согласно оценкам может проявиться лишь при очень больших значениях u'/U_1 , нереальных для потоков в каналах.

В дальнейшем будет рассматриваться область параметров (1.10).

2. Основные уравнения. Из уравнений для двухточечных моментов второго порядка $B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle u'_i(\mathbf{x}) u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ пульсационной скорости, полученных методом Фридмана — Келлера (см. аналогичные выкладки в [12]) при

$$(2.1) \quad u'/U_1 \approx l/L_1 \ll 1, \quad x_2/L_1 \ll 1$$

после преобразования Фурье и выражения члена с пульсациями давления через пульсации скорости с использованием уравнения неразрывности для спектрального тензора $k_\alpha F_{\alpha i} = 0$ вытекает уравнение для $\bar{F}_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x})$

$$(2.2) \quad U_1 \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{\partial (k_i F_{ij})}{\partial k_i} + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{k_i}{k^2} (k_i F_{ij} + k_j F_{ji}) -$$

$$- F_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) + \Gamma_{ij} + \Pi_{ij} - 2\nu k^2 F_{ij}$$

где Γ_{ij} и Π_{ij} — нелинейные инерционные члены, смысл которых рассматривается в [6].

Уравнение (2.2) после замены переменной $dt = dx_1/U_1$ переходит в уравнение для однородной деформации турбулентности, приведенное в [8]. Первое ограничение в (2.1) физически соответствует пренебрежению диффузией турбулентности в продольном направлении канала. Последнее неравенство в (2.1), фактически соответствующее пренебрежению ротором средней скорости, можно было и не вводить. Однако в этом случае турбулентность будет неоднородной в сечениях канала.

После интегрирования уравнения (2.2) при $i=j$ по волновому пространству с использованием (1.1), (1.2) и уравнения неразрывности для спектрального тензора получим уравнения для $\langle u_i'^2 \rangle$ — средних квадратов составляющих вектора пульсационной скорости

$$(2.3) \quad U_1 \frac{d\langle u_i'^2 \rangle}{dx_1} = U_1 \frac{d \ln \langle \rho \rangle U_1 / \langle \rho \rangle_0 U_{10}}{dx_1} \langle u_i'^2 \rangle - \\ - U_1 \frac{d \ln \langle \rho \rangle U_1^3 / \langle \rho \rangle_0 U_{10}^3}{dx_1} \langle u_i'^2 \rangle + U_1 \frac{d \ln \langle \rho \rangle U_1^3 / \langle \rho \rangle_0 U_{10}^3}{dx_1} \times \\ \times \int \frac{k_i}{k^2} (k_i F_{1i} + k_i F_{i1}) d^3k - 2\nu \int k^2 F_{ii} d^3k + \int \Pi_{ii} d^3k$$

Укажем физический смысл членов в правой части уравнения (2.3). Первые два члена описывают изменение $\langle u_i'^2 \rangle$ под действием деформации потока и дают вклад в изменение энергии турбулентных пульсаций скорости — $\langle u_\alpha' u_\alpha' \rangle$. Третий член описывает обмен энергией между составляющими вектора пульсационной скорости, вызванный пульсациями давления вследствие взаимодействия пульсаций скорости с полем средних скоростей («линейный» обмен) и не дает вклада в изменение энергии турбулентных пульсаций скорости. Последнее непосредственно проверяется при использовании уравнения неразрывности для спектрального тензора.

Четвертый член описывает диссипацию турбулентности из-за вязкости. Пятый член описывает обмен энергией между разными составляющими вектора пульсационной скорости, вызванный пульсациями давления вследствие взаимодействия пульсаций скорости самих с собой («нелинейный» обмен) и не дает вклада в изменение энергии турбулентных пульсаций скорости [6].

В дальнейшем вместо уравнений относительно $\langle u_1'^2 \rangle$, $\langle u_2'^2 \rangle$ и $\langle u_3'^2 \rangle$ рассмотрим уравнения для $\langle u_i'^2 \rangle$ и $u^2 = 1/3 \langle u_\alpha' u_\alpha' \rangle$, поскольку в этом случае после использования условия неразрывности для спектрального тензора F_{ij} уравнение для u^2 не зависит от спектрального тензора.

