

РАЗВИТЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ  
ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ  
ПЛОСКОСТИ

Л. Н. МАУРИН

(Иваново)

Стекание тонкого слоя (пленки) вязкой жидкости по вертикальной стенке под действием силы тяжести сопровождается волновыми движениями, в которых существенную роль играют капиллярные силы. В расчетах этих движений широко используется уравнение для толщины пленки  $h(x, t)$ . Это уравнение, полученное из уравнений Навье – Стокса и граничных условий при различных допущениях, сводится для установившихся плоских движений к обыкновенному дифференциальному нелинейному уравнению третьего порядка [1–7]. Периодические решения этого уравнения разыскивались методами асимптотических разложений по амплитуде или разложения в ряды Фурье [1–7], что предполагает последовательный учет нелинейности как малого возмущения. Это ограничивает справедливость полученных результатов областью малых амплитуд.

В настоящей работе рассмотрен случай произвольных амплитуд. Построено решение задачи, основанное на асимптотическом разложении по параметру  $\epsilon$ . В этом разложении уравнение для первого приближения остается нелинейным, но допускает интегрирование, которое выявляет класс ограниченных периодических решений. Кроме того, получены строгие интегральные соотношения (для любых  $\epsilon$ ) и на их основе сформулирована и решена вариационная задача об отыскании нижней грани значений средней толщины пленки и других характеристик предельно развитых оптимальных движений.

Полученные результаты согласуются с экспериментами.

1. Основу для проводимого ниже анализа составляет уравнение

$$(1.1) \quad \ddot{h} + \dot{h}f(h) = \frac{3}{RW} \left( -1 + \frac{c}{h^2} - \frac{q}{h^3} \right), \quad \dot{h} = \frac{dh}{d\tau}, \quad \tau = W(x - ct)$$

К этому виду приводятся полученные разными авторами [1–7] уравнения для переменной толщины пленки  $h$  в установившихся волновых движениях. К (1.1) следует добавить уравнение непрерывности, которое для установившегося движения, когда  $h(x, t) = h(x - ct)$ , интегрируется и после усреднения по длине пленки приводится к виду

$$(1.2) \quad 1 = c\langle h \rangle - q, \quad \langle A \rangle = \lim_{|\tau_2 - \tau_1| \rightarrow \infty} \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} A d\tau$$

Здесь в качестве единиц расстояния, времени, скорости и локального (в данном сечении) расхода  $Q$  выбраны соответственно  $l = (3\nu\langle Q \rangle / g)^{1/2}$ ,  $l^2 / \langle Q \rangle$ ,  $\langle Q \rangle / l$ ,  $\langle Q \rangle$  и приняты обозначения:  $R = \langle Q \rangle / \nu$  (число Рейнольдса) и  $W = (\rho / \sigma l)^{1/2} \langle Q \rangle$  (число Вебера), где  $\langle Q \rangle$  – средний по длине пленки расход жидкости,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\nu$  – вязкость,  $\rho$  – плотность жидкости. В уравнения (1.1) и (1.2) входят также безразмерные величины: толщина пленки  $h(\tau)$ , которую будем считать ограниченной и не обращающейся в нуль (поверхность пленки не касается стенки), «фазовая скорость»  $c$  и постоянная интегрирования  $q$ .

2. Усредним (1.1) по координате  $\tau$ . Так как в левой части уравнения стоят полные производные, то при усреднении они выпадают. Аналогичная картина получится, если усреднить (1.1), предварительно умножив его на  $h(\tau)$ . Таким образом получатся два уравнения

$$(2.1) \quad 0 = 1 - c\langle h^{-2} \rangle + q\langle h^{-3} \rangle, \quad 0 = \langle h \rangle - c\langle h^{-1} \rangle + q\langle h^{-2} \rangle$$

Если проследить историю появления слагаемых в правой части уравнения (1.1) в процессе его вывода из уравнений Навье — Стокса, то будет видно, что  $3/R$  и  $3h/R$  есть соответственно безразмерное ускорение силы тяжести и безразмерная сила тяжести, действующая на поперечное сечение пленки,  $3a/R(-c/h + q/h^2)$  — сила трения, действующая на стенке в том же сечении. Таким образом правая часть уравнения (1.1) представляет с точностью до коэффициента  $W$  сумму сил тяжести и силы трения в расчете на единицу толщины поперечного сечения пленки. Таким образом, соотношения (2.1) отражают тот факт, что в установившемся движении гравитационная и вязкая силы должны быть «сбалансированы» в среднем по длине пленки.

