

**УСТОЙЧИВОСТЬ МГД ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛЕ ПРИ НАКЛОННОМ  
ВНЕШНЕМ ПОЛЕ**

**О. А. ЛИХАЧЕВ, В. Н. ШТЕРН**

(Новосибирск)

До настоящего момента анализ устойчивости МГД течений в канале ограничивался либо в продольном [1, 2], либо в поперечном [3, 4] магнитном поле. На практике тем не менее из-за краевых эффектов реализуется косое магнитное поле. При наличии косого магнитного поля появляется дополнительная массовая сила взаимодействия наведенного гартмановского тока с продольной компонентой внешнего магнитного поля и возникает возможность реализации некоторого механизма неустойчивости, в какой-то степени аналогичного конвективному. В этом случае теорема Сквайра не действует и необходимо рассматривать трехмерные возмущения. В [2] показано, что при достаточном по величине продольном магнитном поле более неустойчивыми будут трехмерные возмущения. С другой стороны, при наличии поперечного магнитного поля неустойчивость связана с двумерными возмущениями. Следовательно, существует какой-то граничный угол между полем и скоростью, разделяющий области двумерной и трехмерной неустойчивостей.

Ниже в рамках линейной теории исследуется устойчивость плоскопараллельных течений вязкой проводящей жидкости в косом магнитном поле к трехмерным возмущениям в предположении малости магнитного числа Рейнольдса. Получены зависимости минимума критического числа Рейнольдса от числа Гартмана во всем диапазоне изменения угла наклона поля. Выяснено, что более опасными являются двумерные возмущения, вплоть до малого граничного угла наклона поля. Найдена зависимость этого угла от числа Гартмана. При достаточно большой поперечной составляющей магнитного поля, когда реализуется пограничный слой Гартмана, обнаружена зависимость критического числа Рейнольдса от знака продольной компоненты магнитного поля.

1. В предположении малости магнитных чисел Рейнольдса задача линейной гидродинамической устойчивости течения вязкой несжимаемой проводящей жидкости в плоском канале сводится к исследованию спектра собственных значений модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда

$$(1.1) \quad v^{IV} - 2k^2v'' + k^4v - i\alpha R[(U-c)(v'' - k^2v) - U''v] = \\ = G^2[H_y^2v'' + i2\alpha H_x H_y v' - \alpha^2 H_x^2 v], \quad H_x = \cos \gamma, \quad H_y = \sin \gamma, \quad U = \frac{\text{ch } G_1 - \text{ch } G_1 y}{\text{ch } G_1 - 1}$$

с однородными граничными условиями

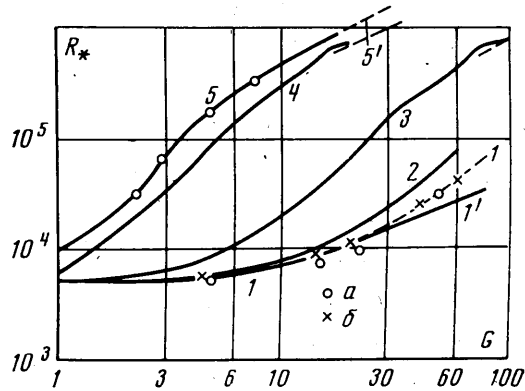
$$(1.2) \quad v(\pm 1) = v'(\pm 1) = 0$$

Здесь  $v(y)$  — амплитуда  $y$ -составляющей скорости возмущения,  $k(\alpha, \beta)$  — волновой вектор,  $R$  — число Рейнольдса,  $U$  — профиль скорости,  $G_1 = G \sin \gamma$ ,  $c = X + iY$  — собственное значение задачи,  $G$  — число Гартмана,  $\gamma$  — угол между внешним магнитным полем и скоростью стационарного течения. Значение  $Y < 0$  соответствует затуханию возмущения, значение  $Y > 0$  — росту. В качестве масштаба длины выбрана полуширина канала, за масштаб скорости принята максимальная скорость потока. Критические значения параметров находятся из условия

$$\max Y(R_*) = 0$$

Для расчета собственных значений уравнения (1.1) использовался численный метод работы [3]. Собственные значения находились с заданной точностью (три значащих цифры). Численные расчеты проводились на БЭСМ-6 ВЦ СОАН СССР.