Для замыкания системы уравнений относительно $\langle u_i'^2 \rangle$ и u^2 необходимы полуэмпирические гипотезы, позволяющие исключить фигурирующие в них неизвестные члены. Следуя работам [13, 14], для нелинейного обменного и диссипативного членов запишем следующие аппроксимации:

$$(2.4) \quad \int \Pi_{ii} d^3k = -\frac{\kappa u}{l} (\langle u_i'^2 \rangle - u^2), \quad 2\nu \int k^2 F_{ii} d^3k = \frac{\alpha u \langle u_i'^2 \rangle}{l}$$

Здесь l — некоторый интегральный масштаб длины турбулентности, κ и α — эмпирические коэффициенты порядка единицы.

Аппроксимация диссипативного члена, выражающая анизотропность диссипации энергии, использовалась в некоторых работах (см., например, [15]). В данной работе такое выражение получено независимо на основе обработки экспериментальных данных работ [11, 16], в которых числа Рейнольдса турбулентности были малыми.

Отметим, что при использовании аппроксимации (2.4) сумму обменного и диссипативного членов перегруппировкой слагаемых можно свести к виду, соответствующему изотропной диссипации, но при этом величина k в обменном члене заменяется на $(k+\alpha)$.

Строго говоря, диссипативный член необходимо представить в виде двух слагаемых, одно из которых не зависит от молекулярной вязкости и описывает изотропную диссипацию, а другое описывает диссипацию, зависящую от молекулярной вязкости и являющуюся неизотропной. При использовании упрощенного выражения для диссипации типа (2.4) коэффициент α является функцией числа Рейнольдса турбулентности.

При определении в уравнении для $\langle u_1'^2 \rangle$ обмена энергией между составляющими вектора пульсационной скорости вследствие деформации при вычислении интеграла (третий член в уравнении (2.3)) для компоненты спектрального тензора $F_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ принималось приближенное выражение

$$(2.5) \quad F_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{\langle u_1'^2 \rangle}{\langle v_1'^2 \rangle} F_{11}^*(\mathbf{k}, \mathbf{x})$$

где F_{11}^* и $\langle u_1'^2 \rangle^*$ — решение линейной задачи.

Использование аппроксимации (2.5) физически соответствует допущению, что пространственная структура турбулентности в области крупномасштабных вихрей, определяющих значение интеграла в уравнении относительно $\langle u_1'^2 \rangle$, в (2.3) близка к структуре, имеющей место при быстрой деформации среды, что подтверждается анализом экспериментальных данных, проведенным в работах [17, 18].

(В области малых вихрей, в которых происходит диссипация турбулентной энергии, это допущение несправедливо и поэтому при аппроксимации диссипативных членов в уравнении (2.3) использованы известные соотношения (2.4).)

Отметим, что при аппроксимации (2.5) выполняется интегральное свойство

$$\langle u_1'^2 \rangle = \int F_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d^3\mathbf{k}$$

Решение линейной задачи, получающееся из системы уравнений (2.2) при отброшенных нелинейных и вязких членах, совпадает с известным решением, полученным другим методом [7]

$$F_{11}^*(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{e_2^2}{e_4} F_{110}(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}_0) \frac{k_0^4}{(\varepsilon k_{10}^2 + k_{20}^2 + k_{30}^2)^2}$$

$$e_1 = \frac{U_1}{U_{10}}, \quad e_2^2 = e_3^2 = \frac{\langle \rho \rangle_0 U_{10}}{\langle \rho \rangle U_1}, \quad \varepsilon = \frac{e_2^2}{e_1^2} = \frac{\langle \rho \rangle_0 U_{10}^3}{\langle \rho \rangle U_1^3}$$

$$\mathbf{k}_0 = (k_1 e_1, k_2 e_2, k_3 e_3)$$

Индексом нуль отмечены значения функций в начальном сечении канала. Использование указанных выше аппроксимаций приводит к системе уравнений