Разрешая (1.2) и (2.1) относительно  $c$  и  $q$ , получим после элементарных преобразований

$$(2.2) \quad c = \frac{\langle h \rangle - \langle h^{-2} \rangle}{\langle h^{-1} \rangle - \langle h \rangle \langle h^{-2} \rangle}, \quad q = \frac{\langle h \rangle^2 - \langle h^{-1} \rangle}{\langle h^{-1} \rangle - \langle h \rangle \langle h^{-2} \rangle}$$

$$\langle h^{-3} \rangle \langle h^{-1} \rangle - \langle h^{-2} \rangle^2 = \langle h^{-3} (h - \langle h \rangle)^2 \rangle$$

3. Будем строить асимптотическое разложение периодического решения уравнения (1.1) по степеням предполагаемого малым параметра  $\varepsilon = 3/RW$

$$(3.1) \quad h = h^{(0)} + \varepsilon h^{(1)} + \dots$$

Ограничиваясь первым приближением и сохраняя за  $h^{(0)}$  прежнее обозначение  $h$ , имеем в этом приближении

$$(3.2) \quad \ddot{h} + \dot{h}f(h) = 0$$

Подчеркнем, что уравнение (3.2) остается нелинейным и, таким образом, характер разложения (3.1) не налагает ограничений на величину амплитуды.

Уравнение (3.2) имеет пятипараметрическое семейство решений (три постоянных интегрирования, а также параметры  $c$  и  $q$ ). Из этого семейства отберем решения, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) «балансу в среднем» гравитационно-вязких сил (2.1), 2) уравнению непрерывности (1.2), 3) условию, вытекающему из произвола в выборе начала отсчета на оси  $\tau$  (начальной фазы волны). Из этого получаем однопараметрическое множество волновых решений, что находится в согласии с работами [6, 8, 9, 10].

Остановимся на тесной связи, существующей между рассматриваемой задачей и задачей построения периодических решений дифференциальных уравнений второго порядка типа уравнения Ван-дер-Поля для автоколебаний генератора. Действительно, после интегрирования по  $\tau$  уравнение (1.1) принимает вид

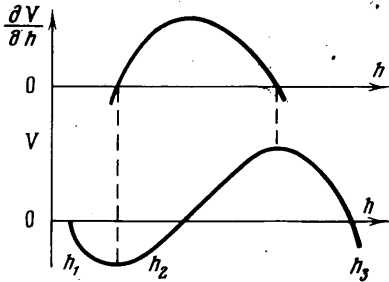
$$(3.3) \quad \dot{h} + \frac{\partial V}{\partial h} = \varepsilon F, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} = f(h), \quad F(h, \tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \left[ -1 + \frac{c}{h^2} - \frac{q}{h^3} \right] d\tau$$

Уравнение (3.3) можно интерпретировать как уравнение, которое описывает механическое движение осциллятора, происходящее под действием

потенциальной нелинейной возрастающей силы  $-\partial V/\partial h$  и непотенциальной силы  $F(h, \tau)$ . Покажем, что  $F(h, \tau)$  в среднем не совершает работы

$$(3.4) \quad \langle \dot{h}F(h, \tau) \rangle = \frac{1}{2} [h(\tau_2) + h(\tau_1)] \left\langle -1 + \frac{c}{h^2} - \frac{q}{h^3} \right\rangle + \\ + \left\langle h - \frac{c}{h} + \frac{q}{h^2} \right\rangle = 0.$$

это выражение равно нулю в силу (2.1). Это делает возможным существование стационарных колебаний конечной амплитуды, определяемой условием равенства нулю среднего значения работы силы  $F$ , т. е. условием (3.4) или в конечном счете условиями (2.1).



Фиг. 1

В итоге можно сказать, что если при малых расходах ( $\epsilon \gg 1$ ) «сила»  $F$  не только определяет условия баланса, но и существенным образом участвует в формировании формы колебания, то с увеличением расхода влияние  $F$  на профиль волны уменьшается и при расходах, отвечающих значениям  $\epsilon < 1$ , форма колебаний (профиль волны) определяется только видом «потенциальной ямы»  $V(h)$ , а роль силы  $F$  сводится к отбраковке периодических реше-

ний, не обеспечивающих баланса, т. е. равенства нулю работы силы на периоде колебаний.