2. Проведенные расчеты устойчивости течения Пуазейля в продольном магнитном поле, которые носили контрольный для численного алгоритма характер, дали хорошее совпадение с результатами расчетов устойчивости течения в кольцевом канале в присутствии продольного поля и с отношением радиусов, близким к единице [6]. Численные расчеты для двумерных возмущений представлены на фиг. 1 линией 1. Данные, полученные Стю-



Фиг. 1

артом с помощью асимптотического метода Гейзенберга — Линя, нанесены точками *a*, а результаты [6] — точками *б*. Из поведения зависимости критического числа Рейнольдса от числа Гартмана видно, что продольное магнитное поле обладает стабилизирующим действием и для двумерных возмущений поток может быть стабилизирован достаточно большим внешним продольным полем.

Были проведены численные расчеты устойчивости потока в продольном поле к трехмерным возмущениям. Действительно, из фиг. 1 (кривая 1') можно видеть, что кривая зависимости критического числа Рейнольдса от числа Гартмана при  $G > G_*$  выходит на асимптоту  $R_* = 550G$ , минимум критического числа Рейнольдса достигается на трехмерных возмущениях. Для граничного числа Гартмана найдено значение  $G_* = 24$ . Угол, соответствующий наиболее опасным трехмерным возмущениям, следуя [2], можно определить из соотношения  $\cos \theta_* = G_*/G$ , что находится в полном соответствии с проведенными расчетами.

Зависимость  $R_*(G)$  для течения в поперечном магнитном поле ( $\gamma = \pi/2$ ) нанесена на фиг. 1, результаты [3] нанесены точками, а штриховой линией 5' представлена асимптотическая зависимость  $R_* = 48300G$  для случая больших чисел  $G$ , когда профиль скорости вырождается в экспоненциальный. Сильная стабилизация потока поперечным полем обусловлена изменением профиля основного течения. В случае косоугольного поля, при достаточной поперечной составляющей, поток будет стабилизироваться исключительно за счет изменения профиля стационарного течения поперечной компонентой поля, если зависимость  $R_*(G)$  выходит на асимптоту  $R_* = 48300G$ , при одних и тех же  $G$  (здесь  $G_1 = G \sin \gamma$ ) для разных углов наклона поля. Зависимость  $R_*^{(i)}(G)$  соответственно для углов

наклона поля  $\gamma_i = \pi/20, \pi/4$  ( $i=3, 4$ ) показана на фиг. 1 кривыми 3, 4. Обе линии монотонно растут с увеличением числа Гартмана и при  $G_1^{(i)} > 14$  выходят на соответствующие асимптоты  $R_*^{(i)} = 48300 \sin \gamma_i G$ , где индекс ( $i$ ) соответствует номеру угла.

Проделанные расчеты зависимости  $R_*(G_1)$  для нескольких не слишком малых углов наклона поля показали, что соответствующие кривые ложатся одна на другую и лишь небольшие отклонения вносятся продольной составляющей поля при  $G_1^{(i)} < 5$ .

Таким образом, ясно, что при не очень малых углах наклона поля и достаточных числах Гартмана устойчивость течения определяется величиной поперечной составляющей поля и при  $G \sin \gamma_i > 14$  критическое число Рейнольдса выходит на указанную выше асимптоту.

Для течения в продольном поле критическое волновое число  $k_*(G)$  остается практически постоянной величиной ( $k_* \sim 1$ ). Для течения в косом магнитном поле критическое волновое число при  $G_1^{(i)} \sim 14$  выходит на асимптотическую зависимость  $k_*^{(i)} = 0,161 \sin \gamma_i G$ . Все рассмотренное выше справедливо лишь для плоских возмущений.

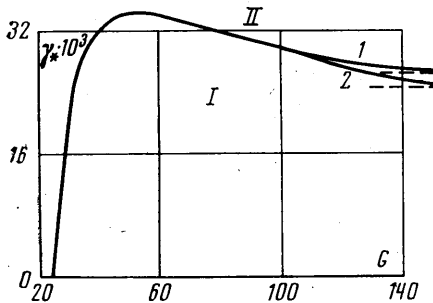
Выясним теперь, как влияет на устойчивость трехмерных возмущений поперечная составляющая внешнего косоугольного магнитного поля. Как упоминалось выше, при достаточно малых углах наклона поля и больших числах Гартмана существенную роль начинают играть трехмерные возмущения. Это объясняется наличием значительной продольной составляющей поля. С целью определения влияния поперечного поля на устойчивость трехмерных возмущений был проведен расчет зависимости от числа Гартмана граничного угла наклона поля  $\gamma_*$ , которому при данном  $G$  впервые начинают соответствовать плоские возмущения, как более опасные, причем кривая 1 соответствует случаю, когда продольное магнитное поле направлено против течения, кривая 2 — по течению. На фиг. 2 приведена зависимость  $\gamma_*(G)$ . Во внутренней области (I) наиболее опасными являются трехмерные возмущения, а во внешней (II) двумерные. Для углов наклона поля  $0,025 < \gamma < 0,035$  существуют три области значений  $G$ , двум из которых соответствуют наиболее неустойчивые двумерные возмущения, а третьей — более опасные трехмерные возмущения (фиг. 2).