$$(2.6) \quad U_1 \frac{d\langle u_1'^2 \rangle}{dx_1} = U_1 \frac{d \ln \mu}{dx_1} \langle u_1'^2 \rangle - \frac{ku}{l} (\langle u_1'^2 \rangle - u^2) - \frac{\alpha u \langle u_1'^2 \rangle}{l}$$

$$U_1 \frac{du^2}{dx_1} = U_1 \frac{d \ln \langle \rho \rangle U_1 / \langle \rho \rangle_0 U_{10}}{dx_1} u^2 - 1/3 U_1 \times$$

$$\times \frac{d \ln \langle \rho \rangle U_1^3 / \langle \rho \rangle_0 U_{10}^3}{dx_1} \langle u_1'^2 \rangle - \frac{\alpha u^3}{l}$$

где функция $\mu = \langle u_1'^2 \rangle^* / \langle u_{10}'^2 \rangle$ определяется из линейной теории. В случае изотропной однородной начальной турбулентности [7]

$$\mu = \frac{3}{4e_1^2} \left[\frac{1}{\varepsilon - 1} + \frac{2 - \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^{3/2}} \text{Arth}(\sqrt{1 - \varepsilon}) \right] \quad (\varepsilon < 1)$$

$$\mu = \frac{3}{4e_1^2} \left[\frac{1}{\varepsilon - 1} + \frac{\varepsilon - 2}{(\varepsilon - 1)^{3/2}} \text{arctg}(\sqrt{\varepsilon - 1}) \right] \quad (\varepsilon > 1)$$

В случае неизотропной однородной начальной турбулентности функция μ зависит от вида компоненты $F_{ii}(\mathbf{k}_0)$.

Вообще говоря, использование уравнений (2.6) при $\langle u_2'^2 \rangle \ll \langle u_1'^2 \rangle$ может привести к большим ошибкам в определении величины $\langle u_2'^2 \rangle$, поскольку она в этом случае находится как разность больших величин $3/2u^2$ и $1/2\langle u_1'^2 \rangle$, однако асимптотические оценки по линейной теории показывают, что для течений в каналах этот случай не реализуется. Масштаб длины турбулентности вдоль i -й оси системы координат и средний масштаб турбулентности определим следующим образом:

$$(2.7) \quad l_i \langle u_i'^2 \rangle = \int B_{ii}(\mathbf{n}^i r) dr = \pi \int F_{ii}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \delta(k_i) d^3 \mathbf{k}$$

$$(2.8) \quad l = \frac{l_1 \langle u_1'^2 \rangle + l_2 \langle u_2'^2 \rangle + l_3 \langle u_3'^2 \rangle}{3u^2}$$

где $\delta(k_i)$ — одномерная дельта-функция Дирака, \mathbf{n}^i — единичный вектор, указывающий направление i -й оси системы координат.

(Такое определение интегрального масштаба не инвариантно относительно выбора системы координат. Инвариантно, например, определение масштаба через спектр энергии, получающийся осреднением по сфере в волновом пространстве следа спектрального тензора [6])

$$lu^2 = \pi/4 \int k^{-1} F_{\alpha\alpha} d^3 \mathbf{k}$$

но в этом случае уравнения делаются более громоздкими.)

Из уравнения (2.2), используя определение (2.7), вытекают уравнения для интегральных масштабов длины турбулентности

$$(2.9) \quad U_i \frac{dl_i \langle u_i'^2 \rangle}{dx_i} = -l_i \langle u_i'^2 \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \pi \int \Gamma_{ii}(\mathbf{k}) \delta(k_i) d^3 \mathbf{k} - 2\pi \nu \int k^2 F_{ii}(\mathbf{k}) \delta(k_i) d^3 \mathbf{k}$$

Отметим, что величины Π_{ii} (вследствие их пропорциональности k_i [6]) не входят в уравнения (2.9), т. е. нелинейный обмен энергией между разными составляющими вектора пульсационной скорости осуществляется таким образом, что произведения $l_i \langle u_i'^2 \rangle$ вдоль каждой из осей координат остаются неизменными. Нелинейное инерционное взаимодействие влияет на $l_i \langle u_i'^2 \rangle$ через члены Γ_{ii} , описывающие перераспределение пульсационной энергии по спектру и поэтому влияющие на масштабы длины турбулентности и не влияющие на средние квадраты компонент вектора пульсационной скорости (в чем можно убедиться, если проинтегрировать Γ_{ii} по волновому пространству [6]).