4. Проинтегрируем (3.2) дважды. Выбрав для определенности  $f(h)$  в форме (см. [1, 2])  $f = \partial^2 V/\partial h^2 = 6q^2/5h^3 - c^2/5h$ , получим

$$(4.1) \quad \frac{\dot{h}^2}{2} + V(h) = 0, \quad V(h) = \frac{3q^2}{5h} - \frac{c^2}{5}(h \ln h - h) + A_1 h + A_2 \\ \frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{3q^2}{5h^2} - \frac{c^2}{5} \ln h + A_1,$$

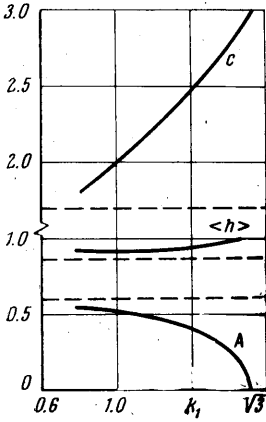
Здесь  $A_1$  и  $A_2$  — константы интегрирования.

В соответствии с предложенной выше механической интерпретацией здесь  $V(h)$  играет роль потенциальной, а  $\dot{h}^2/2$  — кинетической энергии.

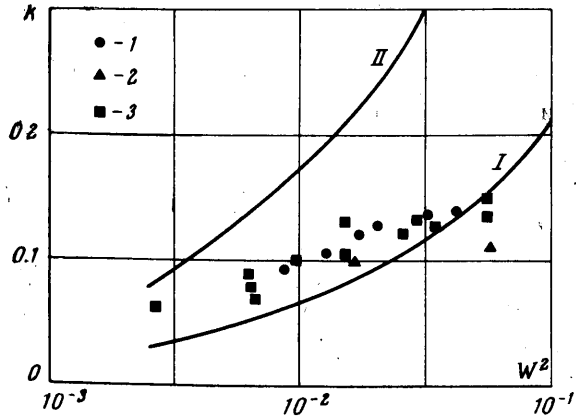
Для определения возможных типов движений в потенциальной яме  $V$  найдем ее форму. Из (4.1) видно, что  $\partial V/\partial h$  неограниченно убывает при  $h \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow \infty$  и имеет максимум при  $h_2 = \sqrt{6}q/c$ . Так как для ограниченных решений «механическая сила»  $\partial V/\partial h$  должна по крайней мере один раз обращаться в нуль, то максимум функции  $\partial V/\partial h$  должен лежать выше оси  $h$  (фиг. 1).

Из фиг. 1 видно, что однопараметрическое семейство решений есть совокупность колебательных движений в потенциальной яме  $V(h)$ . Яма  $V$  должна иметь конечную глубину. Действительно, при уменьшении глубины ямы нули функции  $\partial V/\partial h$  приближаются по оси  $h$  к местоположению максимума этой функции, т. е. к значению  $h_2$ . Но так как в мелкой яме амплитуда колебаний мала, то  $q$  и  $c$  могут быть вычислены из формул (2.2) с помощью разложений величины  $\langle h^m \rangle = \langle (1 + \varphi)^m \rangle$  по степеням  $\varphi$ . При этом оказывается, что  $c = 3 + 0(\varphi^2)$ ,  $q = 2 + 0(\varphi^2)$ ,  $q/c = 2/3 + 0(\varphi^2)$ . Таким образом, в мелкой яме имели бы, с одной стороны,  $h = 1 + \varphi \approx 1$ , а с другой —  $h \approx \sqrt{6}q/c \approx 1.63$ , т. е. противоречащие один другому результаты. Итак, яма