Итак, трехмерные возмущения могут быть более неустойчивы лишь для углов  $\gamma < 0,035$ . При стремлении  $G$  к бесконечности  $\gamma_*$  стремится к асимптотам, которые нанесены на фиг. 2 штриховыми линиями (кривые 1).

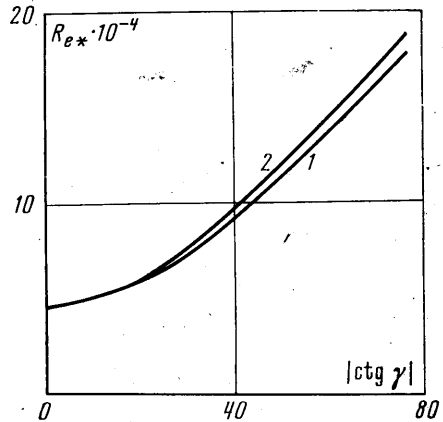
Для нахождения указанных выше асимптот, которые реализуются при больших числах Гартмана, был проведен расчет пограничного слоя Гартмана. При больших числах Гартмана профиль стационарного течения в поперечном магнитном поле вырождается в экспоненциальный ( $U = 1 - e^{-\eta}$ , где  $\eta = yG_1$ ) и скорость основного течения меняется существенно лишь в пристенной области толщины порядка  $1/G_1$ . Поскольку все эффекты неустойчивости будут существенны лишь в этой области, за характерный масштаб длины примем толщину этого слоя. Итак,  $k_e = k/G_1$ ,  $R_e = R/G_1$ . Так как  $U \sim 1$  уже при  $\eta = 5$ , то, положив граничное значение  $\eta$  достаточно большим, фиксируем профиль. Из проведенных авторами исследований локальности следует, что граничная величина  $\eta = 25$ .

В [7] была исследована устойчивость течения пограничного слоя Гартмана в продольном магнитном поле без учета взаимодействия наведенного гартмановского тока с продольной компонентой поля. За это взаимодействие ответствен член с первой производной в правой части (1.1). Из уравнения (1.1) видно, что знак коэффициента при первой производной зависит от направления внешнего поля. Результаты расчета зависимости

$R_{e*}(G_{2e})$ , выполненные с учетом этого взаимодействия, представлены на фиг. 3 ( $G_{2e} = \text{ctg } \gamma$ ). Линия 1 соответствует случаю, когда продольное поле направлено против течения (знак «минус» в уравнении (2.1)), а линия 2 — когда продольное поле направлено вдоль течения. Как и в случае течения в продольном поле, минимум  $R_{e*}$  достигается на трехмерных возмущениях для  $G_{2e} > G_{2e*}$ . Для кривой 1  $G_{2e*} = 37$  ( $\gamma_* = \pi - 0.027$ ), а для кривой 2  $G_{2e*} = 40$  ( $\gamma_* = 0.025$ ). Асимптотические зависимости соответственно следующие:  $R_{e*}^{(1)} = 2.35 \cdot 10^3 G_{2e}$  и  $R_{e*}^{(2)} = 2.47 \cdot 10^3 G_{2e}$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Вернемся к фиг. 2, на которой изображена зависимость граничного угла наклона поля от числа Гартмана. Штриховыми линиями нанесены значения углов, соответствующих значениям критических чисел Гартмана  $G_{2e*}$ , выше которых более опасными являются трехмерные возмущения. Ясно, что при больших числах Гартмана граничный угол выходит на соответствующие асимптоты, определяемые соотношениями  $\gamma_*^{(i)} = \text{arccctg } G_{2e*}^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ).

Итак, в случае косоугольного магнитного поля трехмерные возмущения будут существенны лишь в секторах  $0 \leq \gamma < 0.025$  и  $(\pi - 0.027) < \gamma \leq \pi$ .