Представляется физически очевидным, что нелинейные члены приближают турбулентность не только к изотропии по компонентам вектора пульсационной скорости (что подтверждает опыт), но и к изотропии по масштабам длины l_i и произведениям $l_i \langle u_i'^2 \rangle$. Кроме того, нелинейные чле-

ны и вязкость должны приводить к изменению $l_i \langle u_i'^2 \rangle$ и в случае изотропной турбулентности при отсутствии деформации. (Можно показать, что при больших числах Рейнольдса $Re_T = ul/\nu$ вязким членом можно пренебречь.) Поэтому нелинейные и вязкие члены в уравнениях для $l_i \langle u_i'^2 \rangle$ выражались через средние квадраты компонент вектора пульсационной скорости и средний интегральный масштаб длины в виде

(2.10)

$$\pi \int G_{ii}(k) \delta(k_i) d^3k - 2\pi\nu \int k^2 F_{ii}(k) \delta(k_i) d^3k = -\frac{k_i u}{l} (l_i \langle u_i'^2 \rangle - l u^2) + \beta \langle u_i'^2 \rangle u$$

где k_i и β — эмпирические коэффициенты порядка единицы.

Уравнения (2.6), (2.9) вместе с (2.8) и (2.10) составляют замкнутую систему уравнений, позволяющую в случае однородной начальной турбулентности рассчитать поведение вдоль канала переменного сечения средних квадратов компонент вектора пульсационной скорости $\langle u_i'^2 \rangle$ и интегральных масштабов длины турбулентности l_i .

3. Сопоставление расчетов с экспериментальными данными. Значения постоянных α и β могут быть найдены из экспериментов по вырождению за решетками изотропной турбулентности. В этом случае из (2.6) и (2.9) при отсутствии деформации, учитывая, что при затухании развитой турбулентности $lu \approx \text{const}$ [6], следует, что $\beta = -\alpha/2$. Значения α при умеренных числах Рейнольдса турбулентности $Re_T = ul/\nu \approx 60 \div 230$ лежат в диапазоне $\alpha = 0.8 \div 1.4$, причем с увеличением Re_T имеют тенденцию уменьшаться [6]. Данные, полученные по затуханию турбулентности за решеткой при больших числах Рейнольдса турбулентности $Re_T = 1.5 \cdot 10^3 \div 1.3 \cdot 10^4$ дают для $\alpha \approx 0.42 - 0.45$ [19].

Определение значений постоянной k может быть произведено на основании экспериментальных данных по затуханию неизотропной турбулентности при отсутствии деформации, имеющихся в работе [11, 16]. Приведенные в статье [11] средние по длине цилиндрического канала значения отношения нелинейного обменного члена к диссипативному члену для продольного и поперечного направлений равны соответственно 1.5 и 0.2 (степень поджата сопла, вызывающего неизотропность турбулентности, равна 4), что дает, используя выражение для этих отношений на основе аппроксимаций (2.4), значение отношения k/α вдоль канала в пределах 0.4–0.8. Из замеров в цилиндре следует также, что отношение диссипативных членов в продольном и поперечном направлениях в этих условиях составляет ≈ 3.8 , что примерно равно отношению средних квадратов соответствующих компонент вектора пульсационной скорости. Это делает оправданным использование при аппроксимации диссипации неизотропного выражения.