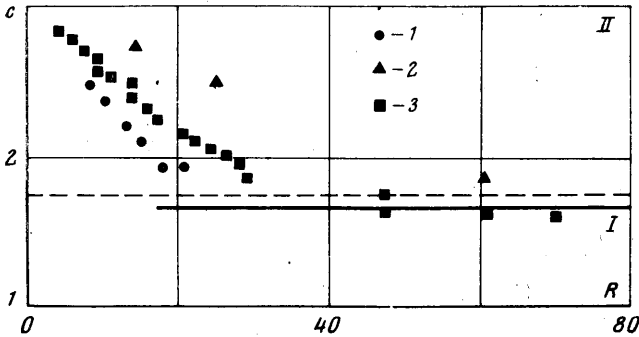
$V$  не может иметь малой глубины, и потому нелинейный характер уравнения (4.1), определяемый в основном наличием максимума на правой границе ямы, существенно сказывается лишь на колебаниях предельно больших амплитуд. Это делает понятным, почему решения уравнения (1.1), полученные методом последовательных приближений [3-6] и близкие к гармоническим, удовлетворительно согласуются с опытом.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Введем вместо постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  в выражении (4.1) минимальное и максимальное значения толщины пленки  $h_1$  и  $h_2$  (левый и правый нули  $V$ ). Тогда  $V$  примет вид

$$(4.2) \quad V(h) = -\frac{3q^2}{5} \frac{(h_2-h)(h-h_1)}{hh_1h_2} + \frac{c^2}{5} \left( -h \ln \frac{h}{h_1} + h_2 \frac{h-h_1}{h_2-h_1} \ln \frac{h_2}{h_1} \right)$$

Из (4.1) и (4.2) имеем

$$(4.3) \quad \langle h^m \rangle = \frac{I_m}{I_0}, \quad I_m = \int_{h_1}^{h_2} \frac{h^m dh}{\sqrt{V(h)}}, \quad \frac{k}{W} = \frac{\pi\sqrt{2}}{I_0}$$

Здесь  $k$  — безразмерное волновое число. Подставляя (4.3) в соотношения (2.2), получим замкнутую систему трансцендентных уравнений для определения любых трех параметров из четырех  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $c$ ,  $q$ . Эта система решалась на ЭВМ. При этом в качестве определяющего параметра выби-

ралась амплитуда  $A = 1/2(h_2 - h_1)$ . Для каждой фиксированной амплитуды произвольно задавался набор величин  $h_1$ ,  $q$  и  $c$ . Этот набор варьировался до тех пор, пока не достигалось самосогласования, именно пока соотношения (2.2) не обращались в тождества.

Результаты вычислений, приведенные на фиг. 2, показывают распределение по спектру ( $k_1 = k/W$ ) безразмерных амплитуд (кривая *A*), фазовой скорости  $c$  и средней толщины пленки  $\langle h \rangle$  для разрешенных волновых движений. На фиг. 3 показана зависимость от квадрата числа Вебера волновых чисел, лежащих на длинноволновой (кривая *I*) и коротковолновой (кривая *II*) границах спектра. На фиг. 3 и 4 нанесены для сравнения результаты экспериментов (данные *1, 2, 3* взяты из [2, 11, 12] соответственно). Сплошными линиями на фиг. 4 изображены величины фазовой скорости самой длинной и самой короткой волн из спектра стационарных движений.

Полученные теоретические результаты справедливы при  $\varepsilon < 1$ . Для воды, например, это соответствует числу  $R > 20$ . Отчетливо видно, что теоретические результаты сближаются с экспериментальными по мере увеличения чисел Рейнольдса и Вебера и «выходят» на них при  $R > 20$ .

Если аппроксимировать функцию  $V$  кубическим полиномом (см. фиг. 1)

$$V(h) = -M(h-h_1)(h_2-h)(h_3-h), \quad M = \frac{6q^2}{5} - \frac{c^2}{15}$$

то решение уравнения (4.1) можно написать в явном виде через эллиптические функции

$$(4.4) \quad h(\tau) = h_1 + (h_2 - h_1) \operatorname{sn}^2(y; s) \\ s = \left( \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1} \right)^{1/2}, \quad y = \frac{1}{2} [M(h_3 - h_1)]^{1/2} \tau$$

Подставляя (4.4) в (2.2), получим три трансцендентных уравнения, связывающих величины  $c$ ,  $q$  и  $h_1$  с амплитудой волны. В случае небольших амплитуд (именно тогда кубическая аппроксимация  $V$  эффективна) эти уравнения приводят к следующим аналитическим зависимостям:  $k/W = \sqrt{3} - 4.9A^2$ ,  $c = 3 - 4.5A^2$ , которые точно укладываются на начальные участки кривых, приведенных на фиг. 2.