3. Покажем теперь возможный механизм дестабилизации потока массовой силой взаимодействия гартмановского тока с продольной компонентой поля. Этот механизм аналогичен конвективному. Наведенный стационарный ток определяется в данном случае выражением  $j_z = R_m H_{0y} (U - V_0)$ , где  $V_0$  — средняя скорость;  $R_m$  — магнитное число Рейнольдса. Около границы канала, где  $j_z = -|j_z|$ , упомянутая выше массовая сила определяется выражением  $F_y = Al^2 H_{0x} j_z$ , где  $Al$  — число Альфвена. При стационарном течении динамическое равновесие описывается уравнением

$$(3.1) \quad \partial p / \partial y = Al^2 H_{0x} j_z$$

Переместим элемент жидкости из точки потока с координатой  $y_1$  в точку  $y_2 < y_1$  и проследим за дальнейшим его поведением. Так как переносимый элемент обладает стационарной скоростью, соответствующей точке  $y_1$ , т. е.  $U_1 = U(y_1)$ , то на него действует гидромагнитная сила  $F_1 = F(y_1)$ . Но  $F_2 > F_1$  (здесь аналогично  $F_2 = F(y_2)$ ) и соответственно по (3.1)  $(\partial p / \partial y)_{y_2} > F_1$ , т. е. в новой для жидкого элемента точке  $y_2$  действующая на него гидромагнитная сила не уравновешивается градиентом давления в этой точке и он продолжает перемещаться к границе канала. Итак, при больших продольных полях и достаточном поперечном поле реализуется возможный механизм неустойчивости, в какой-то степени аналогичный конвективному. Но наряду с этим механизмом существует стабилизирующее воздействие продольного магнитного поля, которое не зависит от знака продольной компоненты поля. Умножим (1.1) на  $\bar{v}$  и,

выделяя действительную часть, после простых преобразований получим

$$(3.2) \quad Y \int_{-1}^1 (|v'|^2 + k^2|v|^2) dy = \int_{-1}^1 \left( U' - 2 \frac{G^2}{R} H_x H_y \right) (v_r v_e' - v_e v_r') dy - \\ - \frac{1}{\alpha R} \int_{-1}^1 \{ |v''|^2 + 2k^2|v'|^2 + k^4|v|^2 \} dy - \frac{G^2}{\alpha R} \int_{-1}^1 \{ H_y^2 |v'|^2 + \alpha^2 H_x^2 |v|^2 \} dy$$

Это соотношение четко выявляет роль различных членов (1.1) в стабилизации или дестабилизации потока. Два последних члена в (3.2) отрицательно определены и, следовательно, стабилизируют течение. Неустойчивость может быть связана только с первым членом правой части (3.2), причем дестабилизация максимальна, когда знак  $H_x$  противоположен  $U'$ .

Результаты численных расчетов согласуются с этими качественными рассуждениями. При этом стабилизирующее влияние магнитного поля оказывается доминирующим. Присутствие перекрестного члена с  $H_x H_y$  приводит лишь к небольшому расщеплению кривых зависимости критического числа Рейнольдса от числа Гартмана для случаев параллельного скорости и антипараллельного скорости направления продольной компоненты поля.

Авторы благодарят М. А. Гольдштика за внимание к работе.

Институт теплофизики  
СО АН СССР

Поступила в редакцию 4 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Stuart J. T.* On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a coplanar magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1954, vol. A221, No. 1145.
2. *Hunt J. C. R.* On the stability of parallel flows with parallel magnetic fields. Proc. Roy. Soc., 1966, vol. A293, No. 1434.
3. *Lock R. C.* The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1955, vol. A233, No. 1192.
4. *Сагалаков А. М., Штерн В. Н.* Устойчивость плоскопараллельных магнитогидродинамических течений в поперечном магнитном поле. ПМТФ, 1970, № 3.
5. *Сапожников В. А.* Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Тр. Всес. семинара по численным методам механики вязкой жидкости, т. 2. Новосибирск, «Наука», 1969.
6. *Вильгельми Т. А., Сапожников В. А.* Об устойчивости течения в кольцевом канале. Численные методы механики сплошной среды, т. 2, № 4. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1971.
7. *Abas S.* Stability of Hartmann boundary layer under the influence of a parallel magnetic field. J. Fluid. Mech., 1968, vol. 32, pt 4.