Отношение k/α может быть определено также по кривым затухания пульсаций скорости вдоль цилиндрического канала из соотношения, следующего из (2.6) и (2.9):

$$\frac{k}{\alpha} = \ln \left(\frac{\langle u_2'^2 \rangle - \langle u_1'^2 \rangle}{\langle u_2'^2 \rangle_0 - \langle u_1'^2 \rangle_0} \right) / \ln u^2/u_0^2 - 1$$

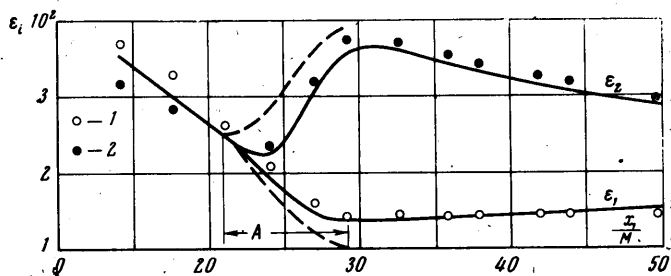
где индексом нуль обозначены параметры в начальном сечении цилиндрического канала (на срезе сопла). Анализ данных работы [11] показывает, что отношение $k/\alpha \approx 0.6$ при $Re_M = U_{10}M/\nu = 3710$ ($Re_T \approx 40$) и $Re_M = 6150$ (M — размер ячейки решетки) и $k/\alpha \approx 1$ при $Re_M = 1230$. Обработка данных работы [16], в которой приведены результаты замеров на большей длине, дает значение $k/\alpha = 1.9$ при $Re_M = 1000$.

Величина k_i в аппроксимации (2.10) принималась равной k , что соответствует допущению об одинаковой скорости стремления к изотропии для энергии и масштабов.

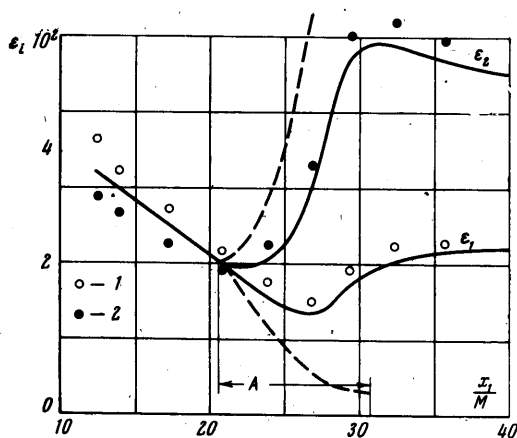
На фиг. 1, 2 приведено сопоставление расчетов для среднеквадратичных составляющих вектора пульсационной скорости $\varepsilon_i = \langle u_i'^2 \rangle^{1/2}/U_{10}$ (ε_1 — продольная, ε_2 — поперечная составляющие) и экспериментальных данных, полученных в [11] в сужающихся соплах квадратного сечения (участок А канала) со степенью поджата, соответственно равной 4 и 16 (l — продольная, 2 — поперечная составляющие). Расчеты (сплошные линии) производились при $\alpha = -2\beta = 1.0$, $k = k_i = 0.6$. Пунктирные линии — расчет по линейной теории. Экспериментальные точки получены при скорости во входном сечении сопла $U_{10} = 1.09$ м/сек, размеры ячеек турбулизирующих решеток $M = 6.08$ см, размер входного сечения сопла 106×106 см² ($Re_M = 3710$, $Re_T = 40$).

Из графиков следует, что предложенная схема позволяет описать все особенности поведения составляющих вектора пульсационной скорости, и в частности немонотонный характер изменения для продольной компоненты при степени поджатия 16. Физически это связано с большой анизотропией турбулентности, при которой перенос энергии от поперечных компонент вектора пульсационной скорости к продольной превышает уменьшение энергии продольной компоненты за счет диссипации и деформации потока.

Результаты замеров среднеквадратичных составляющих вектора пульсационной скорости в сужающемся канале приведены также в [20-22]. В них не указываются масштабы длины исходной турбулентности, поэтому сопоставление с предложенной моделью невозможно.