5. Вернемся теперь к точным интегральным соотношениям (2.2), полученным из полного уравнения (1.1) и введем функцию  $H(\tau)$

$$(5.1) \quad h(\tau) = \langle h \rangle H(\tau), \quad H(\tau) > 0, \quad \langle H(\tau) \rangle = 1$$

Подставляя (5.1) в последнее уравнение системы (2.2), получим

$$(5.2) \quad \langle h \rangle^3 = \Phi(H) = \frac{\langle H^{-3} \rangle \langle H^{-1} \rangle - \langle H^{-2} \rangle^2}{\langle H^{-3} (H-1)^2 \rangle}$$

Будем рассматривать  $\Phi(H)$  как функционал от  $H(\tau)$ . Этот функционал при различных установившихся волновых движениях имеет различные неотрицательные значения. (Неотрицательность числителя следует из неравенства Гельдера.) В силу неотрицательности существует минимальное значение функционала на множестве периодических решений уравнения (1.1), нормированных соотношением  $\langle H \rangle = 1$ , т. е. минимальное значение средней толщины пленки  $\langle h \rangle$ . Это минимальное значение физически соответствует волновому движению с предельно развитым профилем поверхности пленки. Точнее волновое движение, отвечающее абсолютному минимуму  $\langle h \rangle$ , является предельным в классе оптимальных волновых

движений, введенных в [8] как движения, реализующие при заданном расходе минимума  $\langle h \rangle$ .

Отыскание характеристик этого предельно развитого оптимального волнового движения требует минимизации функционала  $\Phi(H)$  на множестве периодических решений задачи (1.1), (1.2). Вместо этого ограничимся отысканием минимума  $\Phi(H)$  на множестве дифференцируемых периодических функций, в том числе и не являющихся решениями задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющих условиям (5.1). Это расширение множества функций сравнения приводит к замене задачи об отыскании минимального значения средней толщины стекающей пленки задачей об отыскании нижней грани значений этой толщины.

Расширение множества функций сравнения, значительно упрощающее задачу, должно быть проведено достаточно осторожно — без включения в него функций, явно не похожих на волновые профили пленки. Действительно, легко видеть, что абсолютный минимум функционала  $\Phi(H)$  равен нулю и реализуется на функции  $H$ , которая следующим образом сконструирована из  $\delta$ -функций:

$$(5.3) \quad H(\tau) = a + (1-a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau + n\lambda)$$

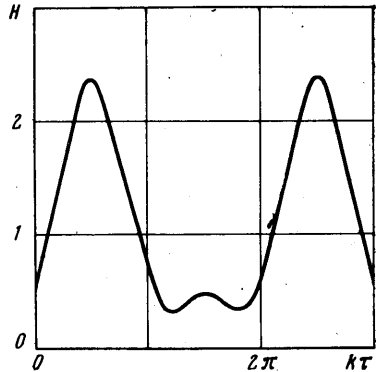
где  $a = \text{const}$ , причем  $0 < a < 1$ , и  $\lambda$  — период функции  $H$ . Функция (5.3) является периодической и удовлетворяет условиям (5.1). Однако ясно, что такие функции не имеют отношения к задаче о стекании пленки, ибо неограниченные амплитуды и неограниченные на одном периоде свободные поверхности не допускаются в реальной пленке капиллярными силами. Наиболее естественно можно провести исключение таких экзотических функций введением требования ограниченности амплитуд функций сравнения, например, величиной, равной единице:  $\Delta H = H_2 - H_1 \leq 2$ , где  $H_1$  и  $H_2$  — соответственно минимальное и максимальное значения  $H$ .

Переходя к отысканию минимума функционала  $\Phi(H)$  на множестве, определенном названными условиями, выберем сначала в качестве функции сравнения  $H(\tau) = 1 - \alpha \sin k\tau$ ,  $\alpha < 1$ . Вычисляя для них средние значения

$$(5.4) \quad \langle H^{-1} \rangle = (1 - \alpha^2)^{-1/2}, \quad \langle H^{-2} \rangle = (1 - \alpha^2)^{-3/2}, \quad \langle H^{-3} \rangle = \\ = \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) (1 - \alpha^2)^{-5/2}$$