Фиг. 1



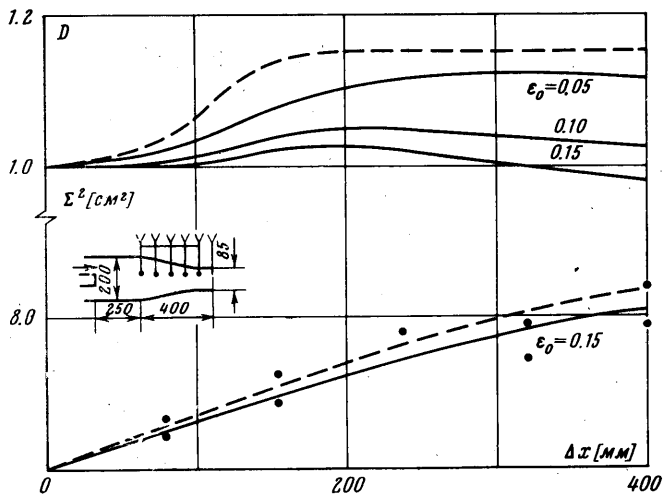
Фиг. 2

Предложенная схема позволяет рассчитать поведение интегральных масштабов длины турбулентности вдоль осей координат. Это делает возможным определение изменения коэффициентов турбулентной диффузии в полуэмпирическом уравнении переноса [23] при течении в канале переменной площади сечения, если использовать часто принимаемое допущение, что коэффициенты диффузии вдоль осей пропорциональны произведениям среднеквадратичных составляющих вектора пульсационной скорости и масштабов длины вдоль соответствующих осей.

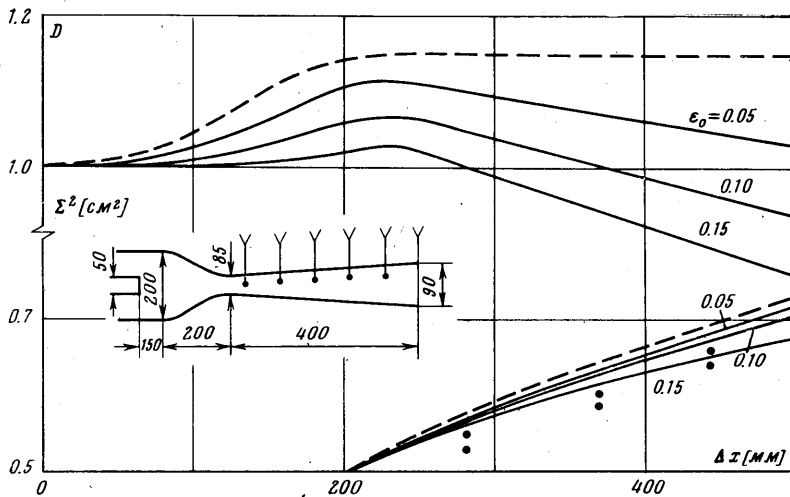
Результаты экспериментального исследования турбулентной диффузии в соплах приведены в [24]. На фиг. 3 и 4 приведены результаты расчета изменения поперечного коэффициента диффузии

$$D \equiv \frac{D_2(x_1)}{D_{20}(x_{10})} = \frac{\sqrt{\langle u_1'^2 \rangle(x_1)} l_2(x_1)}{\sqrt{\langle u_2'^2 \rangle(x_{10})} l_{20}(x_{10})}, \quad \Delta x = x_1 - x_{10}$$

($\langle u_2'^2 \rangle(x_{10})$, $l_2(x_{10})$ относятся к входному сечению сопла, вдоль сужающегося сопла при критическом истечении и вдоль сверхзвукового сопла, обеспечивающего коэффициент скорости на срезе сопла $\lambda=1.3$, для условий опытов работы [24]. Интенсивность турбулентности на входе в сопло ϵ_0 в этой работе не замерялась, однако ввиду



Фиг. 3



Фиг. 4

наличия решеток ее величина была повышенной по сравнению с установившимся течением в трубе, где $\varepsilon_0 = \langle u'^2(x_{10}) \rangle^{1/2} / U_{10} \approx 5 \cdot 10^{-2}$, что подтверждается также повышенной величиной коэффициента турбулентной диффузии исходного потока. По-видимому, в опытах интенсивность турбулентности исходного потока была 10–15%. В расчете принималось $\alpha = 0.4$. Начальный эйлеров масштаб турбулентности $l_2(x_{10})$ определялся по экспериментальной величине коэффициента турбулентной диффузии на входе в сопло

$$D_{20} / U_{10} = \sqrt{\langle u_2'^2 \rangle(x_{10})} L_{20} / U_{10} = 0.1$$

где L_{20} — лагранжев масштаб длины турбулентности и известной эмпирической связи [17] $L_{20} \alpha / l_2(x_{10}) = 0.5$, из которой при $\alpha = 0.4$ имеем $L_{20} \approx 1.25 l_2(x_{10})$.

Построенная на основании рассчитанных коэффициентов диффузии приведенная дисперсия Σ^2 диффундирующей примеси, связанная с коэффициентом диффузии соотношением [24]

$$\frac{d\Sigma^2}{dx_1} = 2 \frac{r_0^2}{r^2(x_1)} \frac{D_2(x_1)}{U_1(x_1)}$$

вместе со взятыми из [24] экспериментальными точками приведена на фиг. 3 и 4 ($r(x_1)$ — текущий радиус сопла, радиус r_0 для сужающегося и сверхзвукового сопла относится соответственно ко входному и критическому сечениям сопла). Пунктирные кривые соответствуют значениям $\langle u_2'^2 \rangle$ и l_2 , найденным по линейной теории.

Авторы признательны В. М. Иевлеву за участие в обсуждении результатов настоящей работы.

Поступила 12 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Attaining steady air stream in wind tunnels. Nat. Adv. Comm. Aeronaut. Techn. Memó., 1933, No. 726.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
3. Taylor G. J. Turbulence in a contracting stream. Z. angew. Math. und Mech., 1935, Bd 15, H. 1—2.
4. Современные проблемы гидроаэродинамики, т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1943.
5. Batchelor G. K., Proudman I. The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, pt 1.
6. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
7. Ribner H. S., Tucker M. Spectrum of turbulence in a contracting stream. NASA, 1953, Rept No. 1113.
8. Pearson J. R. A. The effect of uniform distortion on weak homogeneous turbulence. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, pt 2.
9. Прудников А. Г., Волинский М. С., Сагалович В. Н. Процессы смесеобразования и горения в воздушно-реактивных двигателях. М., «Машиностроение», 1971.
10. Daly B. J., Harlow F. H. Transport equations in turbulence. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 11.
11. Uberoi M. S. Effect of wind-tunnel contraction of free-stream turbulence. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 8.
12. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
13. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. физическая, 1942, т. 6, № 1—2.
14. Rotta J. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. Z. Phys., 1951, Bd 129, H. 6; Bd 131, H. 1.
15. Онуфриев А. Т. Об уравнениях полуэмпирической теории турбулентного переноса. ПМТФ, 1970, № 2.
16. Uberoi M. S. Equipartition of energy and local isotropy in turbulent flows. J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, No. 10.
17. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
18. Townsend A. A. Entrainment and the structure of turbulent flow. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, No. 1.
19. Kistler A. L., Vrebalovich T. Grid turbulence at large Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1966, vol. 26, No. 1.
20. Войтович Л. Н. Влияние поджатия сопла на затухание турбулентных пульсаций. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н., 1969, вып. 3, № 13.
21. Войтович Л. Н. Влияние поджатия сопла на затухание турбулентных пульсаций. В сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 30. М., «Машиностроение», 1973.
22. Klein A., Ramjee V. Effects of contraction geometry on non-isotropic free-stream turbulence. Aeronaut. Quart., 1973, vol. 24, No. 1.
23. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
24. Зимонт В. Л. Экспериментальное исследование турбулентной диффузии в каналах переменного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.