и подставляя их в (5.2), получим  $\langle h \rangle^3 = (1 - \alpha^2)^{-1/2} (1 + 2\alpha^2)^{-1}$ . Это выражение имеет минимум при  $\alpha^2 = 1/2$ , причем минимальное значение  $\langle h \rangle$  равно  $2^{-1/6}$ . Подставляя это значение  $\alpha$  в (5.4), найдем из (2.2) и (5.1)  $c = 1.69$ . Возвращаясь к ненормированной амплитуде  $A = \langle h \rangle \alpha (h = \langle h \rangle + A \sin kx)$ , имеем окончательно для параметров волны  $H(\tau)$ , минимизирующей функционал  $\Phi$  и ограничивающей снизу значение  $\langle h \rangle$

$$(5.5) \quad \langle h \rangle = 0.89, \quad A = 0.63, \quad c = 1.69$$



Фиг. 5

Так как в качестве масштаба толщины была выбрана «нуссельтовская» толщина пленки (которую имела бы при данном расходе пленка, стекающая с плоской поверхности), то значение  $\langle h \rangle = 0.89$  выделяет в чистом виде уплощение пленки как нелинейный волновой эффект.

Если выбрать теперь в качестве функций сравнения  $H'(\tau) = 1 + a_1 \sin k\tau + a_2 \sin 2k\tau + b_2 \cos 2k\tau$ , то минимум функционала  $\Phi$  достигается на функции  $H'(\tau) = 1 + \sin k\tau - 0.39 \cos 2k\tau$ .

Вычисления были проведены на ЭВМ причем для параметров этой «волны» имеем  $\langle h \rangle' = 0.79$ ,  $A' = 0.83$ ,  $c' = 1.87$ . Понижение минимума, достигаемое на  $H'$  в сравнении с  $H$ , вызвано экзотичностью  $H'$  (фиг. 5), сходством ее с функцией (5.3). Поэтому в согласии со сказанным выше следует принять именно оценки (5.5), как имеющие отношение к задаче о стекающей пленке. Подчеркнем при этом, что (5.2) весьма незначительно отличается от соответствующих оценок, полученных с  $H'$ , и, следовательно, минимизирующая  $\Phi$  функция  $H$  дает удовлетворительное по точности решение задачи.

Следует отметить также, что полученные результаты (5.5) для предельных свойств периодических решений оказываются не зависящими от вида функции  $f(h)$ , входящей в (1.1). Это указывает на то, что задача о стекающей пленке обладает чертами грубых систем [13].

6. Оценки (5.5) нанесены пунктиром на фиг. 2 и 4. Из фигур видно, что с ростом числа Рейнольдса  $1 < R < 20$  профиль пленки эволюционирует, идет его амплитудное формирование, сопроваждающееся уменьшением безразмерной средней толщины пленки, ростом амплитуды и уменьшением фазовой скорости. Это развитие профиля заканчивается при числах Рейнольдса порядка 20–50. Именно при этих числах течение переходит в «предельно развитый» стационарный волновой режим, параметры которого согласуются с найденными выше.

Автор благодарит участников семинаров, руководимых Г. И. Петровым и Г. З. Гершуни, за обсуждение рассмотренных вопросов.

Поступила 4 XII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1.
2. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2.
3. Маурин Л. Н., Сорокин В. С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости. ПМТФ, 1962, № 4.
4. Левич В. Г., Крылов В. С., Воротилин В. П. О волновом режиме стекания тонких пленок жидкости. Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 6.
5. Renev V., Krylov V. S., Boyadjiev Ch., Vorotilin V. P. Wave flow of thin liquid films. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1972, vol. 15, No. 7.
6. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
7. Gjevik B. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 8.
8. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
9. Ruckenstein E., Berbente C. Mass transfer to falling liquid films at low Reynolds numbers. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1968, vol. 11, No. 4.
10. Lin S. P. Finite-amplitude stability of a parallel flow with a free surface. J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, pt 1.
11. Роговая Н. А., Олевский В. М., Рунова Н. Г. Измерение параметров пленочного волнового течения на вертикальной пластине. Теорет. основы хим. технологии, 1969, т. 3, № 2.
12. Jones L. O., Whitaker S. An experimental study of a falling liquid films. A.I.Ch.E. Journal, 1966, vol. 12, No. 3.
13. Андронов А., Поптрягин Л. Грубые системы. Докл. АН СССР, 1937, т. 14, № 5.